

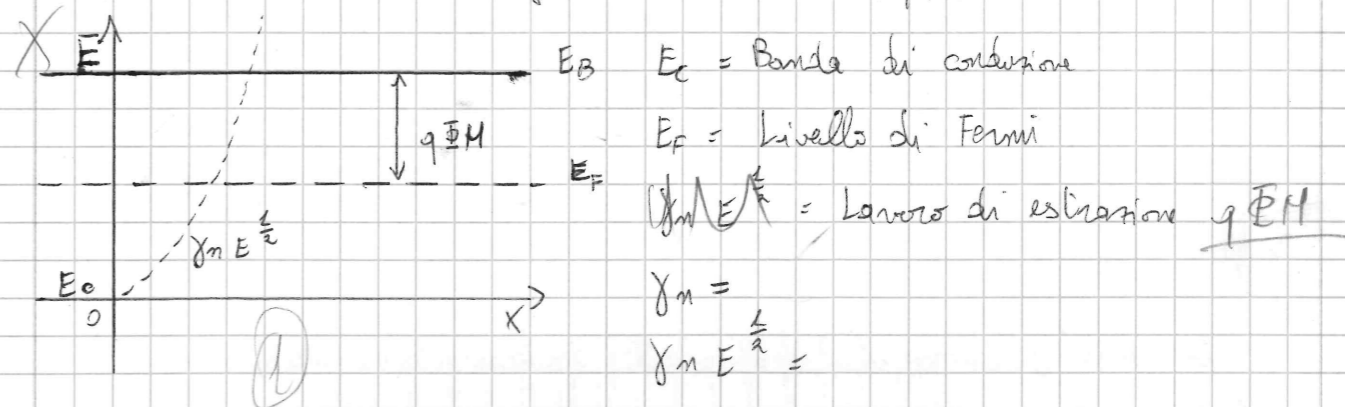
Dispositivi elettronici

Proprietà elettriche dei Materiali

Un solido è rappresentabile mediante un diagramma a bande; esso è un diagramma in cui riportiamo sulle ascisse una posizione (spazio, nel reticolo diretto, o al valore del vettore d'onda, nel caso di reticolo reciproco; noi useremo una posizione spaziale x per ora); sulle ordinate, si inserisce un'energia E .

3 due ^{tipici} solidi da ci interesse studiare in dispositivi sono i metalli ed i semiconduttori.

Metalli: si tratta di solidi molto conduttivi; rappresentiamo un metallo con il suo diagramma a bande tipico:



Facciamo alcune osservazioni: E_c si può considerare in 0, poiché l'energia dell'elettrone in un metallo è tutta energia cinetica; il livello di Fermi si trova dunque nella banda di conduzione, circa a 4,5 eV. Allo zero assoluto, tutti gli elettroni saranno sotto di esso (come si può vedere dalla distribuzione di Fermi-Dirac); si definisce una "working function", ossia una funzione esprime il lavoro di estrazione: essa è la minima energia in grado di estrarre, ad una temperatura di 0 K, un elettrone dal metallo.

Gli elettroni più facili da estrarre a 0 K saranno quelli in prossimità di E_F .

Per esprimere gli stati occupati in un metallo servono due ingredienti: la funzione di densità degli stati energetici $N(E)$, e la funzione di occupazione $f(E; T)$ (distribuzione di Fermi-Dirac).

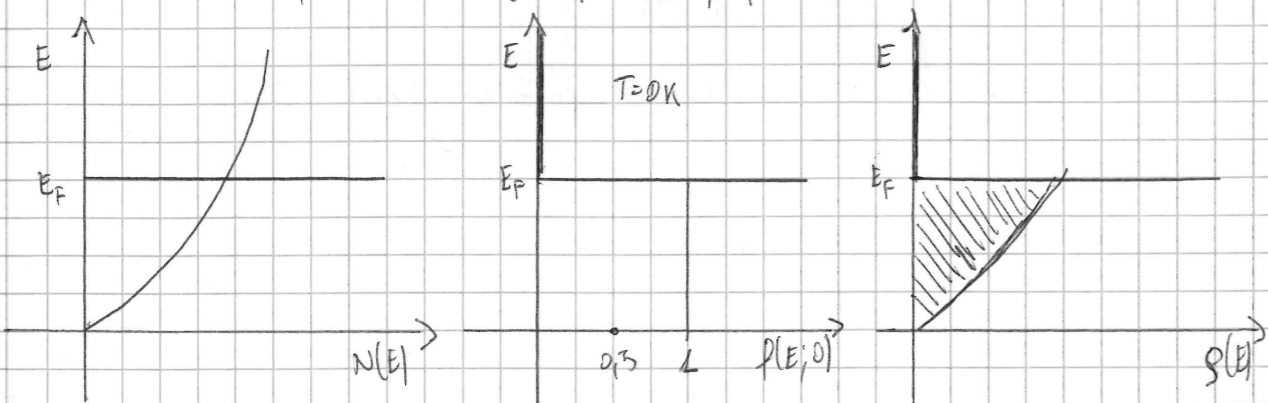
$$N(E) = \gamma_m E^{\frac{1}{2}}$$

$$f(E; T) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_F}{kT}}}$$

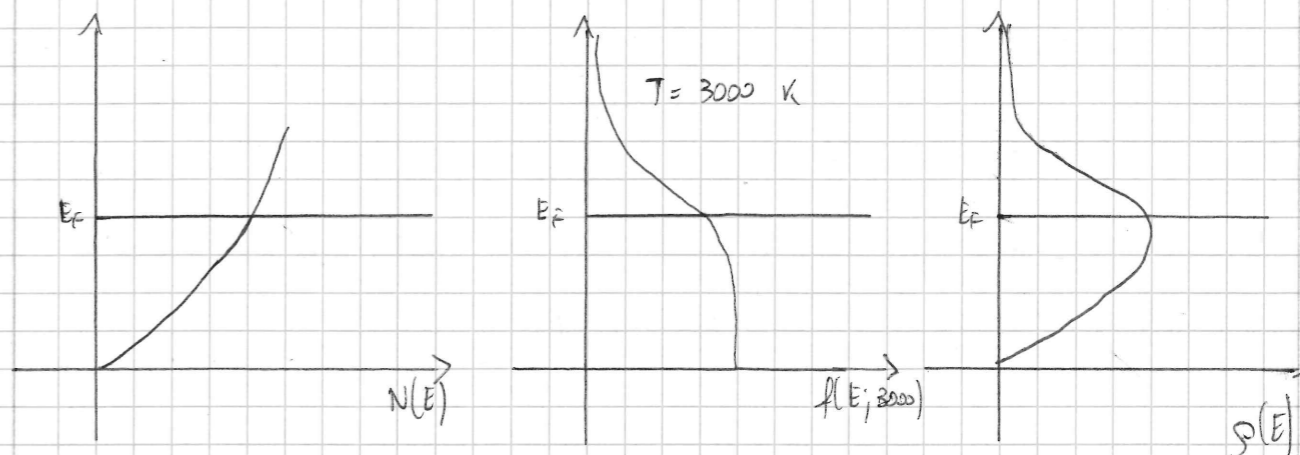
La funzione di densità degli stati occupati, g_m , sarà data dal prodotto delle altre due: funzione di densità degli stati e funzione di occupazione. Ciò è spiegabile così: dato il numero di sedie vuote ad un teatro (densità degli stati), e il numero di invitati (funzione di occupazione), il prodotto ci fornisce il "numero di sedie occupate" (intuitivamente).

$$g_m(E) = N(E) f(E; T)$$

In un metallo, occorrerà (graficamente) qualcosa di simile:



Questo allo zero assoluto; vediamo cosa, ad una temperatura maggiore, la $N(E)$ non cambia, ma $f(E; T)$ sì, e dunque $g_m(E)$:



Per una temperatura molto elevata, come sui 3000 K, la funzione di occupazione varia notevolmente, e così la $g_m(E)$.

Per $T \approx 300$ K, non si ha un'enorme variazione della $f(E; T)$ dalla situazione di 0 K. Nella maggior parte delle nostre considerazioni, ci troveremo proprio in questo stato termico.

L'integrale di $g_m(E)$ ci darà il numero di stati occupati, fino al determinato livello energetico che intendiamo studiare. Il numero di stati in tutto occupati, tenendo conto che $E_0 = 0$, sarà:

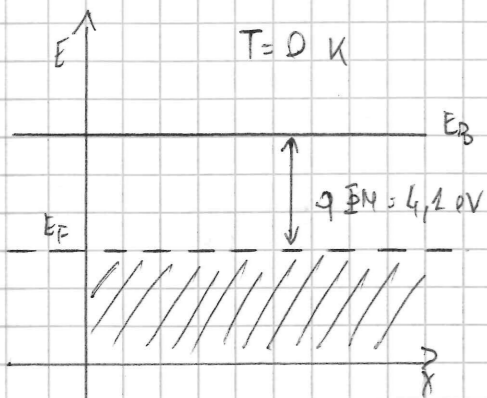
$$n = \int_0^{+\infty} g_m(E) dE = \int_0^{+\infty} N(E) f(E; T) dE$$

In un metallo, abbiamo circa 10^{22} elettroni per centimetro cubo.

Il già citato lavoro di estrazione si esprime in elettronvolt (eV): 1 eV è l'energia che un elettrone ha se sottoposto ad una differenza di potenziale di 1V. È una misura molto comoda, e per questo viene molto utilizzata.

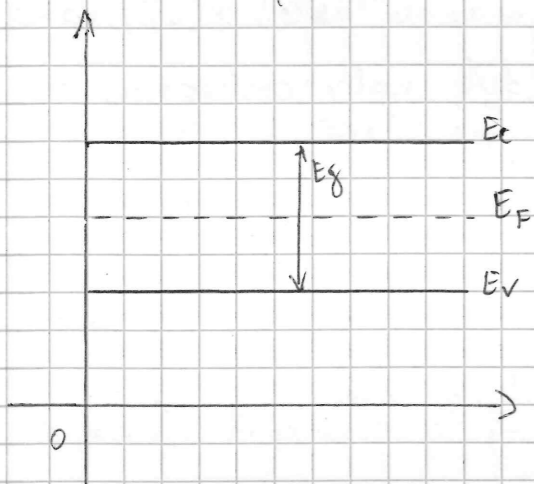
L'alluminio Al ha lavoro di estrazione $\phi_{Al} = 4,1$ eV; l'oro Au ha lavoro di estrazione $\phi_{Au} = 5,1$ eV.

Cosa si intende esattamente per lavoro di estrazione: vediamo graficamente:



Il lavoro di estrazione è il lavoro da attribuire all'elettrone in modo da fargli fare un salto di $4,1 \text{ eV}$ verso E_C da E_F .

Semiconduttori: il diagramma a bande di un semiconduttore è ben più articolato di quello di un metallo; vediamo un modello semplificato:



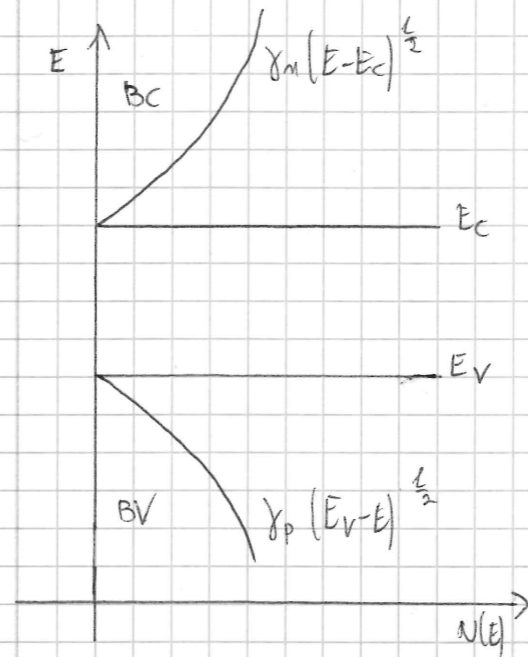
E_C = banda di conduzione
 E_F = livello di Fermi
 E_V = banda di valenza
 E_g = Energy gap (nel caso del silicio Si, $E_g = 1,12 \text{ eV}$)

Il livello di Fermi si trova a metà tra il livello E_V e quello E_C , poiché siamo in un semiconduttore intrinseco, puro, $E_{Fi} \approx \frac{E_C - E_V}{2}$.

(nello stato intrinseco, si aggiunge un pedice "i").

Ragioniamo meglio su ciò: E_F non può essere in banda di valenza, altrimenti avremmo in essa elettroni "liberi di andare", e idem non può essere in banda di conduzione, altrimenti avremmo già elettroni in tale banda, cosa non possibile in un semiconduttore intrinseco allo zero assoluto. A tale condizione, la banda di conduzione è vuota, o quella di valenza piena di elettroni.

Parliamo della densità di stati disponibili:



$$N_{BC}(E) = \gamma_n (E - E_C)^{\frac{1}{2}}$$

$$N_{BV}(E) = \gamma_p (E_V - E)^{\frac{1}{2}}$$

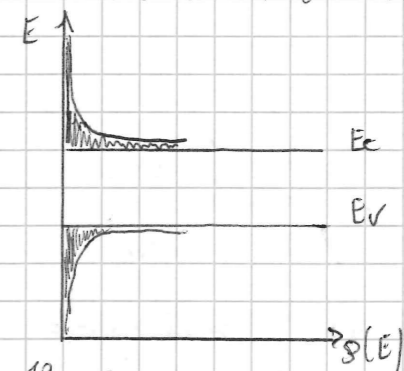
n = numero elettroni in banda di conduzione
 p = numero lacune in banda di valenza

$$g(E) = N(E) \cdot f(E; T)$$

Avremo però una $g_n(E)$ (densità degli elettroni in banda di conduzione), ed una $g_p(E)$ (densità delle lacune in banda di valenza).
 Qui, però, le due coincidono: in un semiconduttore intrinseco, gli elettroni in banda di conduzione sono uguali al numero di lacune in banda di valenza. Il numero di elettroni n_i (in semiconduttore intrinseco), in banda di conduzione, e di lacune in banda di valenza p_i , saranno:

$$n_i = \int_{E_C}^{+\infty} \gamma_n (E - E_C)^{\frac{1}{2}} f(E) dE$$

$$p_i = \int_{-\infty}^{E_V} \gamma_p (E_V - E)^{\frac{1}{2}} f(E) dE$$



Ma $n_i = p_i$.

Nel silicio, $n_i = p_i = 1,43 \cdot 10^{10}$ elettroni per centimetro cubo, a 300 K . La conduzione, dunque, è un evento molto raro.

Consideriamo ora due equazioni fondamentali, da usere spesso:

Dato un semiconduttore intrinseco,

$$n = n_i = \int_{E_c}^{+\infty} N_{Ec}(E) f(E) dE = N_{c,eff} e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}}$$

$$p = p_i = \int_{-\infty}^{E_v} N_{vV} f(E) dE = N_{v,eff} e^{-\frac{E_v - E_F}{kT}}$$

Dove N_{eff} si riferisce al termine "efficace":

$$N_{eff} = \frac{2(m^* \pi kT)^{3/2}}{h^3}$$

Le due formule fondamentali, si ricavano mediante approssimazione alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann, integrando.

Calcoliamo ora E_{Fi} : sfruttiamo ^{una} proprietà dei semiconduttori;

$$n_i = p_i = N_c e^{-\frac{E_c - E_{Fi}}{kT}} = N_v e^{-\frac{E_{Fi} - E_v}{kT}}$$

Sfruttiamo la proprietà di neutralità del semiconduttore intrinseco;

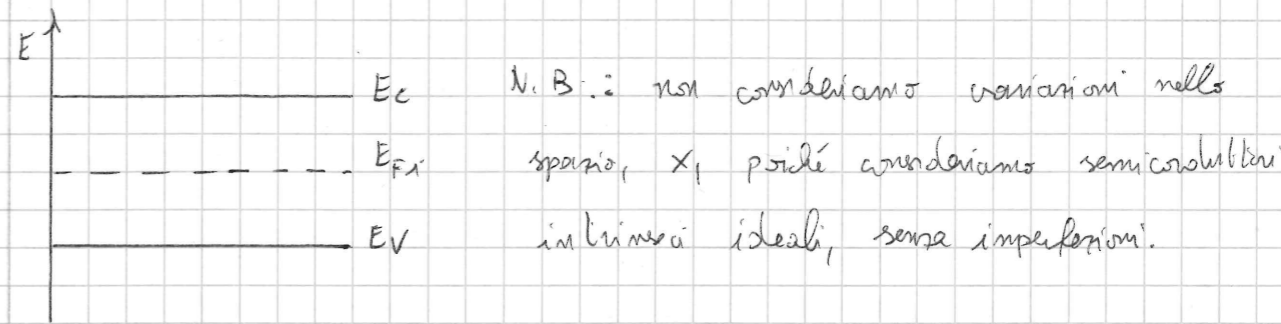
risolviamo tale equazione rispetto E_{Fi} :

$$e^{-\frac{E_c - E_{Fi}}{kT}} \cdot e^{\frac{E_{Fi} - E_v}{kT}} = \frac{N_v}{N_c} \quad ; \quad e^{\frac{2E_{Fi}}{kT}} \cdot e^{-\frac{E_v + E_c}{kT}} = \frac{N_v}{N_c} ;$$

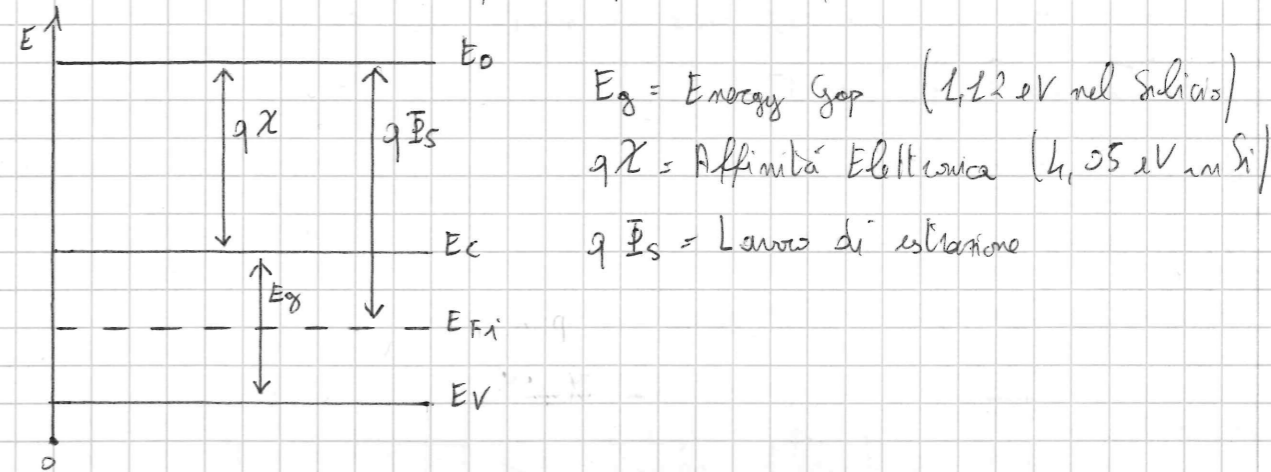
$$E_{Fi} = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{kT}{2} \ln \frac{N_v}{N_c}$$

Si noti che N_v ed N_c differiscono solo per la massa efficace di elettroni e lacune; possiamo dire che, in caso di semiconduttori intrinseci, il termine $\frac{kT}{2} \ln \frac{N_v}{N_c}$ corregge solo di pochi meV (al più una decina), il livello $\frac{E_c + E_v}{2} \approx E_{Fi}$.

Rappresentiamo ciò in un diagramma a bande:



Per noi, come vedremo in seguito, E_{Fi} sarà sempre un valore di riferimento, anche in caso di semiconduttori drogati; rappresentiamo ora un diagramma in forma più completa;



Abbiamo definito il lavoro di estrazione $q\Phi_s$, ma si noti che, a differenza di $q\Phi_H$, non ha un significato fisico: in E_{Fi} non abbiamo elettroni, dunque il lavoro sarà ben diverso da quello. Affinità elettronica ed energy gap sono valori che, in un semiconduttore, restano costanti, indipendentemente dai processi termologici che veniamo attuati sul substrato semiconduttivo.

Calcolo di n_i

Vogliamo ora calcolare n_i , ossia il numero di elettroni in banda di conduzione, in un semiconduttore intrinseco. Il resto dei portatori di carica sarà dato da due elementi, che ora analizziamo brevemente.

- G_{th} : generazione termica: la temperatura muove un certo numero di elettroni dalla banda di valenza alla banda di conduzione;
- R : ricombinazione: gli elettroni potranno tornare in banda di valenza, dopo un certo transitorio di tempo in banda di conduzione, e ricombinarsi con le lacune; è il fenomeno "antagonista" della G_{th} .

↗ I termini n_i , p_i , rappresentano il punto di equilibrio tra questi due fenomeni: G_{th} ed R .

Vogliamo cercare espressioni che ci permettano di studiare e calcolare n_i , o n più generalmente, oltre a ciò che già conosciamo;

riprendiamo le nostre due equazioni principali:

$$n_i = N_c e^{\frac{-E_c - E_{Fi}}{kT}}; \quad p_i = N_v e^{\frac{E_{Fi} - E_v}{kT}}$$

hanno stati soliti a usare come espressione (o condizione al contorno), la neutralità; studiamo qualcosa di nuovo, e moltiplichiamo

n_i e p_i :

$$n_i \cdot p_i = n_i^2 = N_c N_v e^{\frac{E_c - E_{Fi}}{kT}} \cdot e^{\frac{E_{Fi} - E_v}{kT}} = N_c N_v e^{\frac{E_v - E_c}{kT}}$$

$$n_i^2 = N_c N_v e^{\frac{-E_g}{kT}}$$

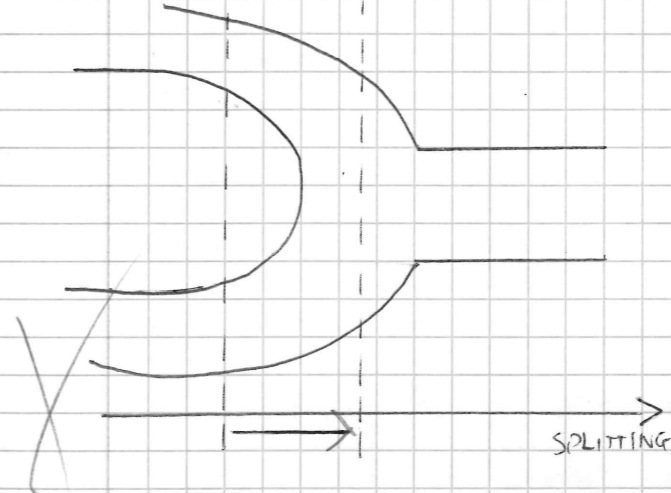
Vediamo alcune cose: sappiamo che N_c ed $N_v \propto T^{\frac{3}{2}}$; di conseguenza, la concentrazione dei portatori (in numero) varia più che esponenzialmente: oltre al contributo dell'esponenziale, c'è quello di N_c ed N_v appena citato.

E_g è una funzione della temperatura: aumentando T , E_g tende

a diminuire.

Non esistono equazioni deterministiche in grado di esprimere E_g in funzione di T , e non mediante processi statistici (di fitting); E_g risente molto di T , ma noi, come convenzione, considereremo sempre di trovarci a 300 K.

La variazione di E_g dipendente da T è causata dal fatto che la temperatura aumenta il passo reticolare medio della materia.



Aumentando il passo reticolare medio, si tende ad avere una riduzione del gap energetico: la retta rappresentante il passo reticolare medio, con l'aumentare di T , tende a spostarsi verso destra.

Nel silicio Si, il passo reticolare medio è di $4,5 \text{ \AA}$ (angstrom).

Caratterizzazione dei semiconduttori drogati

Definiamo " N_D " il numero, o, meglio, la concentrazione di drogante inserito nel semiconduttore (atomi/cm³).

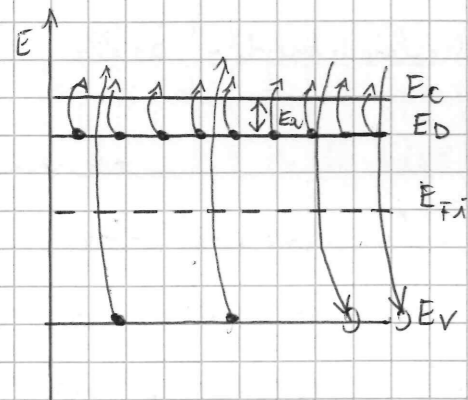
Nel silicio, i droganti tipo n (donatore) sono l'arsenico As, ed il fosforo P.

Drogare significa aggiungere "stati artificiali" nell'energy gap, introducendo "livelli donatori E_D " vicino ad E_c . Comunque, il drogaggio va da 10^{14} a 10^{20} atomi/cm³ introdotti. I livelli donatori E_D introdotti, in un primo tempo, ospiteranno gli

elettroni che poi usiamo per modificare le proprietà elettriche della materia.

Zolfo ed Arsenico sono ottimi perché la distanza degli E_D da essi introdotti da E_C è di 40 meV per As, e pochi meV in più per P.

Consideriamo E_A la distanza tra E_C ed E_D



Il diagramma a bande descriverà circa la situazione; ne disegneremo uno migliore ma certi dettagli non hanno bisogno (ora vediamo)

Nel semiconduttore drogato, le fenomenologie che produrranno la conducibilità saranno 3:

- la G_{th} (generazione termica)
- la R (ricombinazione)
- la ionizzazione: ad una temperatura $T=0$, possiamo considerare gli E_D come "gusci" contenenti elettroni; all'aumentare di T si apriranno sempre più gusci, che porteranno elettroni da E_D in banda di conduzione; in questo modo, gli E_D si ionizzeranno parzialmente perché perderanno ciascuno un elettrone.

Il salto per gli elettroni in E_D verso E_C sarà di pochi meV (a differenza di 1,12 eV da E_V a E_C)

Facciamo alcune osservazioni: la ionizzazione è un fenomeno che si aggiunge a G_{th} ed R , ma non ha un suo dual, un suo

antagonista: esistono motivazioni statistiche a ciò, ma anche spaziali; la temperatura a 300 K è una condizione in cui un buon drogaggio non può permettere che gli elettroni tornino nei loro "gusci"; la ragione spaziale, sta nella natura stessa dei "gusci", ossia degli E_D : gli E_D , quando svuotati, non creano lacune; il processo di ionizzazione realizza stati che non dispongono delle stesse proprietà di trasporto della banda di valenza.

Abbiamo finora parlato di un drogaggio tipo n, e di droganti N_D ; introduciamo il drogaggio tipo p: la concentrazione di droganti sarà N_A , per "accettori", e ci introduciamo livelli E_A , in prossimità della banda di valenza E_V . Avverrà anche qui un processo di ionizzazione, in questo senso: gli atomi per il drogaggio tipo p sono in grado di attirare a sé elettroni dalla banda di valenza, perché il gap tra E_A ed E_V sarà minimo. Gli elettroni che andranno in E_A , ionizzando negativamente, e dando vita a numeri N_A^- , libereranno lacune in banda di valenza, dando vita a fenomeni di trasporto. A parte ciò che è stato appena descritto, le fenomenologie sono analoghe al drogaggio tipo n.

Facciamo alcune note da ciò che abbiamo finora appreso:

- 1) Non tutti gli atomi sono in grado di drogare, ma solo certi, per certe caratteristiche (nel caso del Si, per tipo n essere pentavalenti, per tipo p trivalenti, e posizionare rispettivamente E_D ed E_A vicini a E_C ed E_V).

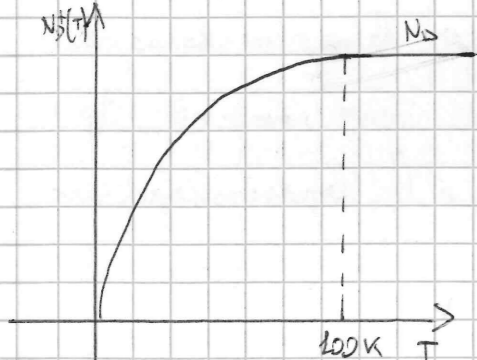
2) l'effetto del drogaggio è una notevole alterazione della posizione delle bande.

3) l'effetto del drogaggio non è puramente additivo: non siamo sicuri che, introducendo 10^{20} atomi di As, gli elettroni raddoppino (poiché il silicio già ne fornisce $1,45 \cdot 10^{10}$ per cm^3); siamo solo sicuri di un miglioramento non quantificabile, a causa di fenomeni intrinseci di ricombinazione.

Calcolo di n e p in un semiconduttore drogato

Per poter determinare parametri come la densità dei portatori (le concentrazioni) attive, n e p , dobbiamo innanzitutto cercare una condizione al contorno idonea per applicarvi le giuste equazioni.

Supponiamo di drogare tipo n , di avere N_D droganti, e di questi, N_D^+ ionizzati, ova "attivi", che han "liberato gli elettroni". N_D^+ sarà una funzione della temperatura T , e ora per, a nostro vantaggio, un andamento di questo tipo:



Per una temperatura $T \sim 80 \approx 100$ K, $N_D^+(T) \sim N_D$: da questa temperatura tutte le impurità droganti saranno ionizzate e dunque attive, doppiando, per $T > 100$ K, si instaurerà un regime di saturazione.

Poiché noi studiamo sistemi per $T \sim 300$ K, pol'è sempre sempre valida l'ipotesi di completa ionizzazione, ed $N_D^+ = N_D$. Il livello di Fermi E_F si alza dalla posizione iniziale E_{Fi} ; esso, come

vedremo, è una sorta di "baricentro dei livelli energetici"; prima di parlare di ciò, torniamo al nostro problema principale, oia lo studio delle concentrazioni n e p .

3) Iniziamo ora di conoscere E_F (non E_{Fi}): consideriamo n il numero di elettroni in banda di conduzione nel drogaggio tipo n (indicato dal pedice "n").

$$n_n = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}}$$

$$p_n = N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{kT}}$$

E_F = livello di Fermi considerando il drogaggio

3) Facciamo, come prima, il prodotto delle due equazioni, membro a membro:

$$n_n p_n = N_c N_v e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}} e^{-\frac{E_F - E_v}{kT}} = N_c N_v e^{-\frac{E_g}{kT}} = n_i^2$$

Abbiamo fatto una scoperta clamorosa: qualsiasi siano le concentrazioni di portatori di carica nelle bande, il loro prodotto è una costante, ed è uguale al quadrato degli elettroni in banda di conduzione in un semiconduttore intrinseco (= alla lacuna in banda di valenza).

$n_n p_n = n_i^2$

 Legge dell'azione di massa

Ciò ci fa rendere conto di un problema gravissimo: tecnologicamente, non è possibile crescere una delle due concentrazioni senza andare a scapito dell'altra: le due concentrazioni non possono crescere di pari passo, perché il loro prodotto è costante.

Consideriamo ora un'altra cosa: la carica totale nel semiconduttore, è nulla: ogni lacuna in banda di valenza ha un elettrone in banda di conduzione corrispondente, ed ogni elettrone derivante dal drogaggio ha un livello (elettrone in drogaggio p, o lacuna in drogaggio n) ionizzato. Possiamo applicare dunque, globalmente, la condizione di neutralità:

$$p_n + N_D^+ - n_n = 0 \implies p_n + N_D^+ - n_n = 0$$

Dalla legge dell'azione di massa, possiamo dire che

$$p_n = \frac{n_i^2}{n_n} \implies \frac{n_i^2}{n_n} + N_D^+ - n_n = 0 ;$$

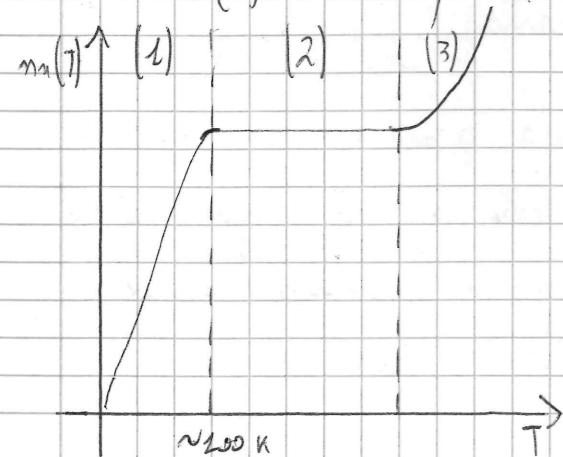
$$n_n^2 - N_D^+ n_n - n_i^2 = 0$$

Abbiamo un'equazione di secondo grado in n_n ; usiamola e prendiamone solo la radice positiva:

$$n_n = \frac{N_D^+}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_D^+}{2}\right)^2 + n_i^2} \implies \text{Forniamo ora una dipendenza da } T:$$

$$n_n(T) = \frac{N_D^+(T)}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2n_i(T)}{N_D^+(T)}\right)^2} + 1 \right]$$

Ma $n_i(T)$ è noto; di $N_D^+(T)$ conosciamo l'andamento; vediamo:



Abbiamo tre regioni, associate a tre regimi:

- 1) Regime di congelamento
- 2) Regime estrinseco
- 3) Regime intrinseco

1) Per $T \approx 100$ K, si stava attivando la ionizzazione dei droganti, e vi è bassa g_{th} a causa della scarsa energia termica

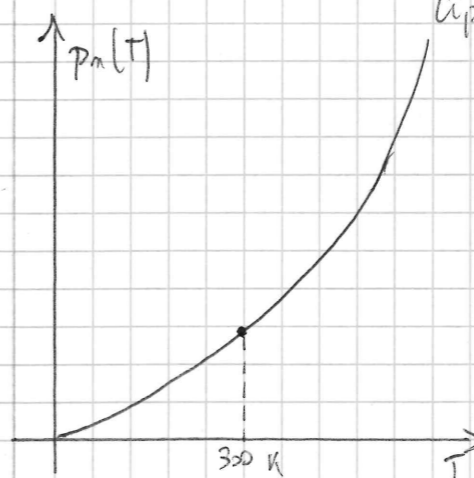
2) Per $T \geq 100$ K, $N_D^+ = N_D$, abbiamo completa ionizzazione, ed abbiamo un regime di saturazione, in cui $n_n \approx N_D$; prevalgono dunque le interazioni di tipo elettrostatico su tutte le altre; questo è il regime che noi tendenzialmente useremo.

3) Per temperature alte, le interazioni fononiche prevalgono su quelle elettrostatiche, e così l'effetto del drogaggio tende a perdersi, per farsi prendere il posto dagli elettroni intrinseci del materiale: $n_n \approx n_i(T)$. Il fatto che nel germanio fosse molto facile (cioè per T basse) instancare questo regime, ne ha determinato la morte. Il germanio ha E_g piccolo, e dunque n_i cresce molto più rapidamente.

ci chiediamo ora quale sia l'andamento della funzione $p_n(T)$, ossia delle lacune in banda di valenza in un semiconduttore drogato tipo n.

$$p_n(T) = \frac{n_i^2(T)}{n_n(T)}$$

Noi conosciamo l'andamento sia di $n_i(T)$ che di $n_n(T)$: l'andamento sarà di questo tipo:



3 portatori minoritari non hanno una zona di saturazione; la nostra concentrazione varierà in modo puramente intrinseco. Alcuni dispositivi sono proprio limitati dai minoritari, come vedremo.

Se un drogaggio tipo p, la situazione è del tutto analoga:

$$\begin{cases} p_p \cdot n_p = n_i^2 \\ q(p_p - n_p - N_A^-) = 0 \end{cases} \quad ; \quad n_p = \frac{n_i^2}{p_p} \quad ; \quad p_p^2 - N_A^- p_p - n_i^2 = 0 \quad ;$$

$$p_p(T) = \frac{N_A^-(T)}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{2n_i(T)}{N_A^-(T)} \right)^2} + 1 \right]$$

L'andamento è dunque del tutto analogo a prima, ed anche per n_p .

Facciamoci ora una domanda: cosa capita se drogo sia tipo p che tipo n? Supponiamo di essere tecnologicamente in grado di avere tanta N_D quanto N_A ; applicando la neutralità globale e la legge dell'azione di massa,

$$\begin{cases} p \cdot n = n_i^2 \\ q(p - n + N_D^+ - N_A^-) = 0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} N_D^+ = N_A^- \\ p - n = 0 \end{cases} \Rightarrow p = n = n_i$$

L'effetto di N_D compensa quello di N_A (e viceversa); per $N_D = N_A$, il semiconduttore torna ad essere intrinseco; basandoci su ciò, possiamo

pensare ad un meccanismo di compensazione del drogante: studiamo,

oltre a $N_D = N_A$, le altre due casistiche:

1) $N_D > N_A$: i donatori prevalgono sugli accettori, e con il drogante

tipo donatore in totale sarà N_D^+ :

$$N_D^+ = N_D^+ - N_A^-$$

2) $N_D < N_A$: come prima, senza però drogaggio tipo p, con drogante

$$N_A^- = N_A^- - N_D^+$$

Un esempio pratico che vedremo in seguito è il transistor bipolare: dato un semiconduttore drogato n pesantemente, possiamo aprire delle "finestre" di tipo p, ottenendo qualcosa di questo tipo:

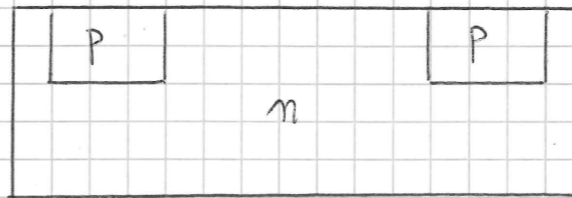
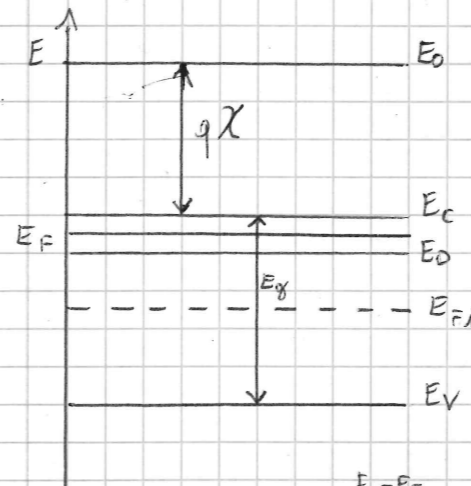


Diagramma a bande di un semiconduttore drogato tipo n



La simbologia è la solita; possiamo considerare l'ipotesi di completa ionizzazione, e quindi partendo da qui fare le nostre considerazioni;

$$n_n \approx N_D = N_C e^{-\frac{E_C - E_F}{kT}} \quad ; \quad E_C - E_F = kT \ln \frac{N_C}{N_D}$$

Possiamo dunque calcolare $E_C - E_F$, e da qui il lavoro di estrazione:

zione:

$$q \Phi_{sn} = E_C - E_F + qX = qX + kT \ln \frac{N_C}{N_D}$$

A seconda del drogaggio, il lavoro di estrazione varia da 4,62 a 4,05

eV.

Calcolare E_F così però non è ottimale: col drogaggio tipo p daremmo

refere il diagramma a bande, rifare le nostre considerazioni da capo, e

trovare cose da bi scomodi, come $E_C > E_V$. Una sarebbe:

$$q \Phi_{sp} = qX + E_g - kT \ln \frac{N_V}{N_A}$$

Facciamo qualcosa di diverso: cerchiamo un metodo "globale" per il calcolo del livello di Fermi E_F , sia in semiconduttori tipo n che tipo p (drogati).

Consideriamo (e numeriamo, per facilità) alcune equazioni:

$$1) n = N_c e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}} ; 2) p = N_v e^{-\frac{E_F - E_v}{kT}}$$

Consideriamo ora in un semiconduttore intrinseco:

$$3) n_i = N_c e^{-\frac{E_c - E_{Fi}}{kT}} ; 4) p_i = N_v e^{-\frac{E_{Fi} - E_v}{kT}}$$

Ricaviamo, da 3) e 4), N_c ed N_v rispettivamente:

$$5) N_c = n_i e^{\frac{E_c - E_{Fi}}{kT}} ; 6) N_v = p_i e^{\frac{E_{Fi} - E_v}{kT}} = n_i e^{\frac{E_{Fi} + E_v}{kT}}$$

Sostituiamo 5) in 1) e 6) in 2), per vedere ciò:

$$n = n_i e^{\frac{E_c - E_{Fi}}{kT}} \cdot e^{-\frac{E_c - E_F}{kT}}$$

$$p = n_i e^{\frac{E_{Fi} - E_v}{kT}} \cdot e^{-\frac{E_F - E_v}{kT}}$$

Da qui si ricavano le importantissime Equazioni di Shockley:

$n = n_i e^{\frac{E_F - E_{Fi}}{kT}}$	EQUAZIONI DI SHOCKLEY
$p = n_i e^{\frac{E_{Fi} - E_F}{kT}}$	

Sono particolarmente interessanti in quanto N_c ed N_v non si sono più, ma solo $n_i = 1,45 \cdot 10^{10}$ atomi/cm³ (elettroni). Le due equazioni, inoltre, si riferiscono allo stesso livello energetico, come E_{Fi} .

Possiamo calcolare molto facilmente il livello di Fermi:

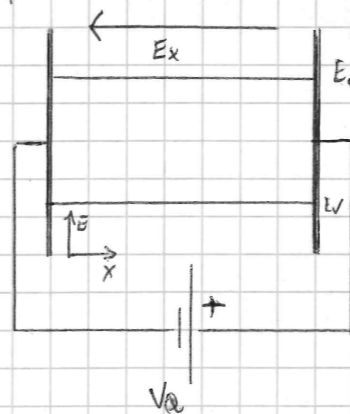
$E_F - E_{Fi} = kT \ln \frac{N_D}{n_i}$
$E_{Fi} - E_F = kT \ln \frac{N_A}{n_i}$

Possiamo considerare ultimata questa prima trattazione di ciò che accade in un semiconduttore.

Modello matematico delle correnti nei semiconduttori

In un metallo, gli elettroni sono tutti in bande di conduzione, in movimento. Essi possono solo essere trasformati da un campo elettrico E , che provoca una corrente di drift.

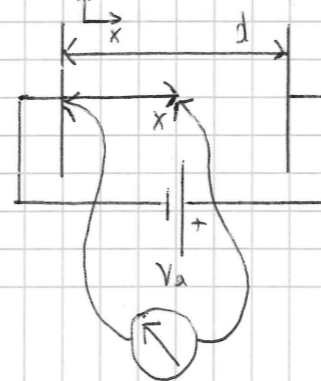
In un semiconduttore, all'equilibrio termodinamico, le correnti sono nulle. Consideriamo un disegno molto poco significativo, qualitativamente parlando, ma che può farci rendere bene alcune idee:



I contatti sono metallici, collegati ad una batteria che fornisce tensione V_a . Avremo un campo elettrico $E_x = E$.

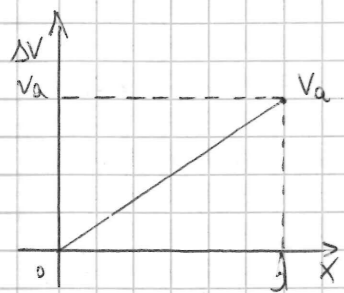
Ci chiediamo che effetto faccia la tensione V_a .

Prendiamo un voltmetro con due puntali ed un condensatore:



Misuriamo la $\Delta V(x)$: mettiamo a terra il puntale sinistro, e con il destro ci muoviamo nel condensatore, misurando ΔV .

La tensione avrà, al variare di x , un andamento:



Costruiamo ora il diagramma dell'energia potenziale di 1 elettrone, ora il suo diagramma a bande. Vediamo come varia la sua energia, muovendosi nel condensatore.

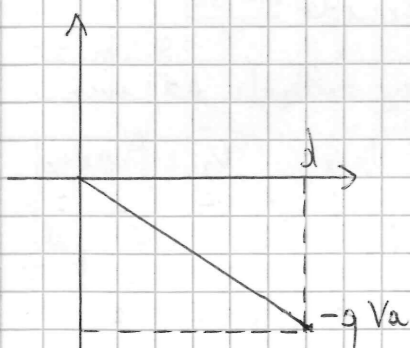
$$E = -\frac{V_a}{d}; \quad F = -q \cdot E = -q \left(-\frac{V_a}{d} \right)$$

L'energia potenziale rispetto a x , $U(x)$, da 0 a x , sarà uguale a:

$$U(x) = U(0) - \int_0^x F dx = U(0) - \int_0^x q \frac{V_a}{d} dx$$

Poiché $U(0) = 0$ perché mettiamo a massa,

$$U(x) = -\frac{qV_a}{d} \cdot x$$

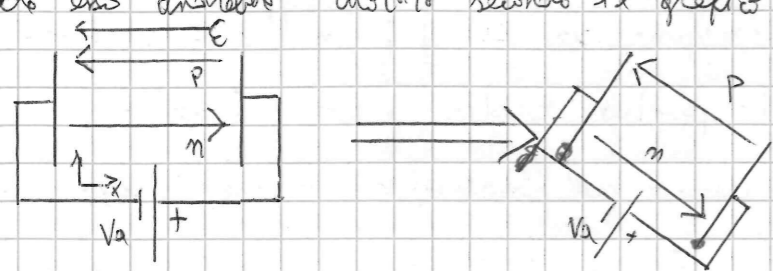


Misurando l'energia in eV, il grafico coincide con il simmetrico, rispetto all'asse delle ascisse, del grafico della tensione.

Esiste dunque un legame tra tensione ed energie potenziali.

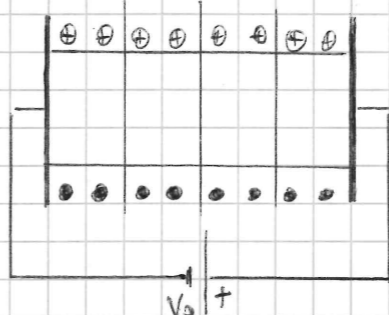
Applicando una tensione al nostro "diagramma invertito", vediamo

lo suo analogo "invertito" secondo il grafico dell'energia potenziale:



Questo diagramma "inclinato" rappresenta il punto di vista degli elettroni: il campo elettrico provocato dalla tensione V_a fa spostare verso il basso (in senso ad esso opposto) gli elettroni, e verso l'alto (in verso ad esso opposto) le lacune. Possiamo immaginare le lacune come bollicine di aria che vanno verso l'alto, e gli elettroni come goccioline che vanno verso il basso.

Continuiamo a considerare drogati uniformemente i semiconduttori che studiamo; parlando di correnti, perfezioniamo il disegno di prima:



Essendo drogato in modo uniforme, il semiconduttore, se diviso in fette, presenterà (se tipo n) tanti ioni positivi quanti elettroni liberi, anche in ogni singola fetta.

Questo tipo di sistema risulta essere globalmente neutro, ma anche localmente neutro; applicare un campo elettrico non modifica le condizioni di neutralità né globali né locali, e quindi V_a non cambia la concentrazione degli elettroni in banda di conduzione. Possiamo pensare che ΔV (V_a) sposti gli elettroni verso la lamina di metallo (destra, in questa rappresentazione), ma che ne vengono "prelevati" al contempo altri dall'altra piastra (quella a sinistra). Per le lacune, concettualmente capita qualcosa di questo genere: un elettrone, assorbito dal contatto metallico, lascia un "buco", che sarà una nuova lacuna; d'altra parte, le lacune nell'altra piastra (in prossimità di essa) si ricombineranno con gli elettroni emessi

(dalla piastra a sinistra); possiamo spiegare intuitivamente con il trasporto di carica.

Ordiniamo di formalizzare dicendo cos'è una corrente: una densità di corrente J è un flusso di carica, di elettroni:

$$J_- = \Phi_{x,e^-} \cdot (-q) \quad [\text{elettroni in banda di conduzione}]$$

Ogni carica avrà valore $-q$, ma vi saranno anche le lacune:

$$J_+ = \Phi_{x,p^+} \cdot (+q)$$

Da cui:

$$J = \Phi_{x,e^-} \cdot (-q) + \Phi_{x,p^+} \cdot (+q)$$

Questo nei semiconduttori, dove abbiamo due tipi di portatori di carica.

Cos'è un flusso? Il concetto di flusso è semplicemente il prodotto di una densità per una velocità; considerando per ora un moto di drift (trasinamento), avremo che i due flussi saranno:

$$\begin{cases} \Phi_{x,e^-} = n \cdot v_{d,e^-} \\ \Phi_{x,p^+} = p \cdot v_{d,p^+} \end{cases}$$

Sostituendo in J :

$$J = -q \cdot n \cdot v_{d,e^-} + q \cdot p \cdot v_{d,p^+}$$

Continuiamo a parlare di v_d , ma di fatto noi la consideriamo: essa è una velocità non reale, ma media dell'intera popolazione; si tratta di un parametro fittizio, descrivente la velocità media che un elettrone acquisisce "tra un urto ed un altro".

Definiamo una nuova relazione:

$$v_{d,e^-} = -\mu_n E \quad \mu = \text{mobilità dei portatori}$$

$$v_{d,p^+} = \mu_p E \quad E = \text{campo elettrico}$$

$$\mu_n = \frac{q \tau}{m_n^*} \quad ; \quad \mu_p = \frac{q \tau}{m_p^*}$$

$$\mu_n = \frac{q \tau}{m_n^*} \approx \frac{q \lambda}{m_n^* N_{th}}$$

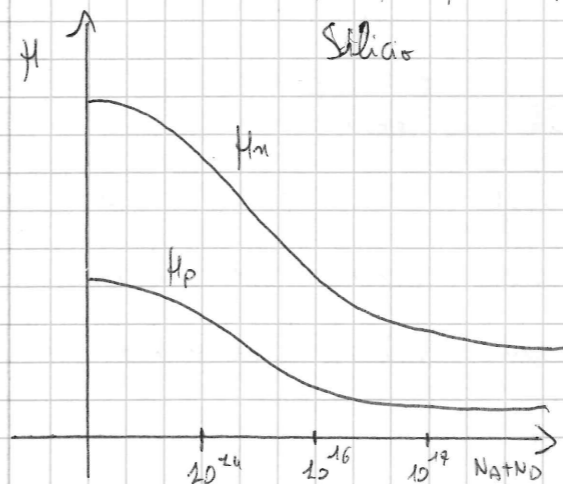
λ ha una forte dipendenza dalla qualità del reticolo.

Riassumendo, la mobilità degli elettroni è maggiore di quella delle lacune, a parità di condizioni, poiché $m_n^* < m_p^*$

La mobilità risente di alcune caratteristiche:

- Maggiore sarà la temperatura, maggiore sarà l'interazione fononica coi nuclei, e minore sarà la mobilità.
- Maggiore sarà il numero di imperfezioni del reticolo, minore sarà la mobilità dei portatori.
- Maggiore sarà il drogaggio, e dunque le concentrazioni ($N_A + N_D$), minore sarà la mobilità dei portatori di carica.

In via grafica, μ_p e μ_n decadono in questo modo:



La compensazione dei droganti, tende a deprimere violentemente la mobilità dei portatori.

μ sarà funzione di N_A, N_D e T .

Vediamo alcune equazioni:

$$J_{n, drift} = (-q) \cdot n \cdot (-\mu_n) \cdot E$$

$$J_{p, drift} = q \cdot p \cdot \mu_p \cdot E$$

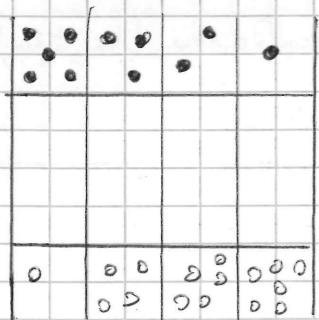
La densità di corrente di drift totale sarà:

$$J_{tot, drift} = (q \cdot \mu_n \cdot n + q \cdot \mu_p \cdot p) E = \sigma \cdot E$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = q \cdot \mu_n \cdot n + q \cdot \mu_p \cdot p$$

In un metallo, la conducibilità è solo affidata agli elettroni; in un semiconduttore, bisogna quantomeno considerare anche le lacune in banda di valenza.

È possibile che, a causa di fenomeni o motivi elettrici/tecnologici, si abbia una concentrazione degli elettroni in banda di conduzione non uniforme:



In questo caso, senonché, vediamo che non abbiamo più valida la condizione di neutralità locale della carica.

In una situazione come questa (possibile come vedremo in un semiconduttore), è possibile una diffusione degli elettroni, causata dal gradiente della concentrazione. Gli elettroni tendono ad uniformarsi, e dunque ad occupare le sezioni del semiconduttore con meno elettroni.

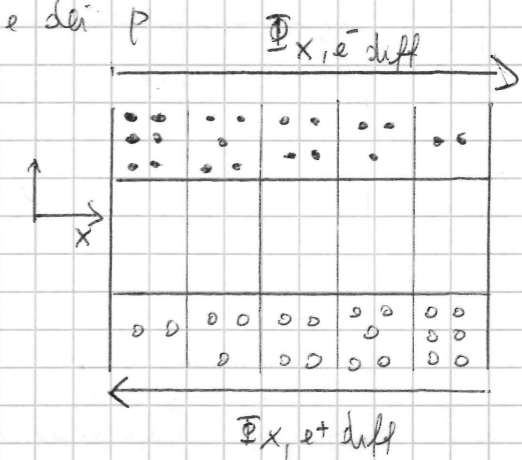
Possiamo dire dello case: un gradiente della concentrazione provoca una diffusione degli elettroni, ma quindi un flusso di elettroni. D'altra parte, si dovrà essere anche un flusso di lacune, che tendono anch'esse a uniformarsi.

Vi dovrà essere due flussi di portatori, dunque, non dovuti ad un campo elettrico E , ma ad un gradiente di concentrazione.

Dovremo considerare dunque due nuove correnti: quella dovuta alla diffusione degli n e dei p .

$$J_{n, diff} = -q \cdot \Phi_{x, e^- diff}$$

$$J_{p, diff} = q \cdot \Phi_{x, e^+ diff}$$



Possiamo capire che:

$$\Phi_{x, e^- diff} = -D_n \frac{dn}{dx}$$

$$\Phi_{x, e^+ diff} = -D_p \frac{dp}{dx}$$

D_n/D_p sono i coefficienti di diffusione rispettivamente di elettroni in banda di conduzione o di lacune in banda di valenza.

Possiamo considerare questo moto come quello di un gas; il gradiente della concentrazione di elettroni è negativo (secondo il nostro sistema di riferimento), ma quindi il flusso positivo.

In un metallo, questa situazione non si può realizzare, per la natura stessa del metallo; in un semiconduttore, sì.

Esprimiamo tutto ciò con un certo formalismo:

$$J_{n,diff} = +q D_n \frac{\delta n}{\delta x}$$

$$J_{diff} = J_{n,diff} + J_{p,diff}$$

$$J_{p,diff} = -q D_p \frac{\delta p}{\delta x}$$

Se ricorriamo da qualche sistema D_n e D_p , troviamo le cosiddette "relazioni di Einstein":

$D_n = \frac{kT}{q} \mu_n$	$\frac{kT}{q}$ è detto "equivalente in termini della temperatura"; $\frac{kT}{q} \Big _{@300K} \approx 26 \text{ mV}$
$D_p = \frac{kT}{q} \mu_p$	

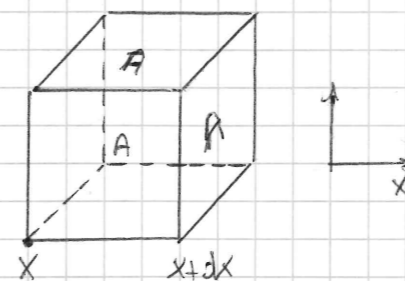
$$V_T = \frac{kT}{q}$$

Abbiamo dunque trovato i primi due "pezzi" del nostro modello matematico: le relazioni di Einstein, e le equazioni del trasporto

$J_n = q \mu_n n E + q D_n \frac{\delta n}{\delta x}$
$J_p = q \mu_p p E - q D_p \frac{\delta p}{\delta x}$

Proseguiamo il nostro modello, introducendo un tassello fondamentale: l'equazione di continuità

Equazione di continuità



Dato un cubo di lato dx , e sezione A , vogliamo quantificare la carica contenuta.
Al livello x entra una carica, e vogliamo capire che capita in $x+dx$

Formalizziamo:

$$\frac{\delta n}{\delta t} \cdot A dx = \frac{J_n(x) \cdot A}{-q}$$

Vediamo meglio: la variazione del numero di elettroni nel tempo, nel volume, è uguale alla densità di carica divisa alla carica fondamentale, ossia al flusso di carica.

In realtà, dovremo anche considerare, nella transizione nel cubo, altri fenomeni: potremo avere, nel cubo, fenomeni di G_{th} e/o di ricombinazione. Possiamo dunque dire che

$$\frac{\delta n}{\delta t} A dx = \frac{J_n(x) \cdot A}{-q} - \frac{J_n(x+dx) \cdot A}{-q} + (G_{th} - R) A \cdot dx$$

Sviluppando in serie, $J_n(x+dx)$:

$$J_n(x+dx) \approx J_n(x) + \frac{\delta J_n(x)}{\delta x} dx$$

Da ciò:

$$\frac{\delta n}{\delta t} A dx = \frac{J_n(x) \cdot A}{-q} - \frac{J_n(x) \cdot A}{-q} - \frac{\delta J_n}{\delta x} \cdot \frac{1}{-q} \cdot A dx + (G_{th} - R) A dx$$

$$\Rightarrow \frac{\delta n}{\delta t} = \frac{\delta J_n}{\delta x} \cdot \frac{L}{q} + (G_{th} - R)$$

Si è soliti definire il "tasso medio di ricombinazione" di elettroni U_n :

$$U_n = R - G_{th}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta n}{\delta t} = \frac{\delta J_n}{\delta x} \cdot \frac{L}{q} - U_n$$

Possiamo ora ricavare analogamente l'equazione di continuità per le lacune: partendo dalla "solita"

$$\frac{\delta p}{\delta t} A dx = \frac{J_p(x) \cdot A}{q} - \frac{J_p(x+dx) \cdot A}{q} + (G_{th} - R) \cdot A dx =$$

Sviluppando in polinomio

$$\frac{\delta p}{\delta t} A dx = \frac{J_p(x) \cdot A}{q} - \frac{J_p(x) \cdot A}{q} - \frac{L}{q} \frac{\delta J_p}{\delta x} A dx + (G_{th} - R) A dx =$$

$$\Rightarrow \frac{\delta p}{\delta t} = - \frac{L}{q} \frac{\delta J_p}{\delta x} - U_p$$

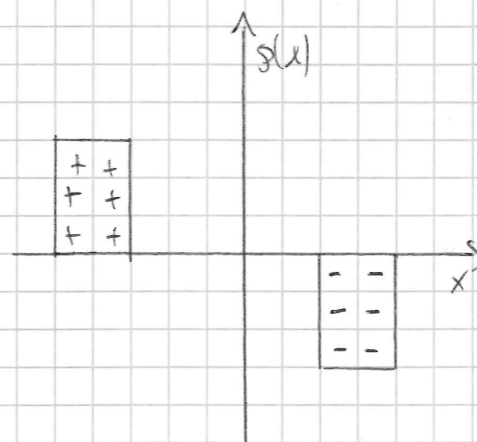
Il nostro modello matematico è ancora coerente: non è possibile riferirci ai termini precisi di quest'equazione, perché conosciamo ancora molto poco.

L'idea è: prese le due equazioni di continuità, possiamo sostituire all'interno le equazioni di trasporto; le soluzioni di queste nuove equazioni saranno le due densità di portatori, $n(x,t)$ e $p(x,t)$; come integranda appare anche però E , il campo elettrico, ed il termine

di ricombinazione.

Supponiamo di avere, rispetto ad una condizione di equilibrio, uno "spostamento di carica", che può instaurare gradienti di concentrazione, e dunque, diffusione mediante il generarsi di flussi di portatori.

Dovremo dunque considerare anche questo moto di carica, all'interno del nostro modello matematico.



Supponiamo di avere degli eccessi locali di carica; il sistema è globalmente neutro, ma non localmente. A causa degli eccessi di carica, si formano campi elettrici nella zona compresa tra i due eccessi, non trascurabili.

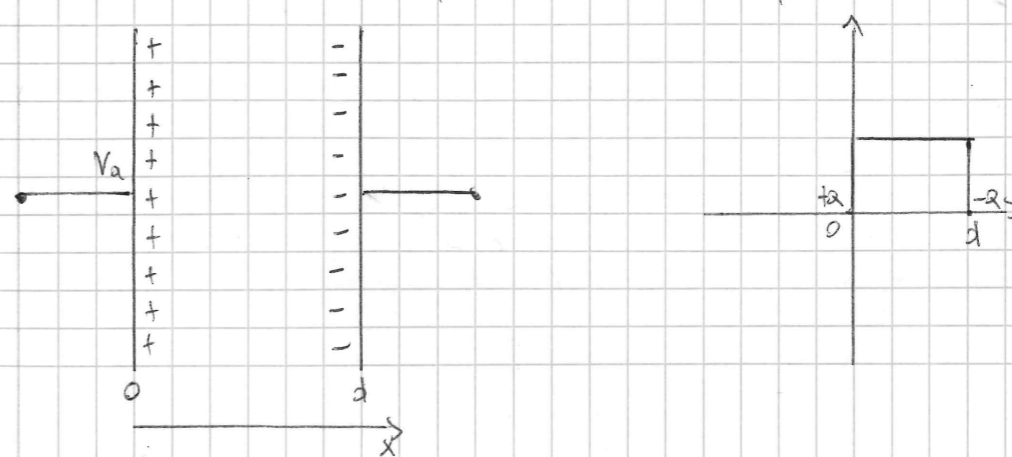
La $s(x)$ nei semiconduttori avrà forma del tipo:

$$s(x) = +q (p(x,t) - n(x,t) + N_D^+(x) - N_A^-(x))$$

Data la distribuzione delle cariche, ci interessiamo del campo E .

Legame carica - campo elettrico

Dato un modello semplificato di condensatore ad armature piane senza effetti di bordo, applicatarci $\Delta V = V_a$, vediamo:



$E(x)$ fuori dal condensatore è nullo; vediamo in breve come ricavarlo:

$$E(x) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \Phi \text{ potenziale}$$

$$\Phi(x) = -\int_0^x E(x) dx \iff \Phi(x) = \Phi(0) - \int_0^x E_1 dx$$

$\Phi(0)$ è a massa, quindi $\Phi(0) = 0$ per convenzione.

$$\Phi(x) = -E_1 \cdot x$$

$$E_1 = -\frac{V_a}{d}$$

Ma $Q = C \cdot V_a$, e $C = \frac{\epsilon_0}{d}$

$$V_a = \frac{Q}{C}, \quad V_a = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot d}, \quad -E_1 \cdot d = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot d}$$

$$E_1 = -\frac{Q}{\epsilon_0}$$

Abbiamo trovato, in questo particolare caso, un'espressione del campo E_1 . Vogliamo però qualcosa di più generale, per poter definire al meglio i nostri modelli.

Una generalizzazione dell'esperienza vista "legge di Gauss", è la seguente

Equazione di Poisson:

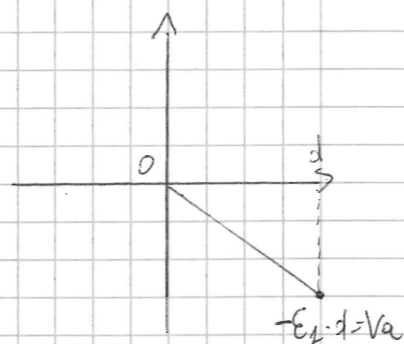
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_s}$$

ϵ_s = Costante dielettrica del semiconduttore; E sarà il campo elettrico.

Poiché $E = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, mediante l'equazione di Poisson possiamo dire

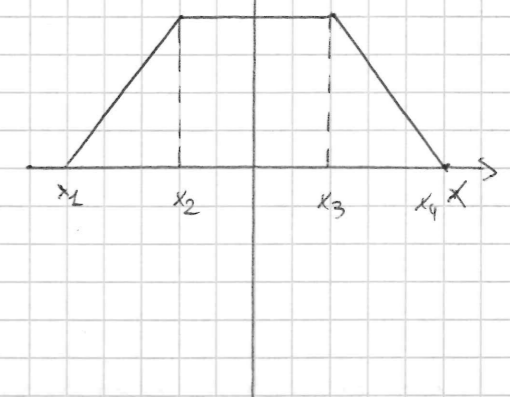
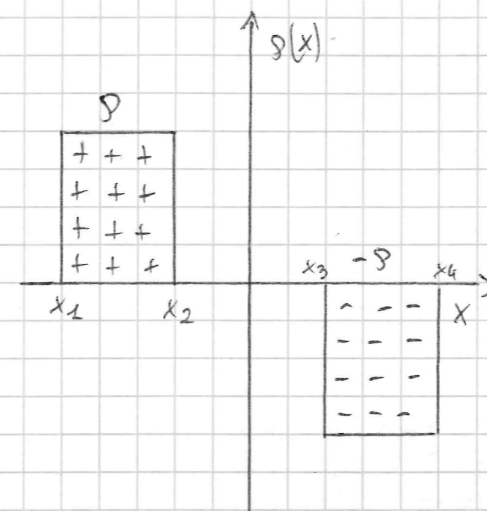
che:

$$E(x) = \int \frac{\rho(x)}{\epsilon_s} dx$$



Consideriamo un esempio pratico, per capire la profonda utilità dell'equazione:

$$E(x) = \int \frac{\rho(x)}{\epsilon_s} dx = \frac{\rho(x)}{\epsilon_s} x$$



Da $-\infty$ a x_1 il campo è costantemente nullo; addentrandosi nella densità di carica, il campo crescerà, fino ad arrivare; resterà costante da x_2 a x_3 , dovendo la densità di carica negativa ridurre il campo. Questo è lo studio dell'integrale di $\frac{\rho(x)}{\epsilon_s}$.

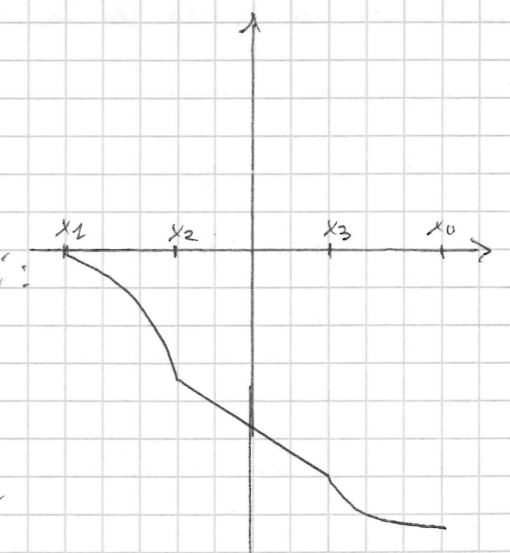
Integrando $E(x)$, vediamo che

$$\Phi(x) = -\int E(x) dx \quad (\Phi(x_1) = 0)$$

$E(x) \geq 0 \forall x$; l'integrale cambiato di segno sarà negativo, e sarà così:

da x_1 a x_2 , integreremo una quantità lineare, che diverrà parabolica (idem da x_3 a x_4); da x_2 a x_3 , integreremo una funzione lineare, o meglio costantemente lineare, che diverrà lineare con una pendenza.

L'equazione di Poisson avrà un posto d'onore nel modello matematico, poiché ci fornirà le informazioni sul campo e sul potenziale.



Considerazioni su semiconduttori fuori equilibrio

Aggiorniamo la nostra simbologia: quando tratteremo quantità all'equilibrio termodinamico, useremo il pedice aggiuntivo 0

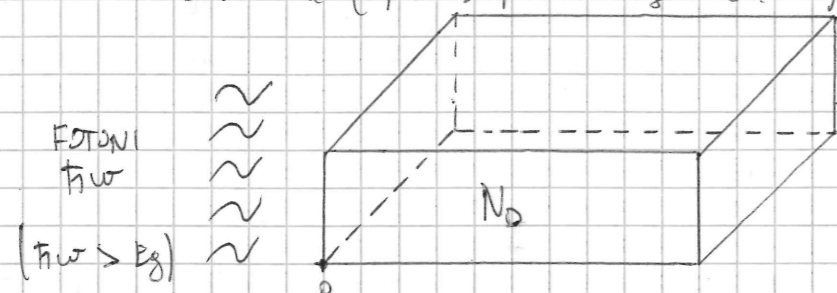
Esempi: n_{i0} ; n_{p0} ; n_{n0} ; p_{i0} ; p_{p0} ; p_{n0}

In casi di non-equilibrio, useremo i soliti simboli più generali:

Esempi: n_i ; n_p ; n_n ; p_i ; p_p ; p_n .

Come possiamo creare un esempio di situazione di non-equilibrio?

Prendiamo il nostro semiconduttore (per esempio drogato con N_D)



Irradiamo una sola "faccia" del nostro semiconduttore con fotoni $h\nu$; supponendo che la loro energia sia maggiore del gap, genereremo diverse coppie elettrone-lacuna: sbilanceremo la parte in prossimità

di 0, $n_n(0)$ ed $p_p(0)$ rispetto ai valori di equilibrio n_{n0} ed n_{p0} .

Questo tipo di processi si dicono "generazione ottica G_{opt} ", per ora considerala parametro addizionale.

Supponendo di avere $N_D = 10^{20}$, $n_{n0} = N_D$, $p_{n0} = 10^4$, mettiamo che $h\nu$ generi 10^{23} coppie; allora, $n_n \approx n_{n0} = 10^{20}$; $p_n = 10^4 + 10^{23} = 10^{23}$.

I portatori maggioritari non vengono alterati, quelli minoritari sì.

Questo tipo di fenomeno è detto "basso livello di iniezione".

Se abbiamo una $G_{opt} = 10^{23}$, sia i maggioritari che i minoritari vengono alterati, e così si ha un "alto livello di iniezione".

Coordiniamo ora di completare il nostro modello matematico, introducendo un modello del tasso netto di ricombinazione: supponiamo prima di iniezione, di avere un semiconduttore all'equilibrio, e dunque $n_n = n_{n0}$, $p_n = p_{n0}$; in questo caso, la generazione termica eguaglia la ricombinazione: per ogni generazione termica vi è la ricombinazione antagonista, che non permette la variazione della situazione.

Possiamo immaginare che questo sia un caso limite del nostro modello: vi dovrebbe essere un coefficiente d di proporzionalità che permette di regolare la ricombinazione in questo modo:

$$R = d n_n p_n$$

Se cresciamo uno dei due portatori, tende anche a crescere il fenomeno di ricombinazione. Prendiamo questa proporzionalità come un postulato.

Averemo detto che, all'equilibrio termodinamico, $R = G_{th}$:

$$R = d n_{n0} p_{n0} = G_{th}$$

Ad un basso livello di iniezione, p_n varierà, ma $n_n \approx n_{n0}$; da cui:

$$R = d n_n p_n$$

Definendo U_n il tasso medio di ricombinazione,

$$U_n = R - G_{th} = d n_n p_n - d n_{n0} p_{n0}$$

$$U_n = d n_{n0} (p_n - p_{n0}) = d N_D (p_n - p_{n0})$$

Questo perché $n_n \sim N_D^+ \sim N_D$ (ipotesi di completa ionizzazione)

Definendo τ_p tempo di vita medio delle lacune,

$$\tau_p \triangleq \frac{L}{d_{N_D}} ;$$

$$U_p = \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p}$$

Essa ci dice cioè: noi, drogando, a seconda di quanto più drogante immettiamo nel semiconduttore, faremo sempre più abbassare la vita dei portatori minoritari.

Abbiamo così realizzato un modello di U_p ; spesso $p_n - p_{n0} = p_n'$, come "l'eccesso di lacune nel semiconduttore drogato tipo n".

$$U_p = \frac{p_n'}{\tau_p}$$

Unicamente, p_n' ed il suo duale n_n' hanno senso solo fuori equilibrio, perché in altri casi sarebbero nulli.

Valgono le relazioni

$U_p = \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p}$	$U_n = \frac{n_p - n_{p0}}{\tau_n}$
-------------------------------------	-------------------------------------

Questo è un modello di ricombinazione diretta, ossia basato su transizioni di tipo diretto dell'elettrone su diversi stati energetici. Esistono modelli che prevedono transizioni indirette, ma ciò non toglie che questo non sia inadeguato;

Abbiamo ora completato il modello matematico dei semiconduttori

MODELLO MATEMATICO DEI SEMICONDUTTORI

Esercizio Pratico: dato un campione di silicio, drogato con $N_A = 10^{16}$ atomi/cm³

1.1) Disegnare diagramma a bande del tagliato all'equilibrio termolunare

1.2) Calcolare la resistenza sapendo che $l = 1$ mm, $A = 1$ mm²

Successivamente, si droghi lo stesso campione con $N_D = 10^{17}$

2.1) Ripetere 1.1

2.2) Ripetere 1.2

3) Sapendo che il semiconduttore è illuminato con una radiazione luminosa che genera 10^{23} coppie elettrone-lacuna sulla faccia posta in $x=0$; si calcoli come le lacune in eccesso si ridistribuiscono in tutto nel semiconduttore con $\tau_p = 1$ ns

4) Supponendo di ripetere l'analisi del punto 3 avendo applicato -2V al campione, se ne valuti l'effetto.

Risultazioni:

$$1.1) p_p = \frac{N_A}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{2n_i(300)}{N_A(300)}} + 1 \right] \quad \begin{matrix} N_A(300) = N_A \\ n_i = 1,45 \cdot 10^{10} \end{matrix}$$

$$p_p(300) \approx N_A$$

Calcoliamo il livello di Fermi: mediante le equazioni di Shockley, vediamo

che:

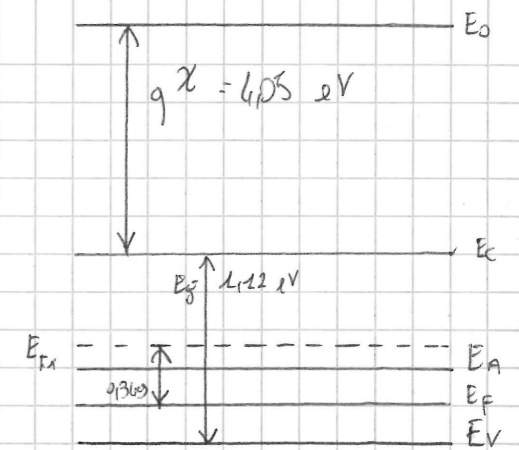
$$p_p(300) \approx N_A = n_i e^{-\frac{E_{Fi} - E_F}{kT}} \Rightarrow E_{Fi} - E_F = kT \ln \frac{N_A}{n_i}$$

$$kT \approx 0,026 \text{ eV}, \quad N_A = 10^{16}$$

$$= 369 \text{ meV}$$

$$q \bar{E}_{sp} = q \chi + \frac{E_g}{2} + E_{Fi} - E_F = 4,95 + 0,36 + 0,369 = 4,1959$$

Il disegno qui sotto sarà:



$$1.2) R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{l}{\sigma} \cdot \frac{l}{A}$$

$$\begin{matrix} \sigma = \sigma E & \mu_n = 1250 & q = 1,6 \cdot 10^{-19} \\ \sigma = q(\mu_n n + \mu_p p) & \mu_p = 350 & p = 10^{16} \end{matrix}$$

Applicando la legge dell'azione di massa,

$$n_p \cdot p_p = n_i^2 \Rightarrow n_p = \frac{n_i^2}{p_p} = 2,1 \cdot 10^4$$

$n_p \ll p_p \Rightarrow$ possiamo trascurare i minoritari

$$\sigma \approx q \cdot \mu_p \cdot p_p = 2,766 \frac{S}{cm}$$

$$g = 1,79 \frac{W \cdot cm}{V \cdot cm}$$

I punti 2.1 e 2.2 si fanno in modo del tutto analogo, considerando la compensazione del drogante N_A con N_D .

Facciamo il punto 3, diversando l'algoritmo per maggiore precisione

3) Abbiamo fotoni che generano otticamente 10^{23} coppie elettrone-lacuna, instaurando un regime di basso livello di iniezione:

$$\begin{cases} p_{no} \ll 10^{13} \\ n_{no} \gg 10^{13} \end{cases}$$

Partendo dal modello matematico, consideriamo l'equazione di continuità:

$$\frac{\delta p_n}{\delta t} = -\frac{1}{q} \frac{\delta J_p}{\delta x} - v_p$$

Consideriamo che la generazione ottica sia stazionaria, non abbia cioè variazioni nel tempo, e dunque derivata temporale nulla:

$$\frac{\delta p_n}{\delta t} = 0 \implies -\frac{1}{q} \frac{\delta J_p}{\delta x} - v_p = 0$$

Ma nel nostro modello,

$$v_p = \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p} ; J_p = q \mu_p p_n E - q D_p \frac{\delta p_n}{\delta x}$$

Consideriamo però il fatto che, essendo isolato il semiconduttore, non abbiamo fenomeni di polarizzazione: il campo elettrico esterno sarà 0:

$$E_{ext} = 0$$

Potrebbe esserci però un E_{int} in condizioni di non-neutralità locale:

La Golt introduce però coppia neutra, $p=0$, $E_{int}=0$.

Il problema che può scaturire è che la diffusione potrebbe avere velocità diverse tra elettroni e lacune: queste ultime hanno una mobilità molto più ridotta, quindi potrebbe generarsi un campo in seguito ad un gradiente di diffusione anche solo temporaneo; introduciamo un'ipotesi di "quasi neutralità": $E \approx 0$.

Consideriamo il fatto che E agirebbe solo sulla corrente dei minoritari, e dunque non ci porrebbero problemi sensibili.

Accettando tale ipotesi, l'equazione di trasporto sarà:

$$J_p \approx -q D_p \frac{\delta p_n}{\delta x}$$

L'equazione di continuità:

$$0 = -\frac{1}{q} D_p \frac{\delta^2 p_n}{\delta x^2} - \frac{p_n - p_{n0}}{\tau_p}$$

Considerando $p_n' = p_n - p_{n0}$, $\frac{\delta^2 p_n'}{\delta x^2} = \frac{\delta^2 p_n}{\delta x^2}$ (differenza a meno di una costante p_{n0})

Quindi:

$$\frac{\delta^2 p_n'}{\delta x^2} = \frac{1}{D_p \tau_p} p_n' \implies \text{Ci riconduciamo all'equazione omogenea di II ordine:}$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{D_p \tau_p} \quad \lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{D_p \tau_p}}$$

$D_p \tau_p$ è una lunghezza quadratica, dimensionalmente:

Definiamo la "lunghezza di diffusione" come: $L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$$

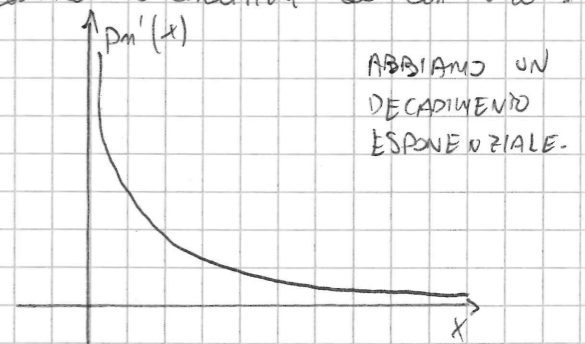
$$p_n'(x) = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x} = A e^{\frac{x}{L_p}} + B e^{-\frac{x}{L_p}}$$

Per determinare A e B ci servono 2 condizioni al contorno:

$$1) p_n'(\infty) = 0 \implies A = 0$$

$$2) p_n'(0) = L_p^{-1} \implies B = L_p^{-1}$$

$$p_n'(x) = L_p^{-1} e^{-\frac{x}{L_p}}$$



Ciò è così motivabile: si ha un processo di diffusione, e al contempo uno di ricombinazione, e così abbiamo due fenomeni dominanti per i portatori minoritari.

Facciamo alcune osservazioni, riguardo le due condizioni al contorno:

1) Ha senso confrontare 1 mm (lunghezza del semiconduttore) con ∞ ?

Sì, se $L_p \ll 1 \text{ mm}$:

$$L_p = \sqrt{D_p \cdot \tau_p} \approx 23 \mu\text{m}$$

Quindi molto inferiore a 1 mm.

2) Sulla faccia $x=d$, avviene la goli, dunque possiamo dire senza estensione

$$\text{che } p_n'(d) = 10^{13}$$

Ora, divergiamo dal problema, che sarebbe praticamente triviale: esistono

casì (molto comuni, in microelettronica/nanoelettronica) in cui i dispositivi

hanno $d = 50 \mu\text{m}$, o meno! La condizione 1 non è applicabile, in questi

casì. $p_n'(x)$ avrà sempre forma uguale:

$$p_n'(x) = A e^{\frac{x}{L_p}} + B e^{-\frac{x}{L_p}}$$

Al fine di ricavare nuove condizioni al contorno, valide, è necessario

fare altre ipotesi assuntive. Il semiconduttore, molto corto, viene per

ipotesi chiuso su di un metallo, con due placchette, al fine di avere

un contatto ohmico.

Si costruisce dunque un contesto tecnologico tale per cui la

condizione al contorno sia:

$$p_n'(d) = 0$$

Il contatto metallico, sul punto estremo "d", provoca una totale

ricombinazione. Le nostre due condizioni saranno:

$$\begin{cases} p_n'(d) = 0 \\ p_n'(0) = A + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = p_n'(0) - A \\ 0 = A e^{\frac{d}{L_p}} + (p_n'(0) - A) e^{-\frac{d}{L_p}} \end{cases}$$

Quindi, svolgiamo i passaggi ed esplicitiamo A e B:

$$0 = A \left(e^{\frac{d}{L_p}} - e^{-\frac{d}{L_p}} \right) + p_n'(0) e^{-\frac{d}{L_p}} ; \text{ Ma } e^{\frac{d}{L_p}} - e^{-\frac{d}{L_p}} = 2 \sinh\left(\frac{d}{L_p}\right)$$

$$A = \frac{-p_n'(0) e^{-\frac{d}{L_p}}}{2 \sinh\left(\frac{d}{L_p}\right)}$$

$$\begin{aligned} B &= p_n'(0) + \frac{p_n'(0) e^{-\frac{d}{L_p}}}{2 \sinh\left(\frac{d}{L_p}\right)} = 2 \sinh\left(\frac{d}{L_p}\right) p_n'(0) + p_n'(0) e^{-\frac{d}{L_p}} = \\ &= \frac{p_n'(0) e^{\frac{d}{L_p}} - p_n'(0) e^{-\frac{d}{L_p}} + p_n'(0) e^{-\frac{d}{L_p}}}{2 \sinh\left(\frac{d}{L_p}\right)} \end{aligned}$$

Sostituendo A e B nell'equazione di partenza, si ottiene:

$$\begin{aligned} p_n'(x) &= \frac{-p_n'(0) e^{-\frac{d}{L_p}} \cdot e^{\frac{x}{L_p}} + p_n'(0) e^{\frac{d}{L_p}} \cdot e^{-\frac{x}{L_p}}}{2 \sinh\left(\frac{d}{L_p}\right)} = \\ &= \frac{p_n'(0) \left(e^{\frac{d-x}{L_p}} - e^{-\frac{d-x}{L_p}} \right)}{2 \sinh\left(\frac{d}{L_p}\right)} = \frac{\sinh\left(\frac{d-x}{L_p}\right)}{\sinh\left(\frac{d}{L_p}\right)} \end{aligned}$$

Questo, dunque, quando $d \ll L_p$.

Esiste un terzo caso: $d \gg L_p$, e dunque $d \gg x$.

Mediante Taylor, dunque, possiamo dire che $\sinh(x) \approx x$.

Da ciò:

$$p_n'(x) \approx \frac{p_n'(0) \cdot \frac{d-x}{L_p}}{\frac{d}{L_p}} = p_n'(0) \left(1 - \frac{x}{d} \right)$$

Terminiamo questa divergenza, che ci ha portato risultati molto generali per diverse caratteristiche di problemi.

Nel nostro problema, abbiamo studiato la distribuzione dei portatori, che tra poco raffigureremo. Prima ci chiediamo: vi sono correnti, nel semiconduttore, a queste condizioni? La corrente totale, indipendentemente dalla distribuzione, dovrebbe essere nulla: se così non fosse, vi sarebbero degli accumuli nel tempo, che però violerebbero la legge di conservazione della carica.

Dato che, per semiconduttori lunghi,

$$p_n(x) = p_n(0) e^{-\frac{x}{L_p}} \text{ allora:}$$

$$J_{pdiff}(x) = -q D_p \frac{dp_n}{dx} = \frac{q p_n(0) D_p}{L_p} e^{-\frac{x}{L_p}}$$

La variazione di concentrazione dovrebbe provocare una corrente di questo tipo:



Questa è in contrasto con ciò che abbiamo prima scritto: allontanandoci da $x=0$ abbiamo un comportamento che si solo disfa, ma in un intorno di 0, no.

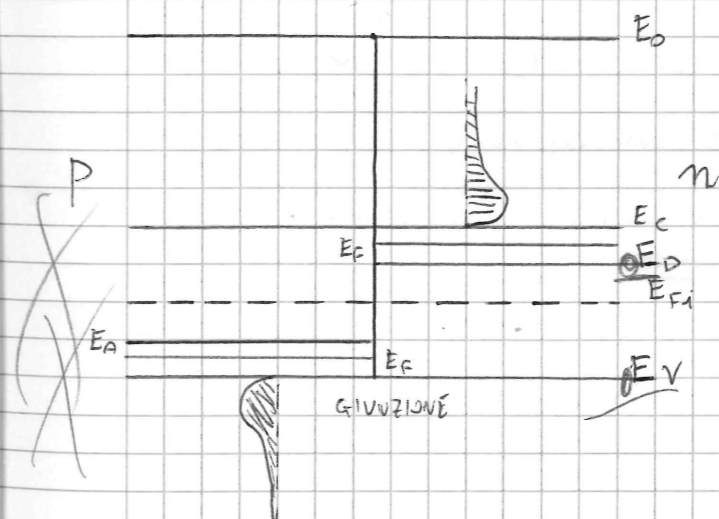
Si può intuire che ci sia un flusso di elettroni che antibalancia questa corrente, in modo da garantire la conservazione della carica.

Determineremo in seguito la discussione del problema; ci occuperemo ora di introdurre una prima applicazione pratica di ciò che abbiamo finora studiato.

La Giunzione p-n

Dati due pezzi di semiconduttore (diciamo di silicio), drogati uno tipo n, ed uno tipo p, essi avranno un certo diagramma a bande, diverso sotto alcuni punti di vista.

Immaginiamo idealmente di unire i due semiconduttori; i potenziali dei due semiconduttori, in principio scorrenti tra loro, una volta uniti, avranno uno stesso riferimento di base: considerando come "tempo 0" l'istante di unione dei semiconduttori, in un tempo $t=0^+$, i due "potenziali del vuoto" E_0 saranno coincidenti. Poiché inoltre trattiamo due pezzi di silicio, E_c, E_v, E_f saranno sullo stesso livello energetico. Tracciamo dunque un primo diagramma a bande della giunzione:



Notiamo una particolarità: il livello di Fermi, E_f , risulta essere una quantità discontinua. Vedremo in seguito che ciò non è cosa giusta.

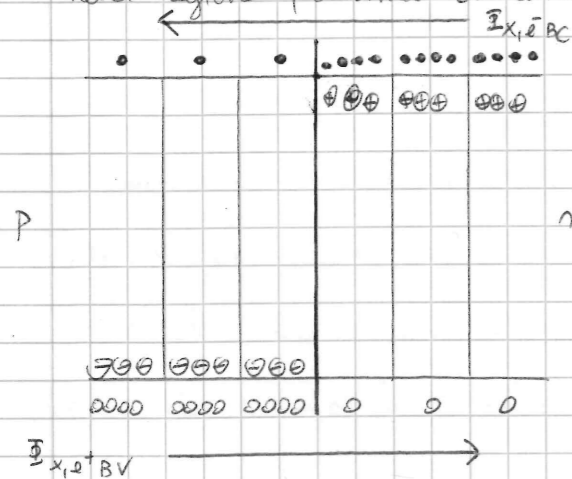
A destra della giunzione, avremo molti elettroni in banda di conduzione, e poche lacune in banda di valenza; a sinistra, viceversa, pochi elettroni in banda di conduzione e molte lacune in banda di valenza. Vi saranno di fatto accumuli di cariche, che provocheranno flussi di portatori: dal lato p al lato n di lacune, dal lato n al lato p di elettroni.

Questi flussi sussisteranno fino a quando sussisteranno le due continuità nei livelli energetici, nella fattispecie quella sul livello di Fermi. Per un certo intervallo di tempo, si avranno due flussi netti:

- 1) \bar{J}_{x_0-BC} $n \rightarrow p$
- 2) \bar{J}_{x_0+BV} $p \rightarrow n$

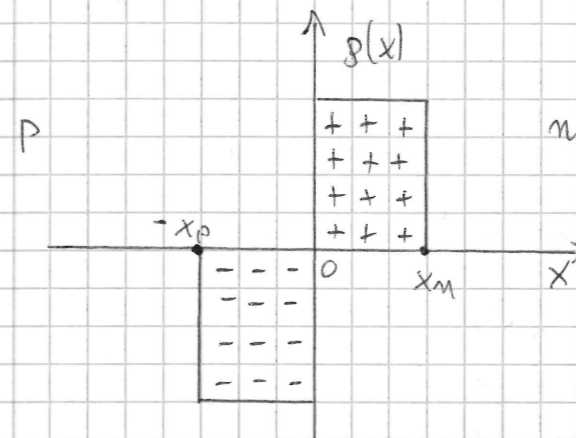
Vogliamo cercare di capire come può instaurarsi un equilibrio, da questa situazione. Possiamo dire che, partendo dalle informazioni sui due flussi, vi siano due canali di scambio separati: generazione termica e ricombinazione sono fenomeni molto più "lenti" dei due flussi, quindi per noi trascurabili.

Se per un certo intervallo di tempo ho uno spostamento di portatori di carica, succederà che, venendo a mancare elettroni in banda di conduzione (in n), e lacune in banda di valenza (in p), si perderà la condizione di neutralità locale: in banda di conduzione il semiconduttore tipo n si spopola nelle regioni prossime al contatto con il lato p, e viceversa il semiconduttore tipo p si spopola di lacune nella regione prossima al contatto con il lato n.



Gli ioni \oplus saranno sbilanciati, e idem gli ioni \ominus , con si perderà la neutralità locale.

Per lo studio della giunzione, dovremo atterarci ad un modello semplificato: considereremo, come ipotesi, che, in prossimità della giunzione, avviene uno "svuotamento completo": nelle zone sottostanti, resteranno in gioco solo gli ioni, poiché non vi saranno portatori rimasti nei livelli prossimi alla giunzione. Sarà dunque facile rappresentare la distribuzione spaziale di carica:



Aldilà di una certa regione, di un certo punto, il semiconduttore sarà neutro.

Poiché siamo in ipotesi di totale svuotamento, la densità di carica coinciderà con la concentrazione di drogante.

Ciò che ora ci chiediamo è: ma qual è la posizione del salto? Dove la carica inizia ad essere zero?

La risposta, che sarà poi motivata, è la seguente: dove il livello di Fermi smette di essere discontinuo.

Il nostro problema è: quanto la regione carica è estesa?

Come è possibile studiarne la geometria? Nella fattispecie, vorremmo poter studiare $-x_0$ e x_n , ma soprattutto i loro valori una volta raggiunto l'equilibrio, ossia x_{n0} e $-x_{p0}$. Questi valori saranno ottenuti in seguito ad una crescita temporale di x_n e x_p rispetto al loro stato iniziale. Nel punto di equilibrio, non vi sarà carica, e dunque i due flussi saranno nulli.

Dati due materiali, "1" e "2", essi saranno caratterizzati da una propria distribuzione di densità degli stati energetici, e da una funzione di occupazione degli stati, di Fermi-Dirac, caratterizzata dal livello di Fermi proprio del materiale.

$$1 \begin{cases} g_1(E) \\ f_1(E) \Leftrightarrow E_{F1} \end{cases} \quad 2 \begin{cases} g_2(E) \\ f_2(E) \Leftrightarrow E_{F2} \end{cases}$$

Immaginiamo che sia stato raggiunto l'equilibrio termodinamico, in seguito al contatto. Ciò significa che, per ogni generico livello energetico E , devo garantire un equal flusso di portatori, e cioè i flussi devono essere tra loro bilanciati.

$$\Phi_{x1} \quad 1 \rightarrow 2 \Big|_E = \Phi_{x2} \quad 2 \rightarrow 1 \Big|_E$$

Perché ciò sia possibile, dobbiamo far sì che uno stato iniziale sia occupato, ed uno finale libero: vediamo come esprimere ciò.

$$[g_1(E) \cdot f_1(E)] \cdot [g_2(E) (1 - f_2(E))] = \Phi_{x1} \quad 1 \rightarrow 2 \Big|_E$$

$$[g_2(E) \cdot f_2(E)] \cdot [g_1(E) (1 - f_1(E))] = \Phi_{x2} \quad 2 \rightarrow 1 \Big|_E$$

Svolgendo i conti,

$$g_1 \cdot f_1 \cdot g_2 \cdot (1 - f_2) \cdot g_2 = g_2 \cdot f_2 \cdot g_1 \cdot (1 - f_1) \cdot g_1$$

$$\Rightarrow f_1 = f_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_{F1}}{kT}}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{E - E_{F2}}{kT}}}$$

Fissata una certa E qualsiasi, ciò è vero se e solo se

$$E_{F1} = E_{F2}$$

Tentiamo ora di meglio definire tutto ciò che capita, per poi studiare in modo dettagliato carica, campo, e potenziale.

Se tentassimo di costruire il diagramma a bande della giunzione, con le nostre attuali conoscenze, ci accorgemmo di alcune cose:

- 1) $E_F(x)$ è costante, ovunque; $E_F(x) = E_F$
- 2) Lontano dalla giunzione, abbiamo i materiali che si comportano come se la giunzione non esistesse, e dunque una neutralità locale e globale.
- 3) I livelli energetici sono tutti continui, e cioè non presentano salti
- 4) L'affinità elettronica è costante
- 5) E_g è costante

Regola "extra" è la seguente: se il semiconduttore ha carica positiva, il diagramma a bande è convesso; se ha carica negativa, è concavo.

Mediante queste 5 proprietà, abbiamo un metodo per disegnare un diagramma a bande, in modo qualitativo; possiamo ora pensare ad una cosa: potremmo applicare in $E_{F1}(x)$ ed E_F le equazioni di Shockley; consideriamo per $+\infty$ un punto distante dalla giunzione dalla parte del semiconduttore p, e per $-\infty$ un punto distante dalla giunzione dalla parte del semiconduttore n;

$$n_p(+\infty) = n_i e^{\frac{E_F - E_{Fi}(+\infty)}{kT}} \quad ; \quad p_n(+\infty) = n_i e^{\frac{E_{Fn}(+\infty) - E_F}{kT}}$$

Le equazioni di Shockley sono utili in quanto, mediante la loro applicazione, potrai provare a cercare il numero di elettroni e lacune in

ogni punto della giunzione.

Vorremo ora poter costruire il diagramma a bande; per poter far ciò, ci mancano alcuni dati: x_p , x_n , e la barriera di potenziale Φ_i . Iniziamo ora uno studio dettagliato e quantitativo della giunzione, in modo da poter determinare i parametri mancanti.

Studio elettrostatico della giunzione

Abbiamo tre incognite:

- x_n : ampiezza sostanziale lato n
- x_p : ampiezza sostanziale lato p
- Φ_i : potenziale interno tra il lato p ed il lato n.

Però abbiamo tre incognite, ci servono tre equazioni indipendenti:

1) Equazione di neutralità globale; in forma generale, essa ha forma:

$$-\int_{-x_p}^0 \rho(x) dx = \int_0^{x_n} \rho(x) dx$$

Nel nostro caso specifico, date le ipotesi di semiconduttore omogeneo, di completa ionizzazione dei droganti, e di completo sostanzialità, l'equazione si ridurrà a:

$$q \cdot N_A \cdot x_p = q \cdot N_D \cdot x_n$$

ci mancano altre due equazioni; la seconda potrebbe derivare da un'analisi del diagramma a bande: la barriera di potenziale tende a formarsi tra il lato n ed il lato p, e, infatti, la differenza dei due livelli di estrinseco, nei due lati:

2) Data la barriera di potenziale Φ_i ,

$$\Phi_i = q \Phi_{sp} - q \Phi_{sn}$$

Questa differenza, si può pensare in termini della semplice differenza dei livelli di Fermi intrinseci, in punti distanti dalla giunzione:

$$\Phi_i = E_{Fi}(-\infty) - E_{Fi}(+\infty)$$

Algebricamente, possiamo aggiungere e togliere lo stesso numero all'equazione, ed essa resterà invariata: facciamo con E_F

$$\Phi_i = E_{Fi}(-\infty) - E_F + E_F - E_{Fi}(+\infty)$$

Le due forme $(E_{Fi}(-\infty) - E_F)$ e $(E_F - E_{Fi}(+\infty))$ sono riconducibili alle equazioni di Shockley:

$$E_{Fi} - E_F = kT \ln \frac{N_A}{n_i} \quad ; \quad E_F - E_{Fi} = kT \ln \frac{N_D}{n_i}$$

Applicando le proprietà dei logaritmi,

$$(E_{Fi} - E_F) + (E_F - E_{Fi}) = \boxed{kT \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} = q \Phi_i}$$

La barriera è l'energia positiva così definita: $q \Phi_i$.

Diamo spazio ad una convenzione particolare; parlando qualitativamente di potenziale, avremo preso come riferimento il punto $-x_p$; ora, parlando di energia, il punto x_n .

Usando tale convenzione,

$$\Phi_i = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2}$$

Riassumiamo, evidenziando la convenzione:

• $q\Phi_i$ è un'energia, calcolata come $U(+\infty) - U(-\infty)$

• Φ_i è una tensione, calcolata come $\Phi(+\infty) - \Phi(-\infty)$

Sarebbe più formale considerare il posto di $-\infty$, $-x_{p0}$, e il posto di $+\infty$, x_{n0} .

$\Phi_i = \Phi(x_{n0}) - \Phi(-x_{p0})$ è la definizione di "potenziale di contatto".

Abbiamo così trattato due equazioni. Le ne manca ancora una, che otterremo mediante l'applicazione puntuale dell'equazione di Poisson

3) Partendo da:

• $E(x) = \int \frac{\rho(x)}{\epsilon_s} dx$

• $\Phi(x) = -\int E(x) dx$

È da $\rho(x)$, cerchiamo di studiare campo e potenziale, legati alla densità di carica $\rho(x)$.

ρ sarà definita come una funzione a tratti:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -x_{p0} \\ -qN_A & -x_{p0} < x < 0 \\ +qN_D & 0 < x < x_{n0} \\ 0 & x_{n0} < x < +\infty \end{cases}$$

Possiamo calcolare, per regioni, il campo elettrico $E(x)$, lavorando sul fatto che, in un intervallo $[a, x]$,

$$E(x) = E(a) + \int_a^x \frac{\rho(x)}{\epsilon_s} dx$$

Studiamo ognuna delle quattro zone:

• $-\infty < x < -x_{p0}$

$$E(x) = E(-\infty) + \int_{-\infty}^x \frac{0}{\epsilon_s} dx; \text{ Fissato } E(-\infty) = 0, E(x) = 0.$$

$$E(-x_{p0}) = 0.$$

• $-x_{p0} < x < 0$

$$E(x) = E(-x_{p0}) + \int_{-x_{p0}}^x -\frac{qN_A}{\epsilon_s} dx = -\frac{qN_A}{\epsilon_s} (x + x_{p0})$$

$$E(0) = -\frac{qN_A}{\epsilon_s} x_{p0}$$

• $0 < x < x_{n0}$

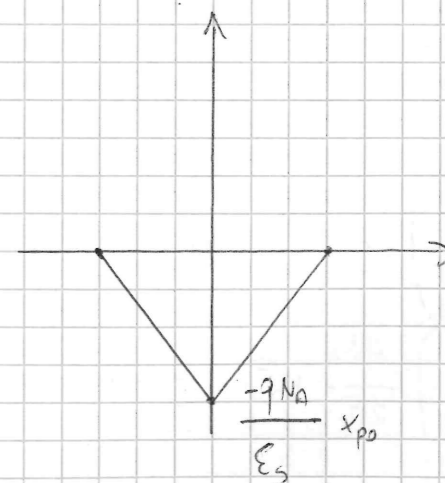
$$E(x) = E(0) + \int_0^x \frac{qN_D}{\epsilon_s} dx = -\frac{qN_A}{\epsilon_s} x_{p0} + \frac{qN_D}{\epsilon_s} x$$

$$E(x_{n0}) = -\frac{qN_A}{\epsilon_s} x_{p0} + \frac{qN_D}{\epsilon_s} x_{n0}$$

• Applicando la neutralità, si verifica che, per $x_{n0} < x < +\infty$,

$$E(x) = 0.$$

$$E(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -x_{p0} \\ -\frac{qN_A}{\epsilon_s} (x + x_{p0}) & -x_{p0} < x < 0 \\ -\frac{qN_A}{\epsilon_s} x_{p0} + \frac{qN_D}{\epsilon_s} x & 0 < x < x_{n0} \\ 0 & x_{n0} < x < +\infty \end{cases}$$



Calcoliamo ora il potenziale $\Phi(x)$:

• $-\infty < x < -x_{po}$

$$\Phi(x) = \Phi(-\infty) - \int_{-\infty}^x 0 dx = 0 \quad \Phi(-x_{po}) = 0$$

• $-x_{po} < x < 0$

$$\Phi(x) = \Phi(-x_{po}) - \int_{-x_{po}}^x -\frac{q_{Na}}{\epsilon_s} (x + x_{po}) dx =$$

$$= 0 + \frac{q_{Na}}{2\epsilon_s} (x + x_{po})^2$$

$$\Phi(0) = \frac{q_{Na}}{2\epsilon_s} x_{po}^2$$

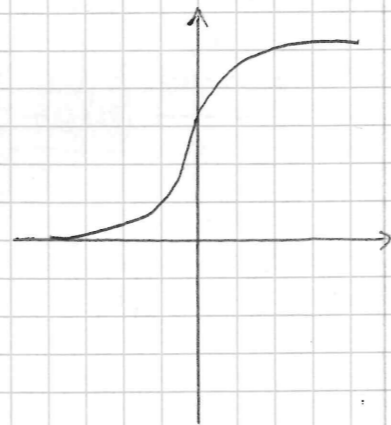
• $0 < x < x_{no}$

$$\Phi(x) = \Phi(0) - \int_0^x \left(-\frac{q_{Na}}{\epsilon_s} x_{po} + \frac{q_{No}}{\epsilon_s} x \right) dx = \frac{q_{Na}}{2\epsilon_s} x_{po}^2 + \frac{q_{Na}}{\epsilon_s} x_{po} x - \frac{q_{No}}{2\epsilon_s} x^2$$

$$\Phi(x_{no}) = \Phi_i = \frac{q_{Na}}{2\epsilon_s} x_{po}^2 + \frac{q_{Na}}{\epsilon_s} x_{po} x_{no} - \frac{q_{No}}{2\epsilon_s} x_{no}^2$$

• Applicando la neutralità, si verifica che, per $x_{no} < x < +\infty$, il potenziale è costante.

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -x_{po} \\ \frac{q_{Na}}{2\epsilon_s} (x + x_{po})^2 & -x_{po} < x < 0 \\ \frac{q_{Na}}{2\epsilon_s} x_{po}^2 + \frac{q_{Na}}{\epsilon_s} x_{po} x - \frac{q_{No}}{2\epsilon_s} x^2 & 0 < x < x_{no} \\ \frac{q_{Na}}{2\epsilon_s} x_{po}^2 + \frac{q_{Na}}{\epsilon_s} x_{po} x_{no} - \frac{q_{No}}{2\epsilon_s} x_{no}^2 & x_{no} < x < +\infty \end{cases}$$



Abbiamo già sfruttato la neutralità, nella terza equazione; ora accenniamo ulteriormente, per fare alcune osservazioni, di carattere geometrico: il triangolo è l'andamento dell'area delle cariche, ma il potenziale è l'andamento dell'area del triangolo.

Possiamo dunque dire che la barriera è:

$$\Phi_i = \frac{q_{Na}}{2\epsilon_s} x_{po}^2 + \frac{q_{No}}{2\epsilon_s} x_{no}^2 = \Phi_p + \Phi_n$$

Possiamo distinguere i contributi del lato p e del lato n alla formazione della barriera.

Abbiamo determinato tre equazioni:

$$1) q_{Na} x_{po} = q_{No} x_{no}$$

$$2) \Phi_i = \frac{q_{Na}}{2\epsilon_s} x_{po}^2 + \frac{q_{No}}{2\epsilon_s} x_{no}^2$$

$$3) \Phi_i = \frac{q_{Na}}{2\epsilon_s} x_{po}^2 + \frac{q_{No}}{2\epsilon_s} x_{no}^2$$

Mettendo a sistema la 1 e la 3, possiamo far sparire x_{po} o x_{no} :

$$1) x_{po} = x_{no} \frac{N_D}{N_A} \Rightarrow 3) \Phi_i = \frac{q_{Na}}{2\epsilon_s} x_{no}^2 \cdot \frac{N_D^2}{N_A^2} + q_{No} \frac{N_D}{N_A} x_{no}^2$$

$$\Phi_i = \frac{q_{No}}{2\epsilon_s} \left(1 + \frac{N_D}{N_A} \right) x_{no}^2 = \frac{q_{No}}{2\epsilon_s} \left(\frac{N_A + N_D}{N_A} \right) x_{no}^2$$

Piché la 2 ci fornisce Φ_i , possiamo dire che

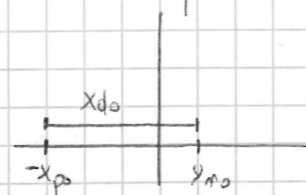
$$x_{no} = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{q_{No}} \cdot \Phi_i \cdot \frac{N_A}{N_A + N_D}}$$

Abbiamo così ricavato ogni dato per costruire il diagramma a bande.

Studiamo meglio l'ultima equazione: possiamo definire un

x_{do} come

$$x_{do} = x_{no} - (-x_{po}) = x_{no} + x_{po}$$



Dunque:

$$x_{no} + \frac{N_D}{N_A} x_{no} = x_{do} \quad ; \quad x_{no} \left(1 + \frac{N_D}{N_A} \right) = x_{do}$$

$$x_{do} = x_{no} \left(\frac{N_A + N_D}{N_A} \right) \quad |$$

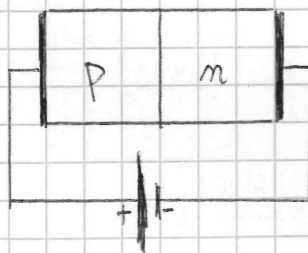
$$x_{do} = \sqrt{\left(\frac{N_A + N_D}{N_D} \right)^2 \cdot \frac{N_A}{N_A + N_D} \cdot \frac{2E_S}{qN_D} \Phi_i} = \sqrt{\frac{N_A + N_D}{N_A} \cdot \frac{2E_S}{qN_D} \Phi_i}$$

Si definisce la media armonica dei due dopaggi come:

$$N_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D}} = \frac{N_A N_D}{N_A + N_D}$$

$$x_{do} = \frac{2E_S}{qN_{eq}} \Phi_i$$

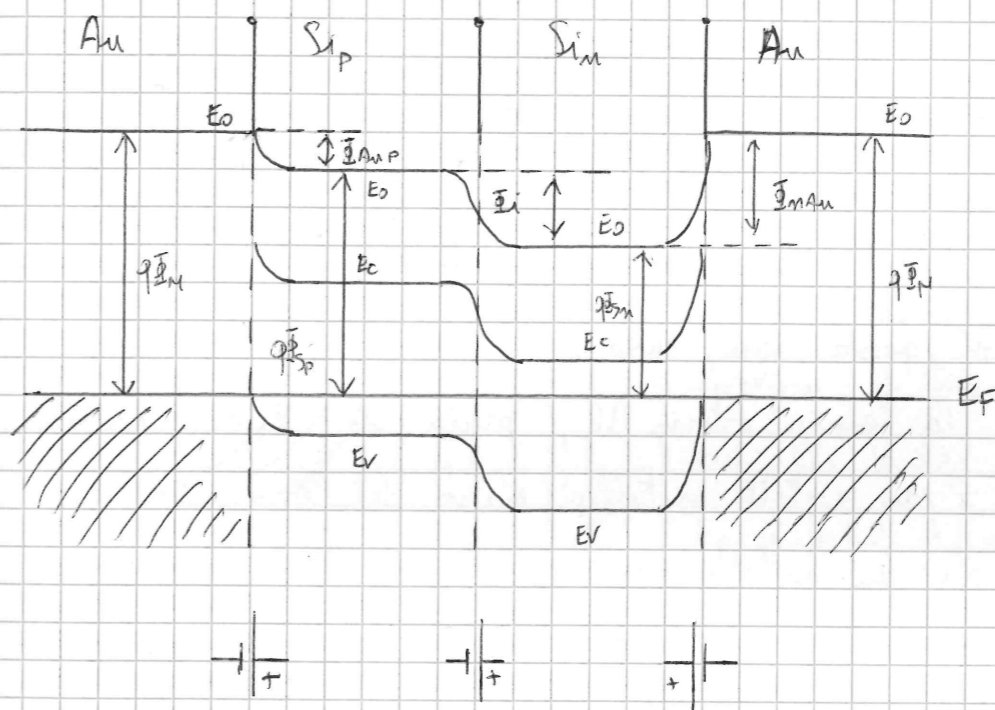
Abbiamo finora studiato un caso di equilibrio. Potremmo ora pensare a casi perturbati dall'esterno, mediante il collegamento di una batteria V_a alla giunzione



Si noti che la convenzione usata è sempre: il "+" dal lato p, il "-" al lato n.

I contatti sono metallici, supponiamo di oro (Au); per accedere elettricamente a un semiconduttore è necessario metallizzare gli estremi. Avrà dunque tre interfacce, e quindi tre potenziali di contatto.

Potremmo disegnare il diagramma a bande del nostro sistema Au-Si-pn; ricordiamo dunque le caratteristiche del metallo, in cui vi è solo livello di Fermi e banda di conduzione. Perché supponiamo di trovarci in uno stato di equilibrio, potremo supporre che il livello di Fermi sarà ovunque costante. Il metallo non potrà presentare carenze nei livelli energetici, a causa della natura "fluida" dei propri portatori. Pertanto, dalle interfacce, i materiali si comportano come isolati.

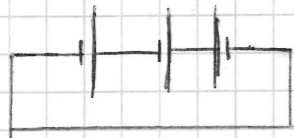


Cosa osserviamo: Au ha un livello di estrazione un po' superiore a quello del silicio; gli E_0 in entrambe le placche d'oro è uguale; l'interfaccia si caratterizza solo da parte dei semiconduttori.

Oltre alla barriera Φ_i , avremo altre due barriere, causate dalla differenza tra i lavori di estrazione. Ogni tensione di contatto si può circuitalmente rappresentare con una batteria: il contatto Au-Si_p sarà con una tensione positiva rispetto a p-n, poiché è dall'alto verso

il basso. La terra avrà una tensione negativa rispetto a p, e quindi sarà negativa.

Potremo raffigurare il circuito in questo modo:



Possiamo scrivere l'equazione alla maglia, nel seguente modo:

$$-\Phi_{Au,p} - \Phi_i + \Phi_{n,Au} = 0$$

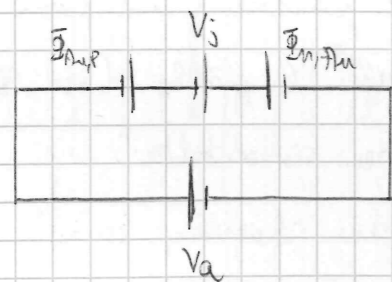
Da ciò possiamo ricavare che

$$\Phi_i = \Phi_{n,Au} - \Phi_{Au,p} \quad [\text{a sinistra in seguito}]$$

Supponiamo di poter avere un voltmetro ideale: esso non potrebbe misurare niente, perché i potenziali di contatto "bilanciano" la tensione interna, e così questa sarà nulla.

Collegiamo ora la tensione esterna V_a , prima la seguente ipotesi: supponiamo che i due contatti metallici siano dei buoni contatti, ossia non vi sia nei contatti alcuna caduta di tensione, e quindi dovremo avere una resistenza serie circa nulla.

Potremmo riconsiderare il circuito precedente, con una batteria V_a in serie:



Avrà una tensione incognita V_j , sulla giunzione: V_j sarà detta "tensione sulla giunzione fuori equilibrio".

La tensione sulla maglia sarà:

$$-V_a - \Phi_{Au,p} - V_j + \Phi_{n,Au} = 0$$

$$V_j = \Phi_{n,Au} - \Phi_{Au,p} - V_a \quad ; \quad \text{ma } \Phi_{n,Au} - \Phi_{Au,p} = \Phi_i$$

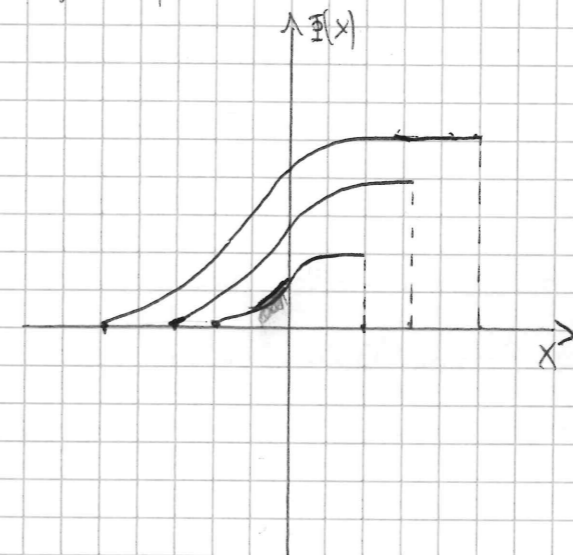
$$\Rightarrow V_j = \Phi_i - V_a$$

Quando applico una tensione positiva sul lato p, si abbassa la tensione sulla giunzione.

A questo punto, due definizioni:

- Una giunzione polarizzata con $V_a > 0$, ha "polarizzazione diretta".
- Una giunzione polarizzata con $V_a < 0$, ha "polarizzazione inversa".

La tensione provoca alcune interessanti conseguenze: disegnamo, in un grafico, la distribuzione della tensione all'equilibrio, con $V_a > 0$, con $V_a < 0$.



Se i contatti restano lo stesso; cambia l'intervallo in cui si localizza la tensione, sia x_n e x_p . Con $V_a > 0$, x_d diminuisce e con $V_a < 0$, x_d aumenta.

Trascurando (come da ipotesi) cadute resistive, capita cioè: sapremo che le distribuzioni di carica sono: $+qN_A x_p$ (negativa), $+qN_D x_n$ (positiva). Le tensioni, fatte le nostre ipotesi, dipendono solo dagli ioni. Se la tensione esterna modula la barriera, allora modula potenzialmente campo, e carica. Con una V_a positiva, riduciamo la regione di sostanzamento; la polarizzante, e di V_a non può variare il drogaggio del semiconduttore.

quindi N_A ed N_D sono invariati; varieranno invece x_n ed x_p ; integrando la carica modulata dalla tensione esterna, varierà, nel tempo, l'intervallo di integrazione, ma non la "pendenza" dei lati del triangolo. Sarà proprio questa pendenza, ulteriormente integrata, a fornire la costante della distribuzione della tensione V_j : ciò dimostra come vari l'intervallo, ma non la pendenza/concostà.

Potremmo chiederci: come si correla la V_a con l'ampiezza dell'intervallo di integrazione x_d ?

L'idea è sostituire, alla Φ_i in condizione di equilibrio, la V_j , $V_j = \Phi_i - V_a$

Dunque

$$x_d(V_a) = \sqrt{\frac{2 \epsilon_s}{q N_D} (\Phi_i - V_a)} \quad x_d \sim 10^{-7} \text{ m}$$

In realtà, l'effetto della tensione può essere molto più interessante di una semplice variazione di x_d : la tensione $V_a > 0$ riduce la barriera di potenziale, e con il flusso dei portatori viene modificata, e nello specifico si generano delle correnti.

Dal punto di vista elettrostatico, una tensione esterna fa variare le regioni di svuotamento, e quindi la carica positiva Q^+ e quella negativa Q^- .

Un effetto molto interessante della tensione è quello di rendere visibile una "capacità del semiconduttore"; vediamo.

Dato che V_a modifica $q N_D x_n(V_a)$, e $-q N_A x_p(V_a)$, la situazione può ricordare un condensatore.

Data una Q , si può definire una capacità C come:

$$C = \left| \frac{dQ}{dV} \right|$$

Consideriamo come tensione la V_a , e come carica ad esempio quella positiva, Q^+ . Ci servirà una Q^+ funzione di V_a , per poterne calcolare la derivata in V_a .

Ha $Q^+ = q N_D x_n(V_a)$;

~~$$x_n(V_a) = \sqrt{\frac{2 \epsilon_s N_D}{q N_D (N_A + N_D)} (\Phi_i - V_a)}$$~~

~~$$Q^+(V_a) = \sqrt{\frac{2 \epsilon_s N_D q N_D}{q N_D (N_A + N_D)} (\Phi_i - V_a)} = \sqrt{2 q \epsilon_s N_D} (\Phi_i - V_a)$$~~

Derivando e facendo il modulo, si trova che

~~$$C = \left| \frac{dQ^+(V_a)}{dV_a} \right| = \frac{q \epsilon_s N_D}{\sqrt{2 \epsilon_s q N_D} (\Phi_i - V_a)} = \frac{q \epsilon_s N_D}{\sqrt{2 \epsilon_s q N_D} (\Phi_i - V_a)^{3/2}}$$~~

~~$$= \sqrt{\frac{q \epsilon_s N_D}{2 (\Phi_i - V_a)}} = C(V_a)$$~~

Si noti che C è funzione della tensione V_a : esso è variabile in tensione, nel senso che la sua capacità varia con la tensione che gli viene applicata.

Ragioniamo in modo diverso:

$$x_d(V_a) = \sqrt{\frac{2 \epsilon_s}{q N_D} (\Phi_i - V_a)} ;$$

$$\Rightarrow C(V_a) = \frac{\epsilon_s}{x_d(V_a)}$$

Abbiamo scoperto una cosa interessantissima: un semiconduttore

si può comportare come un condensatore a facce piane parallele, di

costante dielettrica ϵ_s , e distanza tra le armature x_d .

Un ~~semiconduttore~~ ^{semiconduttore} svuotato è equivalente ad un materiale dielettrico

Esercizio pratico

Data una giunzione p-n in silicio con i seguenti dati:

• $N_A = 10^{26}$

$N_D = 5 \cdot 10^{26}$

- 1) Disegnare il diagramma a bande dettagliato all'equilibrio
- 2) Calcolare il campo elettrico massimo all'equilibrio
- 3) Calcolare il valore della tensione esterna V_a tale per cui il campo massimo raddoppi
- 4) Calcolare il valore di capacità allo stato della giunzione in 3.
- 5) Si metta a punto un metodo di misura sperimentale che tramite misura di capacità permetta una valutazione del potenziale di contatto Φ_i

1) Il grafico qualitativamente si disegna subito: ricordando le proprietà dei semiconduttori o dei metalli, e il fatto che il livello di Fermi è costante, si può raffigurare. Per poterlo quotare, invece, ci mancano alcuni dati: le posizioni x_p e x_n , Φ_i , Φ_n , Φ_p . Si ricava immediatamente che:

$$\Phi_i = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} \quad , \quad \frac{kT}{q} = V_T = 0,025$$

Ora, l'ampiezza della banda di svuotamento sarà:

$$x_{do} = x_{no} + x_{po} = \sqrt{\frac{2\epsilon_s}{N_D} \Phi_i}$$

$$\epsilon_s = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{rs} = 8,854 \cdot 10^{-14}$$

$$N_D = \frac{1}{N_D} + \frac{1}{N_A} = 8,33 \cdot 10^{25}$$

Dunque, svolgendo i calcoli,

$$x_{do} = 34 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Potremmo ora fare due ragionamenti: uno, sarebbe quello di prendere l'espressione operativa per il calcolo delle ampiezze x_{po} e x_{no} ; un metodo altrettanto intelligente, è notare che le distribuzioni di carica, data l'ipotesi di completo svuotamento, sono rettangolari, e dunque che

$$\frac{N_A}{N_D} = \frac{x_{no}}{x_{po}}$$

In uno di questi due modi, si ricava che

$$x_{no} = 58 \text{ nm}$$

$$x_{po} = 202 \text{ nm}$$

$$\Phi_n = \frac{q N_D}{2\epsilon_s} x_{no}^2 = 0,12 \text{ V}$$

$$\Phi_p = \frac{q N_A}{2\epsilon_s} x_{po}^2 = 0,65 \text{ V}$$

Abbiamo così quotato tutte le grandezze del diagramma a bande. Passiamo al punto successivo.

2) $\text{Max}(E(x)) = ?$

La risposta è molto più semplice del possibile: la teoria ci spingerebbe a lunghi conti, ma esiste questo fatto: il massimo del campo è nell'origine degli assi, e ha un valore che noi già conosciamo:

$$\text{Max}(E(x)) = E(0) = -\frac{qNa}{\epsilon_s} x_{p0} = \frac{-qN_0}{\epsilon_s} x_{n0} = 44 \text{ kV/cm}$$

3) Anche questo punto, ci spingerebbe a lunghi ragionamenti; pensiamo ad un problema geometrico: dato un triangolo, la sua area sarà, data la base B e l'altezza A,

$$\text{Area} = \frac{A \cdot B}{2}$$

Beh, ma sappiamo che il nostro campo è un triangolo e che, dalla teoria, l'"altezza", come il drogante, non varia, mentre la base, x_d , può variare.

Se vogliamo raddoppiare il campo, dunque, dovremo raddoppiare

alcuni dati:

$$(2,74 - V_a) = \frac{2 \cdot x_d \cdot E(0) \cdot x}{x}$$

$$\Rightarrow V_a = -2,2 \text{ eV}$$

4) Anche qui la teoria fornisce molti suggerimenti e formule, più o meno difficili. Il sistema più semplice per calcolare la C_{DEP} , varia "capacità di smistamento", è la rianchiaratura al metallo e forze piano parallele:

$$C_{DEP} = \frac{\epsilon_s}{x_d} = 15 \text{ nF/cm}^2$$

5) Vogliamo trovare un modo per misurare, magari con una buona approssimazione, la tensione di contatto Φ_i . Dalla teoria, sappiamo che è impossibile realizzare un voltmetro capace di ciò, dunque dovremo ricorrere ad una misura di tipo $\sqrt{\text{diretto}}$. La traccia ci suggerisce di studiare grandezze capacitive.

Dalla teoria, sappiamo che

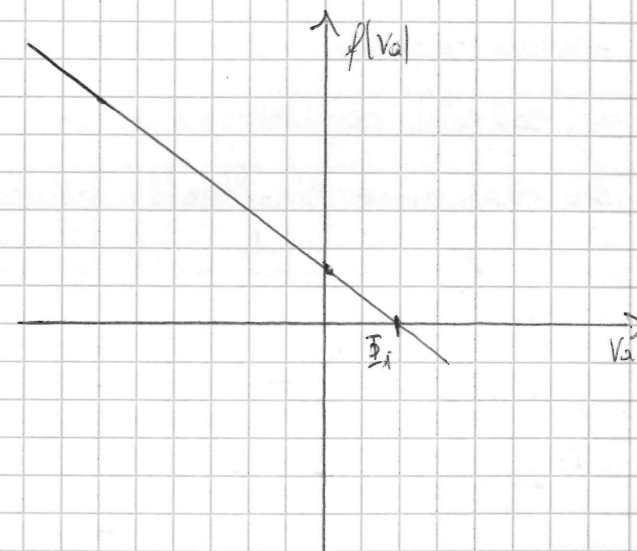
$$C_{DEP} = \sqrt{\frac{q \epsilon_s N_{eq}}{2(\Phi_i - V_a)}}$$

Vorremmo una funzione facile da studiare, e che non presenti il seguente problema: C_{DEP} presenta, in proximity di $V_a = \Phi_i$, un asintoto; quella zona di tensione non è studiabile per diversi motivi.

Consideriamo la funzione seguente:

$$\frac{1}{C_{DEP}^2} = \frac{2(\Phi_i - V_a)}{q \epsilon_s N_{eq}}$$

Questa, al variare di V_a , sarà una retta: voltarcela in alcuni punti "fatti", con "0" e "-2,2", vediamo così:



L'intersezione con l'asse delle ascisse è la Φ_i !

Questo metodo di misura ci fornisce implicitamente due misure:

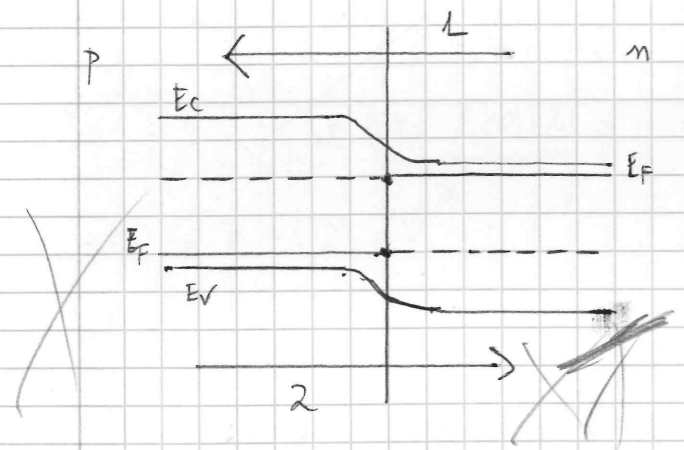
Φ_i , ma anche N_{eq} : la pendenza della retta $f(V_a)$, è legata a N_{eq} , così che è possibile calcolarlo con un'ultima approssimazione.

Effetti di una tensione sulla giunzione p-n

Vorremmo ora comprendere, al di là degli effetti elettrostatici, cosa provoca, le conseguenze di una tensione esterna V_a che polarizza una giunzione p-n. Soprattutto, vorremmo studiare cosa capita ai flussi di portatori, in seguito ad una modulazione della barriera. Introduciamo una notazione per identificare univocamente i quattro flussi che entrano in gioco nella giunzione:

- 1) Elettroni da lato n a lato p
- 2) Elettroni da lato p a lato n
- 3) Lacune da lato p a lato n
- 4) Lacune da lato n a lato p.

Se applichiamo alla giunzione una tensione $V_a > 0$, e dunque siamo in un caso di polarizzazione diretta, il lato p "scenderà", e quello n "salirà", così che il flusso 1 e quello 3 cresceranno, ma gli altri due rimarranno inalterati.



Qualitativamente, la diminuzione della barriera provocherà un aumento dei flussi, 1 e 3.

Il nostro obiettivo ora è quello di quantificare la transizione dei portatori, ponendoci alcune domande specifiche: vorremmo poter quantificare la concentrazione dei portatori minoritari iniettati, e calcolare il livello di iniezione; V_a determina infatti l'iniezione di elettroni

nel lato p, e di lacune nel lato n, e così un'iniezione elettrica. Studiando le concentrazioni dei minoritari, partiamo da una condizione di equilibrio: possiamo dire, mediante la legge dell'azione di massa (o, se si preferisce, mediante le equazioni di Shockley) che

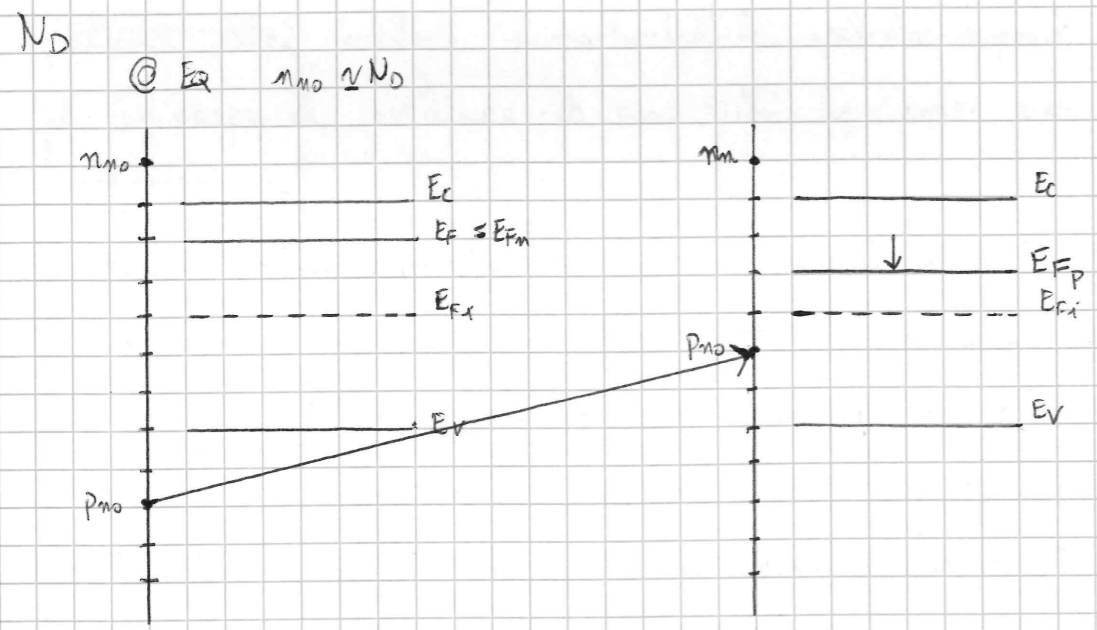
$$n_p(-x_p) \Big|_{E_F} = \frac{n_i^2}{p_p(-x_p) [N_A]} = n_{p0}; \quad p_n(+x_n) \Big|_{E_F} = \frac{n_i^2}{n_n(+x_n)} = \frac{n_i^2}{N_D} = p_{n0}$$

Possiamo intuire che, polarizzando la giunzione, $n_p(-x_p)$ e $p_n(+x_n)$ crescano molto. Siamo dunque in grado di studiare bene l'equilibrio, ma non una condizione fuori equilibrio. Possiamo qualitativamente dire che, con polarizzazione diretta ($V_a > 0$), l'ampiezza della regione di svuotamento si riduce, e sulla giunzione vi sarà tensione $V_j < \Phi_i$. Lontano dalla giunzione sappiamo che non abbiamo affetto della barriera, e che quindi molto "a sinistra" avremo un semiconduttore tipo p, e molto "a destra" un semiconduttore tipo n. Lontano dalla giunzione, avremo le stesse concentrazioni dell'equilibrio.

Volendo dunque calcolare le concentrazioni lontano dalla barriera, possiamo usare, come al solito caso di equilibrio, le equazioni di Shockley.

Dalle parti della barriera, in un mo interno, nascono i nostri problemi: il livello di Fermi presenta una discontinuità, come abbiamo visto nel precedente grafico qualitativo. La discontinuità sarà esprimibile come un "salto" di qV_a tra i due E_F . In regioni remote dunque sappiamo che fare, ma in prossimità della giunzione siamo fuori equilibrio, e così non sappiamo come procedere.

L'idea su cui ci fondiamo è questa: con le equazioni di Shockley si possono studiare, in funzione di E_F , le concentrazioni. Come possiamo descrivere un semiconduttore in funzione del livello di Fermi, fuori dall'equilibrio? Consideriamo un modello di basso livello di iniezione: in un semiconduttore drogato n, con N_D , ed un'iniezione di portatori, capita che i maggioritari restano inalterati, ed i minoritari subiscono una sensibile variazione. Ma cosa capita al livello di Fermi? Perché aumentano i minoritari, subirà una variazione. L'idea che ci permette di studiare i casi di non equilibrio, è l'introduzione di un "quasi livello di Fermi"; in zone di non equilibrio, sdoppiamo il livello di Fermi in due livelli: in prossimità dei maggioritari (nel nostro caso gli n_n), $E_{Fn} = E_F$, e cioè coinciderà con il livello all'equilibrio. Nei minoritari, si considererà (E_{Fp} , nel nostro caso), un nuovo livello, non all'equilibrio. Vediamo per capire ciò meglio il diagramma a bande qualitativo del semiconduttore drogato N_D :



Nel nostro "sdoppiamento", consideriamo dunque per i maggioritari, E_F dell'equilibrio, prima dell'iniezione; per i minoritari, E_{Fp} (nel nostro esempio) del dopo-iniezione. Distinguendo questi due livelli di Fermi (quello dei minoritari più spostato verso E_{Fi} rispetto a quello dei maggioritari), possiamo calcolare sia n_n che p_n , mediante le equazioni di Shockley.

$$N_D: \begin{cases} n_{n0} = n_i e^{\frac{E_F - E_{Fi}}{KT}} \\ p_{n0} = n_i e^{-\frac{E_F - E_{Fi}}{KT}} \end{cases} \quad N_A: \begin{cases} p_{p0} = n_i e^{\frac{E_{Fi} - E_F}{KT}} \\ n_{p0} = n_i e^{-\frac{E_{Fi} - E_F}{KT}} \end{cases}$$

In questi casi di equilibrio, la legge dell'azione di massa vale:

$$\begin{cases} N_D: n_{n0} \cdot p_{n0} = n_i^2 \\ N_A: n_{p0} \cdot p_{p0} = n_i^2 \end{cases}$$

Nei casi fuori equilibrio, le equazioni di Shockley saranno:

$$N_D: \begin{cases} n_n = n_i e^{\frac{E_{Fn} - E_{Fi}}{KT}} \\ p_n = n_i e^{-\frac{E_{Fp} - E_{Fi}}{KT}} \\ (E_{Fn} = E_F) \end{cases} \quad N_A: \begin{cases} p_p = n_i e^{\frac{E_{Fi} - E_{Fp}}{KT}} \\ n_p = n_i e^{-\frac{E_{Fi} - E_{Fn}}{KT}} \\ (E_{Fp} = E_F) \end{cases}$$

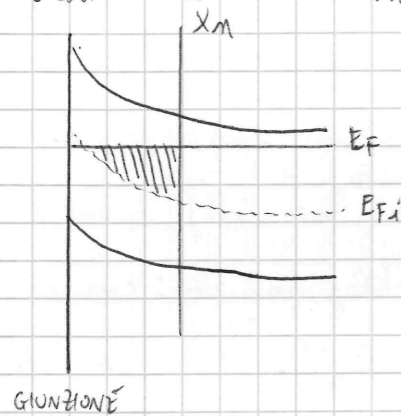
In questi casi fuori equilibrio, la legge dell'azione di massa subisce una variazione:

$$\begin{cases} N_D: n_n p_n = n_i^2 e^{\frac{E_{Fn} - E_{Fp}}{KT}} \\ N_A: p_p n_p = n_i^2 e^{\frac{E_{Fn} - E_{Fp}}{KT}} \end{cases}$$

Mediante questi strumenti teorici, i "quasi livelli di Fermi", possiamo studiare un semiconduttore fuori dall'equilibrio.

Cominciamo allo studio della giunzione, cercando di applicare questo strumento appena introdotto, e di usare le equazioni di Shockley sulle regioni di smottamento.

Supponiamo che lo smottamento di queste induca un basso livello di iniezione, e quindi che il vecchio livello di Fermi descriva la concentrazione dei maggioritari. Usando le equazioni di Shockley, si vede che la distanza $E_{Fn} - E_{Fi}$ al variare di x , nel lato n, è costante fino a $x = x_n$; di qui, diminuisce bruscamente, al variare di x . Analizziamo questa regione smottata:



Man mano che attraversiamo la zona di smottamento, l'area della zona tra E_F ed E_{Fi} diminuisce.

Lo si aiuta a calcolare $n_n(x)$:

$$n_n(x) = n_i e^{\frac{E_F - E_{Fi}(x)}{kT}}$$

A $x = x_n$, $n_n(x) = n_{n0}$; per $x < x_n$, vi è una diminuzione esponenziale degli elettroni: questo perché, per $x > x_n$, la neutralità è garantita dagli elettroni derivanti dagli ioni positivi (droganti).

$$x > x_n, \quad q(p_n - n_n + N_D^+); \quad p_n \approx 0, \quad \Rightarrow -n_n + N_D^+ \approx 0.$$

Via via che ci inoltriamo nella regione smottata, $n_n(x)$ diminuisce velocemente, perché abbiamo dipendenza esponenziale da $E_F - E_{Fi}(x)$, quindi, dalla neutralità in cui $n_{n0} \approx N_D$, $q=0$, si arriva a $n_n \ll n_{n0}$; $n_n \ll N_D$; $q \approx N_D$.

Questa è una verifica a posteriori della validità dell'ipotesi di completo smottamento. Si noti che nella regione di smottamento esistono molti portatori, ma in numero trascurabile rispetto a N_D . Lo stesso ragionamento vale per il lato p.

La transizione delle concentrazioni avverrà con una certa gradualità; partendo dall'ipotesi di basso livello di iniezione, e dal fatto che i maggioritari nel lato n sono descritti da $E_F = E_{Fn}$, e nel lato p da $E_F = E_{Fp}$, possiamo architettare le nostre congetture.

• In equilibrio,
$$n_p(-x_p) = n_i e^{-\frac{E_{Fi}(-x_p) - E_F}{kT}} \quad (1)$$

• Fuori equilibrio,
$$n_p(-x_p) = n_i e^{-\frac{E_{Fi}(-x_p) - E_{Fn}}{kT}} \quad (2)$$

Ma, nel lato p, all'equilibrio, $E_F = E_{Fp}$. Ricorriamo da n_i , dopo aver introdotto $E_F = E_{Fp}$:

$$n_{p0} = n_i e^{-\frac{E_{Fi}(-x_p) - E_{Fp}}{kT}} \quad \Rightarrow \quad n_i = n_{p0} e^{\frac{E_{Fi}(-x_p) - E_{Fp}}{kT}}$$

Sostituendo n_i in (2),

$$n_p(-x_p) = n_{p0} e^{\frac{E_{Fi}(-x_p) - E_{Fp}}{kT}} \cdot e^{-\frac{E_{Fi}(-x_p) - E_{Fn}}{kT}} = n_{p0} e^{-\frac{E_{Fp} - E_{Fn}}{kT}}$$

Dualmente, nel lato n, per $x = +x_n$, si ottiene, mediante gli stessi passaggi, che

$$p_n(x_n) = p_{n0} e^{\frac{E_{Fn} - E_{Fp}}{kT}}$$

Ma
$$\frac{E_{Fn} - E_{Fp}}{kT} = \frac{V_a}{V_T}, \quad V_T \text{ equivalente in tensione della temperatura.}$$

Abbiamo così ricavato due equazioni fondamentali per lo studio della giunzione p-n:

$n_p(-x_p) = n_{p0} e^{\frac{V_a}{V_T}} = \frac{n_i^2}{N_A} e^{\frac{V_a}{V_T}}$	LEGGI DELLA GIUNZIONE
$p_n(+x_n) = p_{n0} e^{-\frac{V_a}{V_T}} = \frac{n_i^2}{N_D} e^{-\frac{V_a}{V_T}}$	

Cerchiamo di capire l'importanza ed il significato; l'esperienza iniziale era quella di capire quale concentrazione di carica si originasse, ossia quanti elettroni andavano dal lato n al lato p, o quanti lacune dal lato p al lato n, in seguito ad una modulazione della barriera, in prossimità di $x = -x_p$ ed $x = x_n$.

Siamo arrivati a capire, mediante la formulazione delle leggi della giunzione, che la popolazione si sposta esponenzialmente con la barriera, ossia si ha uno smostamento esponenziale delle regioni di modulamento.

Abbiamo introdotto nella giunzione i "quasi livelli di Fermi":

possiamo immaginare che, all'aumentare della distanza dalla giunzione, tendano asintoticamente ad unirsi, nel livello di Fermi E_F all'equilibrio.

La legge della giunzione "infestera" con gli esponenziali quasi tutte le equazioni di funzionamento dei dispositivi elettronici. Ciò deriva dalla derivazione dalle equazioni di Shockley, da loro volta derivano dall'approssimazione della distribuzione di Fermi-Dirac a quella di Boltzmann.