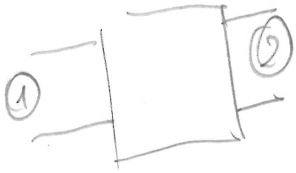
Ripasso microonde

Matrice $\underline{\underline{S}}$



Ricordando che:

$$\Gamma \triangleq \frac{V^-(z)}{V^+(z)}$$

La matrice $\underline{\underline{S}}$ è una sorta di "Γ generalizzato", ed è tale da avere:

$$\underline{b} = \underline{\underline{S}}\,\underline{a}$$

dove:

$$a_n = \frac{V_n^+}{\sqrt{Z_{0n}}} \ ; \quad b_n = \frac{V_n^-}{\sqrt{Z_{0n}}} \qquad [V_n^+ \text{ e } V_n^- \text{ Fasori}]$$

$$\begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{12} a_2 + \dots + S_{1n} a_n \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{22} a_2 + \dots + S_{2n} a_n \\ \vdots \\ b_n = S_{n1} a_1 + S_{n2} a_2 + \dots + S_{nn} a_n \end{cases}$$

dove i S_{ii} sono coeff. di rifl. alle porte "i", ex

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\Big|_{a_j=0,\ j\neq 1} = \frac{V_1^-}{V_1^+} = \Gamma_1 .$$

mentre

$$S_{ij}\Big|_{i\neq j} = \frac{b_i}{a_j}\Big|_{a_k=0\ \forall k\neq j}$$

Formule IMPORTANTI per il calcolo di $\underline{\underline{S}}$:

$$\zeta = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \ ; \quad \Gamma = \frac{\zeta-1}{\zeta+1} \ ; \quad y = \frac{1-\Gamma}{1+\Gamma} \ ; \quad {}^I\Gamma = \frac{y-1}{y+1} \rightarrow {}^V\Gamma = \frac{1-y}{1+y}$$

Trasporto di Γ:

$$\Gamma_1 = S_{11} + \frac{S_{21} S_{12} \Gamma_2}{1 - S_{22}\Gamma_2}$$

per dualità:

$$\Gamma_2 = S_{22} + \frac{S_{21} S_{12} \Gamma_1}{1 - S_{11}\Gamma_1}$$

Proprietà della potenza:

$$\underline{\underline{S}}^{T*}\,\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{I}}$$

$$P_i = \frac{1}{2}\left[\frac{|V_i^+|^2}{Z_0} - \frac{|V_i^-|^2}{Z_0}\right] = \frac{1}{2}\left[|a_i|^2 - |b_i|^2\right]$$

ROS (S):

$$\boxed{S = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{\text{coeff. di Tx max}}{\text{coeff. di Tx min}}}$$

Filtri a microonde

Prima, progetto filtri RLC; poi, microonde.

Progetto: si basa su "insertion loss":

Progetto: si basa su "insertion loss"; si definisce il power loss ratio P_{LR} come:

$P_{ass} = P_{inc}\left[1-|\Gamma|^2\right]$; si definisce il power loss ratio

Per ipotesi, $Z_{r1} = Z_{0g}$ $Z_{r2} = Z_L$

$Z_L \in \mathbb{R}$ (solo resistiva).

$P_{LR} \triangleq \dfrac{P_{inc}}{P_{inc}[1-|\Gamma|^2]} = \dfrac{1}{1-|\Gamma|^2}$; il filtro è un 2-porte!

Idealmente, il filtro è reattivo, dunque NO PERDITE:

$P_B = P_A\left[1-|\Gamma_A|^2\right]$. $\Gamma_A = S_{11} + \dfrac{S_{12}S_{21}\Gamma_B}{1-S_{22}\Gamma_B} \longrightarrow \Gamma_B = 0$! (adatto sul carico) $\rightarrow \Gamma_A = S_{11}$.

$\hookrightarrow P_{LR} = \dfrac{1}{1-|S_{11}|^2}$.

MA: $\underline{\underline{S}}^{*T}\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{I}}$, e si ha reciprocità! $\begin{pmatrix} S_{11}^* & S_{21}^* \\ S_{21}^* & S_{22}^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$

$\hookrightarrow P_{LR} = \dfrac{1}{|S_{21}|^2}$ ossia, P_{LR} è legato al coeff. di Tx! $\dfrac{1}{|S_{21}|^2} = \dfrac{1}{H(j\omega)}$!

Ragionamento: perché sia realizzabile, dato $\zeta_{in}(\omega) = r(\omega) + jx(\omega)$, $\begin{cases} r(\omega) \text{ PARI} \\ x(\omega) \text{ dispari} \end{cases}$

$\hookrightarrow \Gamma(\omega) = \dfrac{\zeta_{in}-1}{\zeta_{in}+1} = \dfrac{r(\omega)+jx(\omega)-1}{r(\omega)+jx(\omega)+1} = \dfrac{[r(\omega)-1]+jx(\omega)}{[r(\omega)+1]+jx(\omega)}$. $\Gamma(-\omega) = \Gamma^*(\omega)$!

$\hookrightarrow$ si può dir che: $\Gamma(\omega)\Gamma^*(\omega) = \Gamma(\omega)\Gamma(-\omega)$.

si suppone che: $|\Gamma(\omega)|^2 = \dfrac{M(\omega^2)}{M(\omega^2)+N(\omega^2)}$; $P_{LR} = \dfrac{1}{1-|\Gamma|^2} = 1 + \dfrac{M(\omega^2)}{N(\omega^2)}$ spesso, $N(\omega^2) = 1$

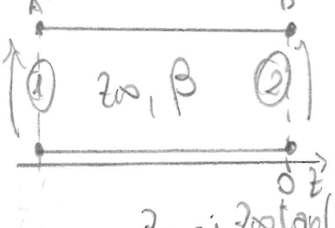
~~2 bis: ricavare Butterworth / Chebyshev.~~

Filtri RLC prototipo: dato N, si prendono i vari g_i, dunque si denormalizzano rispetto a frequenza e impedenza. Ricordare, generalmente!

$L = g_n Z_{\infty}$; $C = g_m Y_{\infty}$. $Y_{\infty} = \dfrac{1}{Z_{\infty}}$. $Z_{\infty} \equiv Z_{r1}$;

Filtri passa-basso step-impedance.

Capirlo!



$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$;

calcolo gli elementi della I^a colonna.

$Z(z) = \dfrac{Z_0 - jZ_{\infty}\tan(\beta l)}{1 - jZ_0 Y_{\infty}\tan(\beta l)}$ per $l = 0$ ($=B$), $Z_0 \longrightarrow \infty$

$\hookrightarrow \lim\limits_{Z_0 \to \infty} Z(z) = -jZ_{\infty}\cot an(\beta l)$; poi, da TRFL, è noto che:

$$\begin{cases} V(l) = V_0\cos(\beta l) - I_0 j Z_{\infty}\sin(\beta l) \\ I(l) = -jV_0 Y_{\infty}\sin(\beta l) + I_0\cos(\beta l) \end{cases}$$

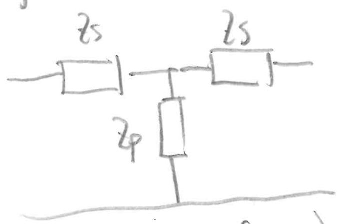
Mettiamo in relazione V_2 e I_1:

$$\begin{cases} I_2 = -j V_1 Y_\infty \sin(\beta l) + I_1 \cos(\beta l) \\ V_2 = V_1 \cos(\beta l) - j I_1 \sin(\beta l) \end{cases}$$

ma $I_2 = 0$ poiché la linea è su  !

$\hookrightarrow + j V_1 Y_\infty \sin(\beta l) = I_1 \cos(\beta l) \rightarrow V_1 = -j \dfrac{Z_\infty \cos(\beta l)}{\sin(\beta l)} I_1$

$$V_2 = -j Z_\infty \frac{\cos^2(\beta l)}{\sin(\beta l)} I_1 - j Z_\infty I_1 \sin(\beta l) \Rightarrow V_2 = -j Z_\infty \frac{\cos^2 + \sin^2}{\sin \beta l} I_1 = -j Z_\infty \frac{I_1}{\sin \beta l}$$

$\underline{\underline{Z}} \longrightarrow$ 

$$\begin{cases} Z_p = Z_{21} = -j \dfrac{Z_\infty}{\sin(\beta l)} \\ Z_s = Z_{11} - Z_{21} = j Z_\infty \tan\left(\dfrac{\beta l}{2}\right). \end{cases}$$

Ipotesi: $\beta l < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow l < \frac{\lambda}{4} \rightarrow \sin(\beta l) > 0$, $Z_p < 0 \rightarrow$ capacità!

$Z_s > 0 \rightarrow$ induttanza.

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} Z_s = j \dfrac{X_s}{2} \\ Z_p = j B_p \end{Bmatrix} \Longrightarrow \text{se } \beta l < \frac{\lambda}{8}, \text{ uso Taylor} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{X_s}{2} \approx Z_\infty \dfrac{\beta l}{2} \\ B_p \approx Y_\infty \beta l \end{cases}$$

Infine: se Z_∞ è grande, $B_p \rightarrow 0 \Longrightarrow$ 

e viceversa. Dunque:

$$\begin{cases} X_s = Z_\infty \beta l \\ B_p = Y_\infty \beta l \end{cases}$$

Trasformazioni di frequenza:

Passa-basso: $L_n = \dfrac{g_n R_0}{\omega_c}$; $C_n = \dfrac{g_n}{\omega_c R_0}$

Passa-alto: $C_n = \dfrac{1}{\omega_c R_0 g_n}$ $L_n = \dfrac{R_0}{\omega_c g_n}$

Passa-banda: $\omega \rightarrow \dfrac{1}{\Delta}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)$

$\Delta = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0}$; $\omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$;

$$\begin{cases} L_n = \dfrac{g_n R_0}{\Delta \omega_0}; \; C_n = \dfrac{\Delta}{\omega_0 R_0 g_n} & (X_n) \\ C_n = \dfrac{g_n}{\Delta \omega_0 R_0}; \; L_n = \dfrac{\Delta R_0}{\omega_0 g_n} & (B_n) \end{cases}$$

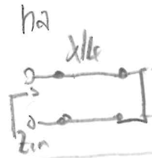
Rigetta-banda:

$\omega \rightarrow -\Delta \left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^{-1}$

$$\begin{cases} C_n = \dfrac{1}{\Delta g_n \omega_0 R_0}; \; L_n = \dfrac{\omega_0}{\Delta g_n R_0} & (B_n) \\ L_n = \dfrac{R_0}{\Delta g_n \omega_0}; \; C_n = \dfrac{\Delta g_n}{\omega_0 R_0} & (X_n) \end{cases}$$

Filtri generici a p. distribuiti.

È noto (vedi CdS) che una linea chiusa in corto e per cui $\beta l < \frac{\pi}{2}, \rightarrow l < \frac{\lambda}{4}$, ha di certo un comportamento induttivo. È noto che:



$Z_{in} = j Z_\infty \tan(\beta l)$; Se chiusa in circuito aperto, invece,

$Z_{in} = -j Z_\infty \cot(\beta l)$ [ciò realizza un carico capacitivo, $\beta l < \frac{\pi}{2}$]

Idea: dato il prototipo, posso sostituire CON DEGLI STUB gli elementi a parametri concentrati!!

Trasformazioni di Richards

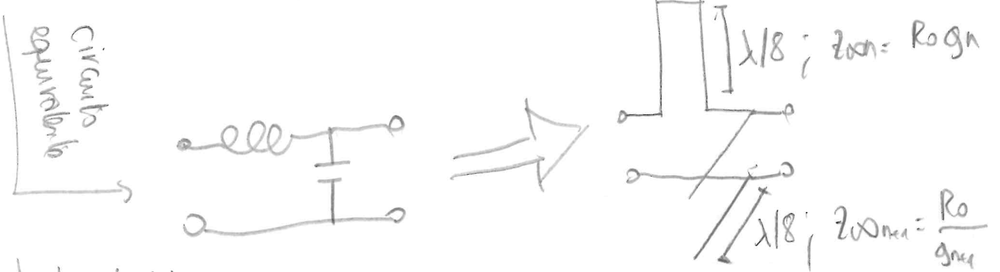
2 scelte:

①
$$\begin{cases} jX_n(\omega=\omega_c) = Z_{in}^{(c.c.)}\Big|_{\omega=\omega_c} \\ jB_n(\omega=\omega_c) = Y_{in}^{(c.A)}\Big|_{\omega=\omega_c} \end{cases}$$

② Tutte le lunghezze elettriche degli stub sono uguali, e pari a $\frac{\lambda_c}{8}$; in tal situazione: $\tan(\beta l) = \cot(\beta l) = 1$

Capita che: (passa basso)

$$Z_{00}^{(c.c.)} = \omega_c \frac{R_0 g_n}{\omega_c} = R_0 g_n \; ; \quad Z_{00}^{(c.A.)} = \frac{1}{\omega_c C_n} \longrightarrow \frac{1}{\omega_c \frac{g_n}{R_0 \omega_c}} = \frac{R_0}{g_n}.$$



"Filtro a linee commensurate".

Identità di Kuroda

Usiamo la matrice di trasmissione (ABCD): $\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$; $\underline{\underline{T}}$

Si sà che:
$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & -jZ_{00}\sin(\beta l) \\ -jY_{00}\sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

È come "percorrere la matrice in senso opposto; $l \longrightarrow -l$

$$\hookrightarrow \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta l) & jZ_{00}\sin(\beta l) \\ jY_{00}\sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \cos(\beta l) \begin{bmatrix} 1 & jZ_{00}\tan(\beta l) \\ jY_{00}\tan(\beta l) & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}$$

$$\underline{\underline{T_S}} = \begin{bmatrix} 1 & Z_S \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Z_S: imp equivalente dello stub $= jZ_{01}\tan(\beta l)$

$$\underline{\underline{T_1}} = \begin{bmatrix} 1 & jZ_{00}\tan(\beta l) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cos(\beta l) \begin{bmatrix} 1 & jZ_{02}\tan(\beta l) \\ jY_{02}\tan(\beta l) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{Z_{01}}{Z_{02}}\tan^2(\beta l) & j\tan\beta l\,[Z_{01}+Z_{02}] \\ jY_{02}\tan(\beta l) & 1 \end{bmatrix}$$

Poi:

$$\underline{\underline{T_P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Y_P & 1 \end{bmatrix}$$

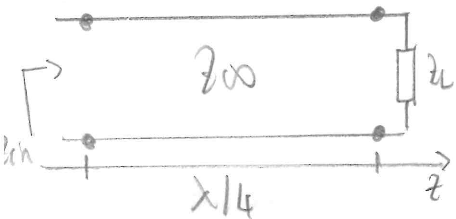
$$\hookrightarrow \underline{\underline{T_2}} = \begin{bmatrix} 1 & jn^2 Z_{00}\tan(\beta l) \\ j\frac{1}{n^2 Z_{01}}\tan(\beta l) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{j}{n^2 Z_{02}}\tan(\beta l) & 1 \end{bmatrix} \cos\beta l = \begin{bmatrix} 1 - \frac{Z_{01}}{Z_{02}}\tan^2(\beta l) & jn^2 Z_{01}\tan(\beta l) \\ j\tan\beta l\left[\frac{1}{n^2 Z_{01}} + \frac{1}{n^2 Z_{02}}\right] & 1 \end{bmatrix}$$

$$n^2 Z_{01} = \left(1 + \frac{Z_{02}}{Z_{01}}\right) Z_{01} \; ; \; \frac{1}{n^2 Z_{01}} + \frac{1}{n^2 Z_{02}} = \frac{Z_{01}+Z_{02}}{n^2 Z_{01} Z_{02}}$$

Invertitore di impedenza

Volendo realizzare un passa-alto o altro, Kuroda non è più valido (stub in C.A. in serie!), allora si deve inventare qualcosa di nuovo.

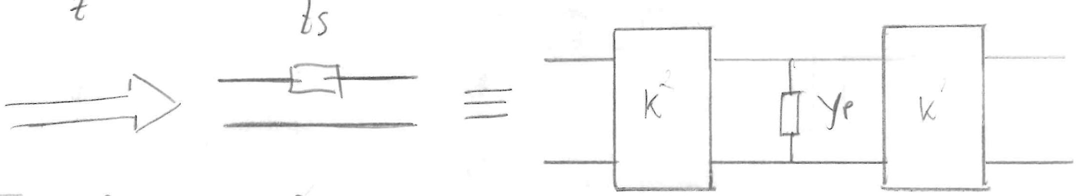
Usiamo un tratto di linea lungo $\lambda/4$:



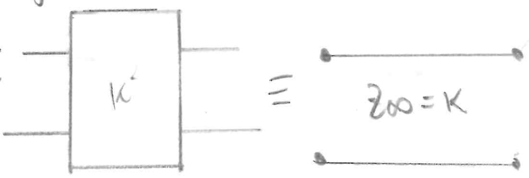
$$Z_{in} = \frac{Z_\infty^2}{Z_L}$$ [noto da TRF parlando di adattatore $\lambda/4$]

Si ha che:

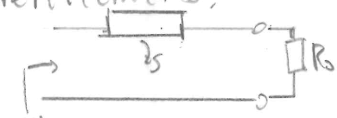
$Z_L = R_L + jX_L$



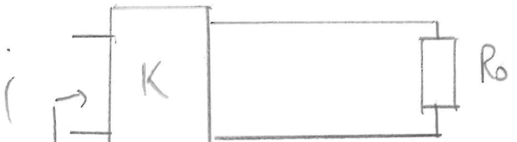
dove:



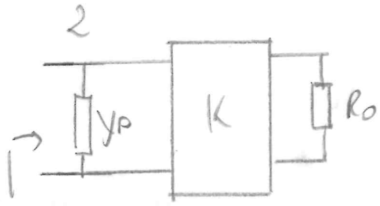
Verifichiamo:



$Z_{in}^{(S)} = Z_S + R_0$

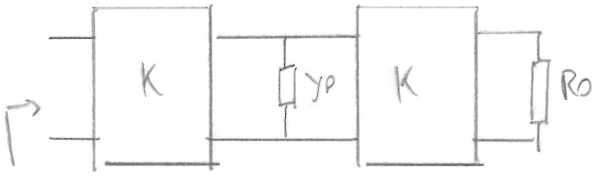


$Z' = \frac{K^2}{R_0}$



$Y_2 = Y_P + \frac{R_0}{K^2}$;

Infine:



$$Z_{in}^{(P)} = \frac{K^2}{Z_2} = K^2 Y_2 = K^2 Y_P + R_0$$

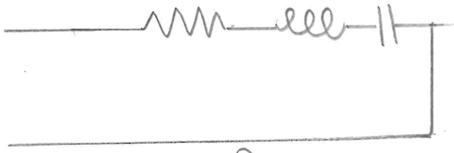
Applichiamolo per la capacità in serie:

$$Z_S = K^2 Y_P \longrightarrow \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = K^2 Y_P; \quad Y_P = -j\frac{1}{\omega C}\cdot\frac{1}{K^2} = \frac{1}{j\omega L} \quad \boxed{L = K^2 C}$$

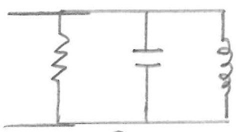
Questa è un'impedenza equivalente di tipo <u>induttivo</u>

Risonatori

Vogliamo realizzare risonatori a microonde. A parametri concentrati vi sono:



(1)



(2)

Dove:

$$\omega_C = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

$$Q_{serie} = \frac{\omega_0 L}{R}; \quad Q_{parallelo} = \frac{R}{\omega_0 L}$$

Vogliamo realizzarli a parametri concentrati.

Risonatore serie

$Z_{in} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$; raccogliendo: $\rightarrow = R + j\omega L\left[1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right]$

Si ha che:

$$1 - \frac{1}{\omega^2 LC} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)}{\omega^2}$$

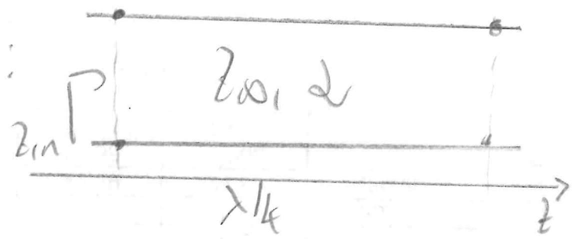
Vogliamo valutare ciò per $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, $\Delta\omega \ll \omega_0$;

$\hookrightarrow \omega - \omega_0 = \Delta\omega$;

$$\hookrightarrow = \frac{\Delta\omega(2\omega - \Delta\omega)}{\omega^2} = 2\frac{\Delta\omega}{\omega} + \cancel{\frac{\Delta\omega^2}{\omega^2}} \approx 0$$

$$\hookrightarrow Z_{in} \approx R + j\omega L \cdot \frac{2\Delta\omega}{\omega} = R + j2\Delta\omega L$$

A p. distribuiti, proviamo con ciò:



$$\hookrightarrow Z_{in} = Z_\infty \coth[(\alpha+j\beta)l] =$$

$$= Z_\infty \frac{1 + j\,\text{th}(\alpha l)\tan(\beta l)}{\text{th}(\alpha l) + j\tan(\beta l)}$$; ma $\beta l = \frac{2\pi}{\lambda} l = \frac{2\pi f}{v_f} l = \frac{\omega}{v_f} l$

Questo, per $l = \lambda/4$, e per $\omega_0 + \Delta\omega$:

$$\left[\frac{\omega_0}{v_f} + \frac{\Delta\omega}{v_f}\right]\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\omega}{v_f}\frac{\lambda}{4} \; ; \; \frac{\Delta\omega}{\cancel{v_f}}\frac{\cancel{v_f}}{f_0}\frac{1}{4} = \frac{\Delta\omega}{4f_0}$$

$$\beta l = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\omega}{4f_0} = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta\omega}{4}\frac{2\pi}{2\pi f_0} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0};$$

$$\tan(\beta l) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \approx \left(-\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^{-1};$$

sostitui

$$Z_{in} = Z_\infty \frac{1 + j\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^{-1}\text{th}(\alpha l)}{\text{th}(\alpha l) + j\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^{-1}} \approx \frac{1 + j\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^{-1}\alpha l}{\alpha l + j\left(-\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^{-1}} Z_\infty$$

$$\hookrightarrow = \frac{-j\left[\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right]^{-1}\left[+j\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0} + \alpha l\right]}{-j\left[\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right]^{-1}\left[+1 + j\underbrace{\alpha l\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}}_{\ll 1}\right]} \approx Z_\infty\left[\alpha l + j\frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right]$$

$Z_{in} = Z_{in}$ $\rightarrow R = Z_\infty \alpha l$

$\downarrow$

$2L\Delta\omega = \frac{\pi}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega_0}Z_\infty \rightarrow L = \frac{Z_\infty}{\omega_0}\frac{\pi}{4}$

$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Re}\{\} = \mathrm{Re}\{\} \\ \mathrm{Im}\{\} = \mathrm{Im}\{\}\end{array}\right\} \rightarrow Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{\pi}{4\alpha l} = \frac{\beta}{2\alpha}$

[poiché $\frac{\pi}{4} = \frac{\beta l}{2}$]

Per il risonatore parallelo, allo stesso modo si vede che:

$$Z_{in} \approx \frac{R}{1+j2\Delta\omega RC} \; ; \quad Z_{in} \approx Z_0 \frac{1}{\alpha l + j\frac{\pi \Delta\omega}{2\omega_0}}$$

$$\hookrightarrow R = \frac{Z_0}{\alpha l} \; ; \quad C = \frac{\pi}{4 Z_0 \omega_0}$$

Perdite nei circuiti

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_c$$ [α_d: perdite dielettrico; α_c: perdite conduttore]

Da formule "non note":

$$\alpha_c = \frac{R_s}{Z_0 W} \qquad R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}}$$ [Ciò è legato all'effetto pelle]

Per il dielettrico, si fa così:

$$\nabla \times \underline{H} = -j\omega\varepsilon \underline{E} + \sigma \underline{E} = \underline{E}\left[\sigma - j\omega\varepsilon\right] = -j\omega\varepsilon \underline{E}\left[1 + \frac{\sigma}{-j\omega\varepsilon}\right] =$$
$$= -j\omega\varepsilon \underline{E}\left[1 + j\tan(\delta)\right]$$

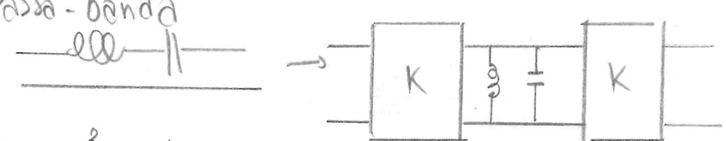
Per la microstriscia vi è una formula "empirica":

$$\alpha_d = \frac{k_0 \varepsilon_r (\varepsilon_{eff} - 1)\tan(\delta)}{2\sqrt{\varepsilon_{eff}}(\varepsilon_r - 1)}$$

Filtri passa-banda / Rigetta-banda

Che si fa? Beh, I risonatori sono la base per il progetto di filtri passa/rigetta banda. Si usan dei risonatori (tratti di linea $\lambda/4$) e l'invertitore di impedenza.

Passa-banda



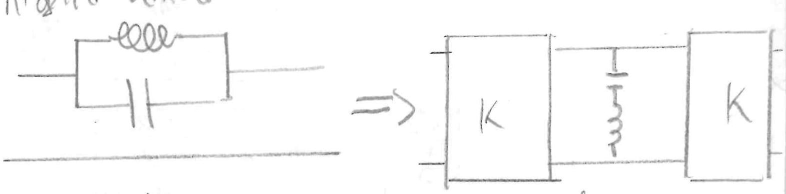
$Z_s = K^2 Y_P$;

$Z_s = j\omega L_n - \frac{j}{\omega C_n}$; $Y_P = j\omega C_P - \frac{j}{\omega L_P}$

$\rightarrow \cancel{j\omega} L_n = K^2 \cancel{j\omega} C_P \qquad L_n = K^2 C_P$

$-\frac{j}{\omega C_n} = -\frac{j}{\omega L_P} K^2 \rightarrow C_n = \frac{L_P}{K^2}$

Rigetta-banda



$Z_{in} = \frac{1}{j\omega C_n - \frac{j}{\omega L_n}}$; $Y_P = K^2 \frac{1}{j\omega L_s - \frac{j}{\omega C_s}}$

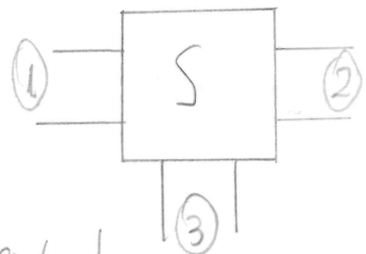
$j\omega C_n = \frac{j\omega L_s}{K^2} \rightarrow C_n = \frac{L_s}{K^2}$;

$-\frac{j}{\omega C_s K^2} = -\frac{j}{\omega L_n} \rightarrow L_n = K^2 C_s$

Dispositivi a 3 porte

Introduzione: data la matrice:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$$



Calcolando $\underline{\underline{S}}^{T*}$ e facendo il prodotto, si ottengono le seguenti relazioni (e altre):

$$\begin{cases} |S_{12}|^2+|S_{13}|^2=1 \\ |S_{12}|^2+|S_{23}|^2=1 \\ |S_{13}|^2+|S_{23}|^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} S_{13}^* S_{23}=0 \\ S_{12}^* S_{23}=0 \\ S_{12}^* S_{13}=0 \end{cases}$$

Vediamo se può essere reciproca adattata, senza perdite, ossia se è possibile che la matrice abbia questa forma:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & 0 & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & 0 \end{bmatrix} \text{ e, } \underline{\underline{S}}^{T*}\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{I}}$$

Se annullo S_{13} e S_{23}, cosa necessaria per il secondo gruppo, si cade in un assurdo nel primo! NON è possibile avere al contempo le 3 condizioni

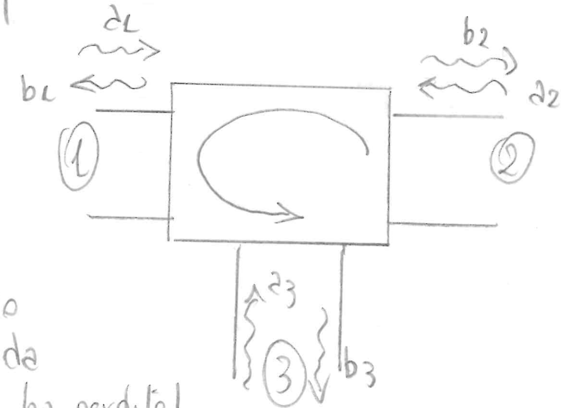
I diversi dispositivi si ricaveranno proprio rilasciando solo una delle condizioni

Circolatore

Non chiediamo la reciprocità: $\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$

Facendo i conti con la matrice, risulta necessario annullare un elemento per riga; per esempio, si ottiene:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & S_{23} \\ S_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} b_1 = S_{12}\, a_2 \\ b_2 = S_{23}\, a_3 \\ b_3 = S_{31}\, a_1 \end{cases}$$

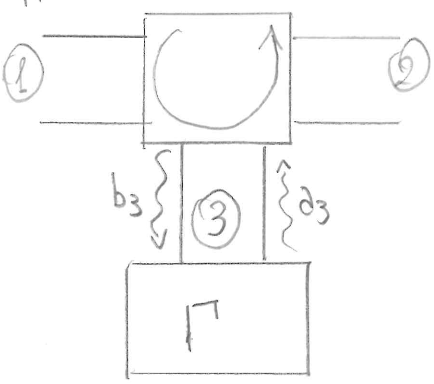


Si interpreta così: dato a_2 entrante, ho qualcosa che esce da b_1, e così via; da qui, "circolatore antiorario" (ideale: non ha perdite)

Circolatore orario ideale:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} \\ S_{21} & 0 & 0 \\ 0 & S_{32} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} b_1 = S_{13}\, a_3 \\ b_2 = S_{21}\, a_1 \\ b_3 = S_{32}\, a_2 \end{cases}$$

Applicazione: reti di distribuzione dei segnali (isolamento canali), o la seguente:



La porta "3" in realtà non fa parte del "sistema globale", dal momento che essa è occupata da un carico con coefficiente Γ.

Obiettivo: calcolare S_{21} (coeff. di Tx da porta 1 a porta 2):

$$S_{21} = \left.\frac{b_2}{a_1}\right|_{a_2=0}$$

Ricordiamo le equazioni del circolatore:

$$\begin{cases} b_1^C = S_{12}^C a_2^C \\ b_2^C = S_{23}^C a_3^C \\ b_3^C = S_{31}^C a_1^C \end{cases}$$

$b_2^C \equiv b_2 = S_{23}^C a_3$; $a_3 = \Gamma b_3 = \Gamma S_{31}^C a_1$;

$\hookrightarrow S_{21} = S_{23}^C \Gamma S_{31}^C$

Al momento della dimostrazione, considerando ideale il circolatore, imponemmo $|S_{23}^C| = |S_{31}^C| = 1$; dato ingresso in 1 e uscita in 2:

$$P_{out} = \frac{1}{2}\frac{|V_2^+|^2}{2r_2} = \frac{1}{2}|b_2|^2; \qquad P_{in} = \frac{1}{2}\frac{|V_1^+|^2}{2r_1} = \frac{1}{2}|a_1|^2;$$

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{\frac{1}{2}|S_{23}^C S_{31}^C \Gamma|^2 |a_1|^2}{\frac{1}{2}|a_1|^2} = |\Gamma|^2.$$

Note:

- Se Γ deriva da un carico ζ per cui $\mathrm{Re}\{\zeta\} < 0$, abbiamo un amplificatore;
- Se $|\Gamma| = 1$, possiamo guardar la fase: infatti, se tutto è adattato: $V_2 \equiv V_2^+$; se poi si sceglie un piano di riferimento per cui si ha

$\angle V_2^+ = \angle S_{21} + \angle V_1$;

$\angle S_{23}^C = \angle S_{31}^C$

Allora lo sfasamento è pari a $\angle\Gamma$.

Divisori di potenza

Ri-introduciamo la reciprocità, e disadattiamo una sola porta: $S_{33} \neq 0$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & 0 & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}; \xrightarrow{\text{da P ottengo ciò}} \begin{cases} |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{23}|^2 = 1 \\ |S_{13}|^2 + |S_{23}|^2 + |S_{33}|^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} S_{13}^* S_{23} = 0 \\ S_{12}^* S_{23} + S_{13}^* S_{33} = 0 \\ S_{12}^* S_{13} + S_{23}^* S_{33} = 0 \end{cases}$$

A tentativi, si vede che $S_{13} = S_{23} = 0$ rispetta; ottengo:

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix}$$

Questa $\underline{\underline{S}}$ indica un 3-porte con porta 3 isolata.
È inutile.

Rilasciamo un'altra condizione: $S_{22} \neq 0$. Si avrà un dispositivo del tipo:

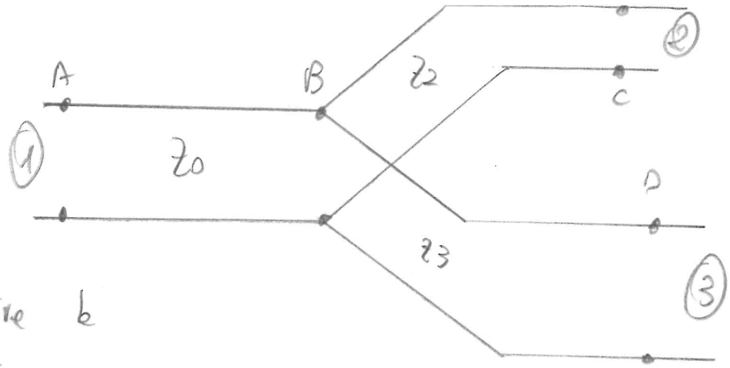
$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{bmatrix}$$

Sicuramente la condizione sulla potenza è valida: era valida prima, in condizioni più stringenti, ma dunque anche ora!

Ciò servirà per ottenere dei "divisori di potenza".

Divisore di potenza a "T"

Consideriamo il seguente circuito:



$Z_{r1}=Z_0$; $Z_{r2}=Z_2$; $Z_{r3}=Z_3$.

Verifichiamo che $S_{11}=0$, per capire le proprietà del dispositivo: $S_{11}=\Gamma_{A^-}$

$\Gamma_{A^-}=\Gamma_L=0$; ma dunque, $\Gamma_{B^-}=0$; ma dunque, $Z_2 \parallel Z_3 = Z_0$ (o, $Y_0=Y_2+Y_3$)

Dunque, a patto che $Y_0=Y_2+Y_3$, si può "scegliere qualsiasi Y".

Questo è un divisore di potenza; infatti:

$P_B=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{Y_0\}|V_B|^2=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{Y_2+Y_3\}|V_B|^2$; $P_C=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{Y_2\}|V_C|^2$; $P_D=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{Y_3\}|V_D|^2$;

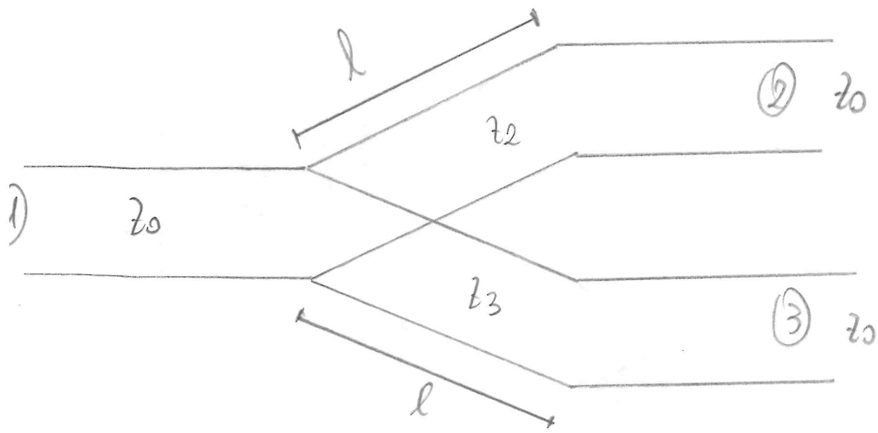
Però, una nota: il modulo della tensione totale è costante sulla linea (varia solo la sua fase!), dunque $|V_B|^2=|V_C|^2=|V_D|^2$. Da qui:

$P_{BC}=\frac{\mathrm{Re}\{Y_2\}}{\mathrm{Re}\{Y_2+Y_3\}}$; $P_{BD}=\frac{\mathrm{Re}\{Y_3\}}{\mathrm{Re}\{Y_2+Y_3\}}$; se poi $\mathrm{Im}\{Y_2\}=\mathrm{Im}\{Y_3\}=0$

↳ $\frac{P_2}{P_1}=\frac{Y_2}{Y_0}$; $\frac{P_3}{P_1}=\frac{Y_3}{Y_0}$ → dato $\alpha \triangleq \frac{P_2}{P_1}$, $\frac{P_3}{P_1}=1-\alpha$

Svantaggi: disadattamento e accoppiamento delle porte di uscita.

Variante dello schema:



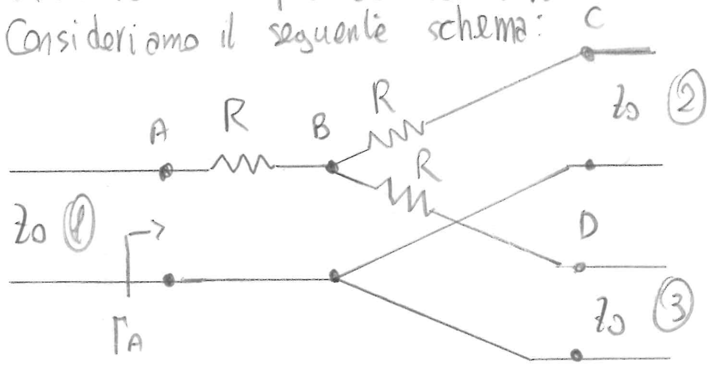
$Z_{r1}=Z_{r2}=Z_{r3}=Z_0$;

$l=\frac{\lambda}{4}$;

Z_2 e Z_3 parametri di progetto

Divisore di potenza resistivo

Consideriamo il seguente schema:

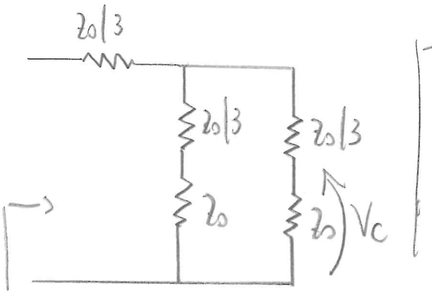


L'idea è: sacrifico l'idealità del dispositivo, per far guadagnare altri vantaggi.

dove $R=\frac{Z_0}{3}$

Studiamo lo schema: calcoliamo $S_{11} = \Gamma_A$; dal momento che il circuito è visibilmente simmetrico, $S_{11} = S_{22} = S_{33}$.

Lo schema risultante "quasi-elettrotecnico" è:



→ Essendo $z_A = z_0$, $\Gamma = 0$: $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$: si ha adattamento su tutte le porte!

$$Z = z_0/3 + [z_0 + z_0/3] \,\|\, [z_0 + z_0/3] = z_0$$

Al fine di continuare la caratterizzazione, calcolo S_{21}:

$$S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\Big|_{a_2 = a_3 = 0} \longrightarrow \frac{b_2}{a_1} = \sqrt{\frac{z_0}{z_0}} \cdot \frac{V_c^+}{V_A^+} = \frac{V_c}{V_A} \quad [\text{per adattamento}];$$

guardiamo il circuito di prima: si può vedere, con la semplice elettrotecnica, che:

$$V_B = V_A \cdot \frac{2/3\; z_0}{z_0/3 + 2z_0/3} = \frac{2}{3} V_A; \qquad V_C = \frac{z_0}{z_0/3 + z_0} V_B = \frac{3}{4} V_B;$$

$$\frac{V_C}{V_A} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

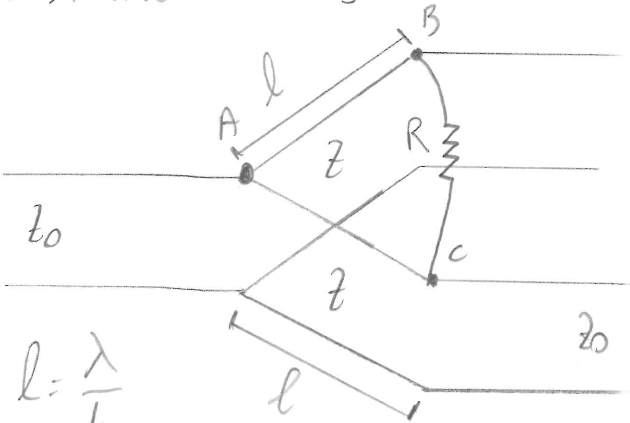
Date le simmetrie presenti nel circuito si può dire che:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2};$$

Si può vedere che questa matrice non è unitaria.

Divisore di potenza "Wilkinson"

Consideriamo il seguente schema:



$l = \frac{\lambda}{4}$

Data la reciprocità, chiediamo che la matrice del dispositivo abbia forma:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & 0 \\ S_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} S_{12} = S_{21} \\ S_{13} = S_{31} \end{cases}$$

Per simmetria, inoltre, $S_{13} = S_{12}$

$$\longrightarrow \underline{\underline{S}} = S_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obiettivo: scoprire quando e se ciò è vero, e per quali valori di Z e R.

Data la seguente matrice di partenza:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} \end{bmatrix}$$

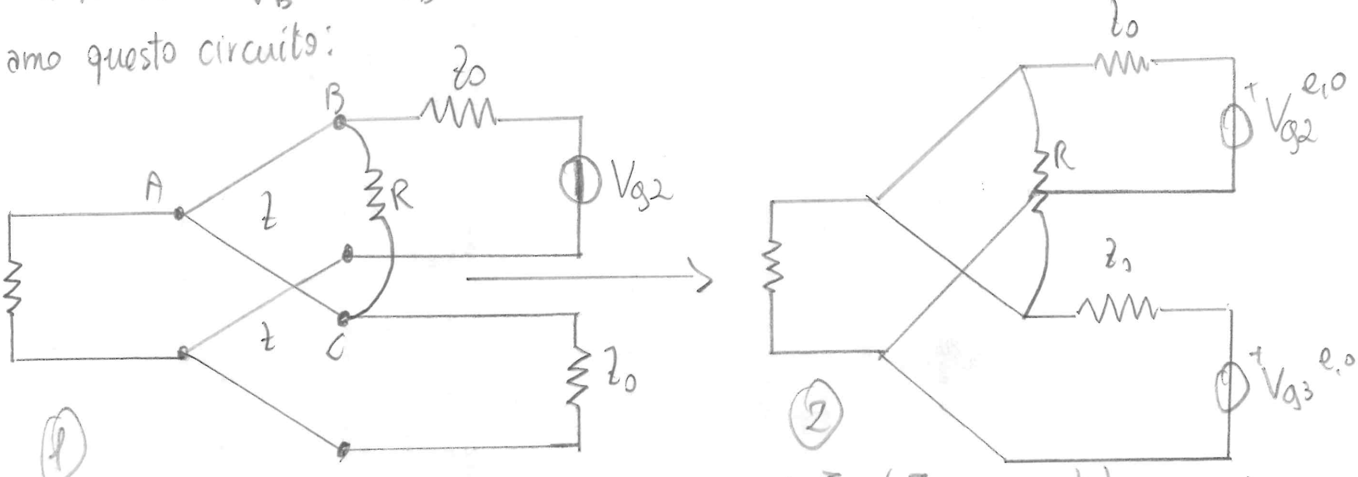
Vogliamo:

$$S_{12} = \frac{b_1}{a_2}\Big|_{a_1=a_3=0} = \frac{V_{A^+}^{+}}{V_{B^-}^{+}} = \frac{V_A}{V_{B^-}^{+}} \quad \text{[per adattamento]}$$

$$S_{22} = \frac{b_2}{a_2}\Big|_{a_1=a_3=0} = \frac{V_{B^-}^{-}}{V_{B^-}^{+}} = \Gamma_{B^-}$$

$$S_{32} = \frac{b_3}{a_2}\Big|_{a_1=a_3=0} = \frac{V_{C^+}^{+}}{V_{B^-}^{+}} = \frac{V_C}{V_{B^-}^{+}}$$

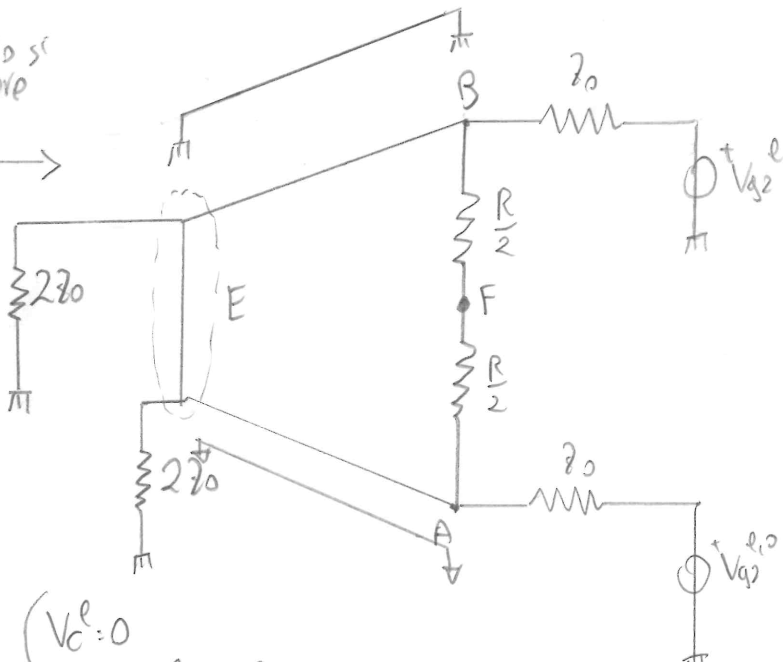
Usiamo questo circuito:



Data, nel circuito iniziale, generatore $V_{g2} = 2\xi$ (ξ costante), si può pensare il circuito 1 come il 2, data la eccitazione risultante come sovrapposizione dei seguenti effetti:

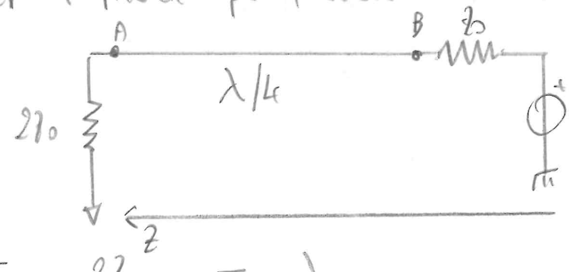
$$\begin{cases} V_{g2}^{e} = \xi \\ V_{g3}^{e} = \xi \end{cases} ; \quad \begin{cases} V_{g2}^{o} = \xi \\ V_{g3}^{o} = -\xi \end{cases}$$

Il circuito si può vedere così: $\longrightarrow$



La bifilare può esser vista come due conduttori, di cui uno a massa. La Z_0 su "A" come $(2Z_0)\|(2Z_0)$, e la R come $\frac{R}{2}+\frac{R}{2}$.

Per i modi pari, basta studiare:



si ha:
$$\begin{cases} V_C^{e} = 0 \\ V_{B^-}^{+e} = \frac{1}{2} V_{g2}^{e} \\ V_{B^-}^{e} = 0 \\ V_A^{e} = -j\frac{1}{\sqrt{2}} V_{g2}^{e} \end{cases}$$

$$\zeta_A = \frac{2Z_0}{Z} ; \quad \overline{AB} = \frac{\lambda}{4}$$

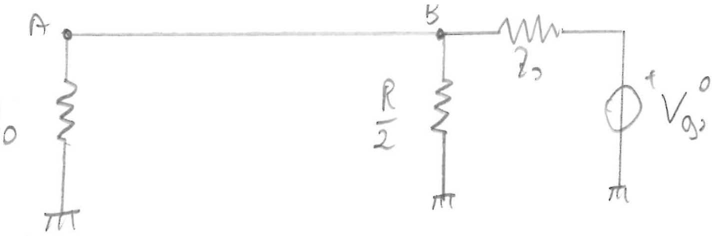
$$\hookrightarrow \zeta_{B^+} = \frac{1}{\zeta_A} = \frac{Z}{2Z_0} ; \quad Z = \zeta_{B^+} Z = \frac{Z^2}{2Z_0} ;$$

$$\Gamma_{B^-}^{e} = 0 \longrightarrow Z_B = Z_0 \longrightarrow Z = \sqrt{2}\, Z_0 ; \quad V_B = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_B} V_{g2}^{e} = \frac{1}{2} V_{g2}^{e}$$

$$V_A = V_A^{+}[1+\Gamma_A] = V_{B^+}^{+}\exp(-jkl)[1+\Gamma_A] = -jV_{B^+}^{+}[1+\Gamma_A] ;$$

$$V_A = -j\,\frac{1+\Gamma_A}{1+\Gamma_{B^+}}\cdot\frac{1}{2}V_{g2}^{e} . \qquad \Gamma_{B^+} = -\Gamma_A \longrightarrow V_A = -\frac{j}{2}\zeta_A V_{g2}^{e} = \frac{-j}{\sqrt{2}} V_{g2}^{e}$$

Per il modo dispari:



$$V_B = \frac{R/2}{Z_0 + R/2} V_{g2}^o ;$$

$$\Gamma_{B^-} = \frac{R/2 - Z_0}{R/2 + Z_0} \longrightarrow \text{se } R/2 = Z_0 \longrightarrow R = 2Z_0, \text{ avremo } \Gamma_B = 0 .$$

↳ $V_{B^-}^{o-} = 0$;

$$V_{B^-}^{+} = V_B = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_0} V_{g2}^o = \frac{1}{2} V_{g2}^o$$

Possiam calcolare gli elementi della matrice $\underline{\underline{S}}$:

$$\begin{cases} V_{B^-}^{+} = V_{B^-}^{e+} + V_{B^-}^{o+} = \frac{1}{2} V_{g2}^e + \frac{1}{2} V_{g2}^o = \xi \\ V_C = 0 \\ V_{B^-}^{-} = 0 \\ V_A = V_A^e + V_A^o = V_A^e = -\frac{j}{\sqrt{2}} V_{g2}^e = -j \frac{\xi}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

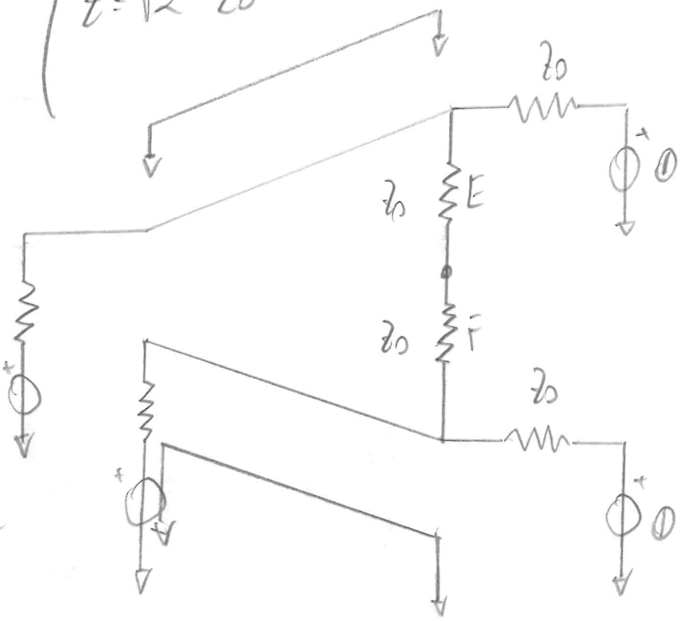
↳ $S_{12} = \frac{-j}{\sqrt{2}}$; $S_{22} = 0$;

↳ $S_{32} = 0$.

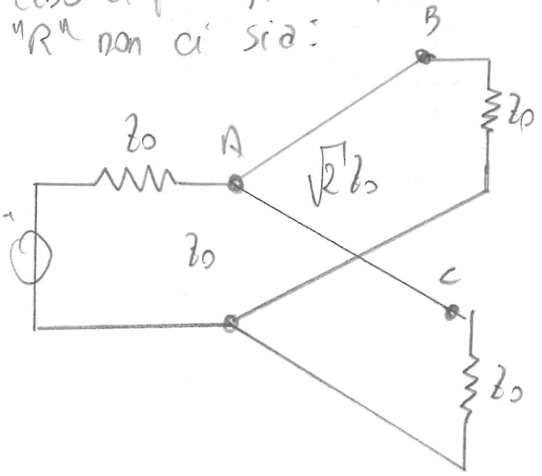
Da ciò, abbiam visto che:

$$\begin{cases} R = 2Z_0 \\ Z = \sqrt{2} Z_0 \end{cases}$$

Per S_{11} si ragiona così: il circuito di partenza è equivalente a questo:



Si ha corrente nulla sulle resistenze (come nel caso di prima), dunque, per S_{11} è come se "R" non ci sia:



Si vede che:

$Z_{AB} = 2Z_0$; $Z_{AC} = 2Z_0$;

$Z_A = Z_{AB} \parallel Z_{AC} = Z_0$.

$\Downarrow$

$\Gamma_A = S_{11} = 0$.

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[-\frac{j}{\sqrt{2}} \right]$$

Dispositivi a 4 porte

Si consideri la seguente matrice per un 4-porte reciproco e adattato:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & 0 & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & 0 & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix}$$

Vediamo se si può imporre qualche altra condizione:

$$(1^{a*} \times 2^{a}): S_{13}^* S_{23} + S_{14}^* S_{24} = 0 \quad (I)$$

$$(4^{a*} \times 3^{a}): S_{14}^* S_{13} + S_{24}^* S_{23} = 0 \quad (II)$$

Moltiplico la I per S_{24}^*, la II per S_{13}^*:

$$\hookrightarrow \begin{cases} S_{13}^* S_{23} S_{24}^* + S_{14}|S_{24}|^2 = 0 \\ S_{14}^*|S_{13}|^2 + S_{24}^* S_{23} S_{13}^* = 0 \end{cases} \xrightarrow{I-II} S_{14}^*|S_{24}|^2 - S_{14}^*|S_{13}|^2 = 0$$

$$\hookrightarrow S_{14}^*\left[|S_{24}|^2 - |S_{13}|^2\right] = 0$$ soluzione: $S_{14}^* = 0$ $(S_{14} = 0)$

Stesso gioco altre eq:

$$(1^{a*} \times 3^{a}): S_{12}^* S_{23} + S_{14}^* S_{34} = 0 \quad (III)$$

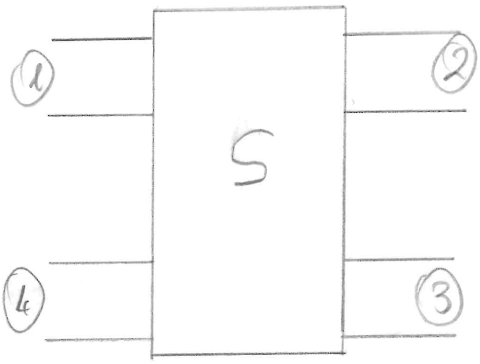
$$(4^{a*} \times 2^{a}): S_{14}^* S_{12} + S_{34}^* S_{23} = 0 \quad (IV)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} |S_{12}|^2 S_{23} + S_{14}^* S_{34} S_{12} = 0 \\ S_{14}^* S_{12} S_{34} + |S_{34}|^2 S_{23} = 0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow S_{23}\left(|S_{12}|^2 - |S_{34}|^2\right) = 0$$

$\hookrightarrow$ La matrice ora è:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 & S_{24} \\ S_{13} & 0 & 0 & S_{34} \\ 0 & S_{24} & S_{34} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$



Per eliminare le perdite, bisogna anche soddisfare le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} |S_{12}|^2 + |S_{13}|^2 = 1 \\ |S_{12}|^2 + |S_{24}|^2 = 1 \\ |S_{13}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \\ |S_{24}|^2 + |S_{34}|^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} |S_{13}|^2 = |S_{24}|^2 \\ |S_{12}|^2 = |S_{34}|^2 \end{cases}$$

NOI imponiamo $S_{12} \triangleq \alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$. $S_{13} = \beta$ sarà in $\mathbb{C}$:

$S_{13} = \beta \exp(j\vartheta)$; $S_{24} = \beta \exp(j\varphi)$. [Stesso modulo, fase anche diversa].

Ora calcolo:

$$(2^{a} \times 3^{a*}) = S_{12} S_{13}^* + S_{24} S_{34}^* = 0 \quad (V)$$

$$\rightarrow \alpha\beta \exp(-j\vartheta) + \beta\exp(j\varphi)\alpha = 0 \rightarrow \alpha\beta\left[\exp(j\varphi) + \exp(-j\vartheta)\right] = 0$$

$$\hookrightarrow \exp(j\varphi) + \exp(-j\vartheta) = 0 \rightarrow \exp(j\varphi) = -\frac{1}{\exp(j\vartheta)} \rightarrow \exp[j(\vartheta + \varphi)] = -1$$

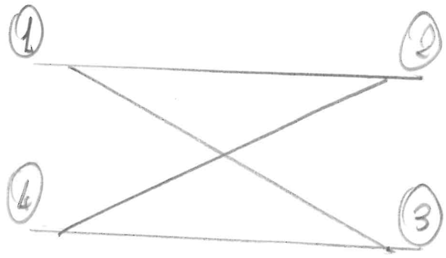
La soluzione è:

$\vartheta + \varphi = \pi$

$$\longrightarrow \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta\exp(j\vartheta) & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta\exp(j\varphi) \\ \beta\exp(j\vartheta) & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta\exp(j\varphi) & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

- Adattato
- Reciproco
- Senza perdite

} Accoppiatore direzionale.



β è detto "fattore di accoppiamento": dice quanto della tensione in ingresso vien accoppiata.

Esistono 2 "principali" configurazioni per ϑ e φ:

- Accoppiatore bilanciato: $\vartheta = \varphi = \frac{\pi}{2}$; $\longrightarrow S_{13} = S_{24} = j\beta$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & j\beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & j\beta \\ j\beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & j\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha sempre la stessa potenza accoppiata!

- Accoppiatore sbilanciato: $\vartheta = 0$, $\varphi = \pi$; $S_{13} = \beta$, $S_{24} = -\beta$

$$\hookrightarrow \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & -\beta \\ \beta & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

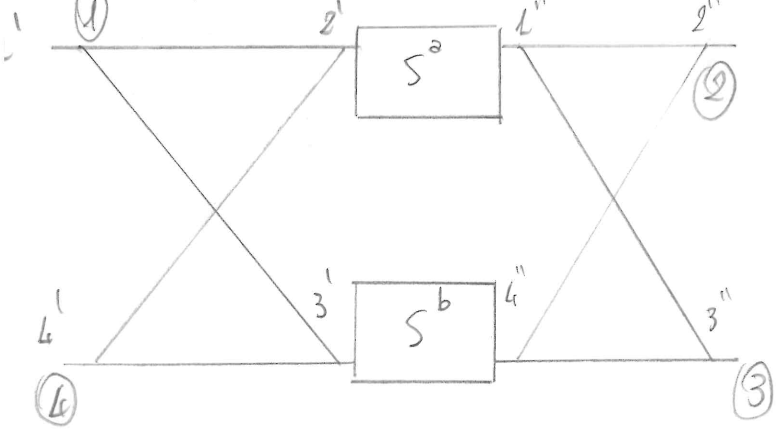
Il dispositivo non è più simmetrico, dal momento che la matrice non è più antisimmetrica, ma è sempre reciproco.

Di solito, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ [accoppiamento a 3 dB]

L'altro parametro su cui si può giocare è proprio α | β: essi influiscono sull'intensità del segnale. 2 tipi:

- Branch-line
- Anello ibrido

Sulla base di schemi interferenziali



dove:

$$\underline{\underline{S}}^{a,b} = \begin{bmatrix} S_{11}^{a,b} & S_{12}^{a,b} \\ S_{21}^{a,b} & S_{22}^{a,b} \end{bmatrix}$$

Data Z_0 impedenza di riferimento, conoscendo $\underline{\underline{S}}^{a,b}$, vogliamo conoscere i principali elementi scattering del quadriporta complessivo:

$$S_{11} = \frac{b_1}{a_1}\Big|_{a_2=a_3=a_4=0} ; \quad S_{21} = \frac{b_2}{a_1}\Big|_{a_2=a_3=a_4=0} ; \quad S_{31} = \frac{b_3}{a_1}\Big|_{a_2=a_3=a_4=0} ; \quad S_{41} = \frac{b_4}{a_1}\Big|_{a_2=a_3=a_4=0}$$

Partiam dal primo:

$b_1 = b_1' = S_{12}' a_2' + S_{13}' a_3'$; $\quad a_2' = b_1^a = S_{11}^a a_1^a + S_{12}^a a_2^a$; $\quad a_2^a = b_1''$

↳ $a_1^a = S_{11}^a b_2' + S_{12}^a b_1''$ ma $b_2' = S_{21}' a_1' + S_{24}' a_4'$ $\quad a_4' = a_4 = 0$!

$b_1'' = S_{12}'' a_2'' + S_{13}'' a_3''$; $\quad a_2'' = a_2 = 0$; $a_3'' = a_3 = 0$!

↳ $a_2' = S_{11}^a S_{12}' a_1$; $\quad a_3' = b_1^b = S_{11}^b a_1^b + S_{12}^b a_2^b$; $\quad a_1^b = b_3'$; $a_2^b = b_4''$;

↳ $a_3' = S_{11}^b \left(S_{13}' a_1' + S_{34}' a_4'\right) + S_{12}^b \left(S_{24}'' a_2'' + S_{34}'' a_3''\right)$

ma qui solo $a_1' \neq 0$!

↳ $a_3' = S_{11}^b S_{13}' a_1'$;

↳ $b_1 = S_{12}' S_{11}^a S_{12}' a_1 + S_{13}' S_{11}^b S_{13}' a_1' \longrightarrow S_{11} = \left[S_{12}' S_{11}^a S_{12}' + S_{13}' S_{11}^b S_{13}'\right]$

"a fiducia", gli altri sono:

$S_{21} = S_{12}'' S_{21}^a S_{12}' + S_{24}'' S_{21}^b S_{13}'$

$S_{31} = S_{12}' S_{21}^a S_{13}'' + S_{13}' S_{21}^b + S_{34}''$

$S_{41} = S_{12}' S_{11}^a S_{24}' + S_{13}' S_{11}^b S_{34}'$

Ci sono casi particolari: se si ha adattamento dei doppi bipoli, $S_{11}^a = S_{11}^b = 0$

↳ $S_{41} = 0$; $S_{11} = 0$

Se i due doppi bipoli son uguali:

$S_{11} = S_{11}^a \left[S_{12}'^2 + S_{13}'^2\right]$

$S_{21} = S_{21}^a \left[S_{12}'' S_{12}' + S_{24}'' S_{13}'\right]$

$S_{31} = S_{21}^a \left[S_{12}' S_{13}'' + S_{13}' S_{34}''\right]$

$S_{41} = S_{11}^a \left[S_{12}' S_{24}' + S_{13}' S_{34}'\right]$

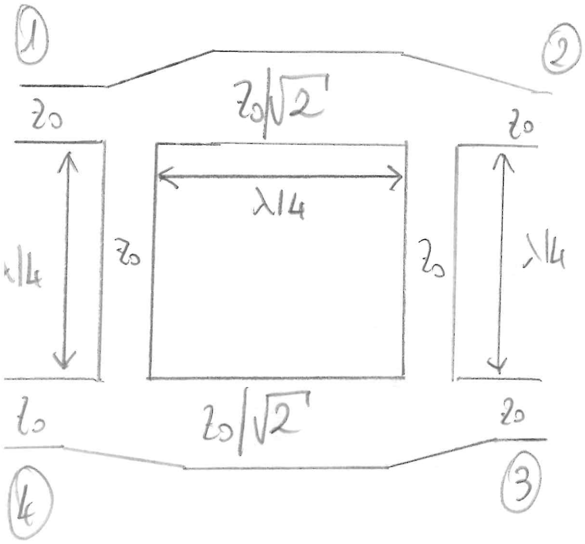
Se gli accoppiatori sono bilanciati, $\beta = -3dB$:

$S_{11} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] S_{11}^a = 0$

$S_{21} = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] S_{21}^a = 0$

$S_{31} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\, j\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\right] S_{21}^a = j S_{21}^a$

$S_{41} = j S_{11}^a$ [come prima]



$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (1,4) \longleftrightarrow (2,3) \\ (1,2) \longleftrightarrow (4,3) \end{matrix}$$

Si han le seguenti simmetrie: la coppia di porte 1 e 4 può esser scambiata con 2 e 3; la matrice risultante sarà:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} \\ S_{21} & S_{11} & S_{41} & S_{31} \\ S_{31} & S_{41} & S_{11} & S_{21} \\ S_{41} & S_{31} & S_{21} & S_{11} \end{bmatrix}$$

Considero questa eccitazione: $\underline{a}^e \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{a}^o = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Dunque:
$$\begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{41} a_4 \\ b_2 = S_{21} a_1 + S_{31} a_4 \\ b_3 = S_{31} a_1 + S_{21} a_4 \\ b_4 = S_{41} a_1 + S_{11} a_4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{41} a_4 \\ b_4 = S_{41} a_1 + S_{11} a_4 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{41} \\ S_{41} & S_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b_2 = S_{21} a_1 + S_{31} a_4 \\ b_3 = S_{31} a_1 + S_{21} a_4 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{21} & S_{31} \\ S_{31} & S_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Dato:

$\underline{b} = \underline{\underline{S}}\,\underline{a} \longrightarrow \underline{\underline{S}} = \underline{b}\,\underline{a}^{-1}$; dati modi pari e dispari: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_0 \end{bmatrix}$ e $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ -a_0 \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow \underline{\underline{a}} = \begin{bmatrix} a_0 & a_0 \\ a_0 & -a_0 \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^{-1}$; $\underline{\underline{b}} = \begin{bmatrix} \underline{b}^e & \underline{b}^o \end{bmatrix}$

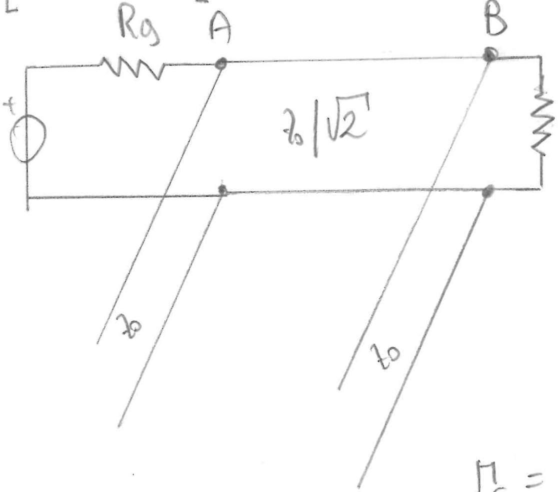
$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \underline{b}^e & \underline{b}^o \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} a_0 \right\}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{-1}{2a_0} = \frac{1}{2a_0} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ;$$

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{41} \\ S_{41} & S_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^e & b_1^o \\ b_4^e & b_4^o \end{bmatrix} \frac{1}{2a_0} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2a_0} \begin{bmatrix} b_1^e + b_1^o & b_1^e - b_1^o \\ b_4^e + b_4^o & b_4^e - b_4^o \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow S_{11} = \frac{1}{2a_0}\left[b_1^e + b_1^o\right]$; $S_{41} = \frac{1}{2a_0}\left[b_1^e - b_1^o\right]$

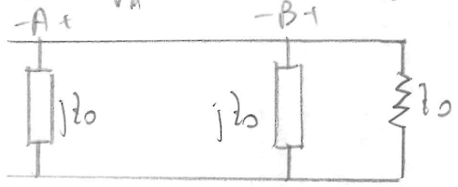
Allo stesso modo:

$$\begin{bmatrix} S_{21} & S_{31} \\ S_{31} & S_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2^e + b_2^o & b_2^e - b_2^o \\ b_3^e + b_3^o & b_3^e - b_3^o \end{bmatrix} \frac{1}{2a_0} \Longrightarrow \begin{array}{l} S_{21} = (b_2^e + b_2^o)\frac{1}{2a_0} \\ S_{31} = \frac{1}{2a_0}(b_2^e - b_2^o) \end{array}$$



$b_1^e = \frac{V_{A^-}^-}{\sqrt{z_0}}$; $b_2^e = \frac{V_{B^+}^+}{\sqrt{z_0}}$; $a_0 = a_1^e = \frac{V_{A^-}^+}{\sqrt{z_0}}$

$\frac{b_1^e}{a_0} = \frac{V_{A^-}^-}{V_{A^-}^+} = \Gamma_{A^-}$; $\frac{b_2^e}{a_0} = \frac{V_{B^+}^+}{V_{A^-}^+}$



$\Gamma_S = +1$; $\Gamma_{B'S} = -j$; $y_S = \frac{1}{-j} = j$;

$Y_S = j \cdot \frac{1}{z_0}$;

$Y_{B^-} = Y_S + \frac{1}{z_0} = \frac{1}{z_0}[1+j]$; $y_{B^-} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1+j]$; $y_{A^+} = \frac{1}{y_{B^-}} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{1+j} = \sqrt{2} \cdot \frac{1-j}{2} =$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}[1-j]$; $Y_{A^+} = \frac{\sqrt{2}}{z_0} y_{A^+} = \frac{1}{z_0}[1-j]$;

$Y_{A^-} = Y_{A^+} + Y_S = \frac{1}{z_0}$; $\longrightarrow z_{A^-} = z_0$.

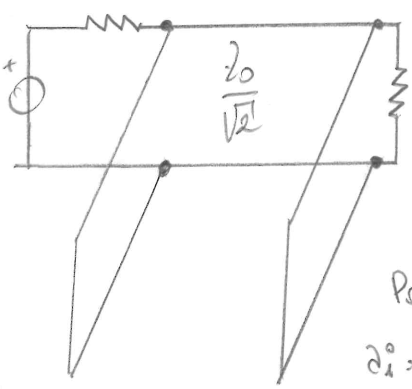
Altro parametro:

$V_{B^+}^+ V_B = V_{B^-}^+[1+\Gamma_B] = -j\, V_{A^+}^+[1+\Gamma_{B^-}] = -j\, V_{A^-}^+ [1+\Gamma_{B^-}] \frac{1+\Gamma_{A^-}}{1+\Gamma_{A^+}} = -j\, V_{A^-}^+ \zeta_{B^-} [1+\cancel{\Gamma_{A^-}}]$ ($\Gamma_{A^-} = 0$)

$= -j\sqrt{2}\frac{1}{1+j} = -j\sqrt{2}\frac{1-j}{2} = \frac{-1-j}{\sqrt{2}} = \frac{b_2^e}{a_0}$;

$\frac{b_1^e}{a_0} = 0$; $\frac{b_2^e}{a_0} = -\frac{1}{\sqrt{2}}[1+j]$

Eccitazione dispari



$y_S = -j$; $Y_{B^-} = \frac{-j}{z_0} + \frac{1}{z_0} = \frac{1}{z_0}(1-j)$;

$y_{B^-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)$; $y_{A^+} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+j)$;

$y_{A^-} = z_0$.

Poi:

$a_1^o = \frac{V_{A^-}^+}{\sqrt{z_0}}$; $b_1^o = \frac{V_{A^-}^-}{\sqrt{z_0}}$; $b_2^o = \frac{V_{B^+}^+}{\sqrt{z_0}}$;

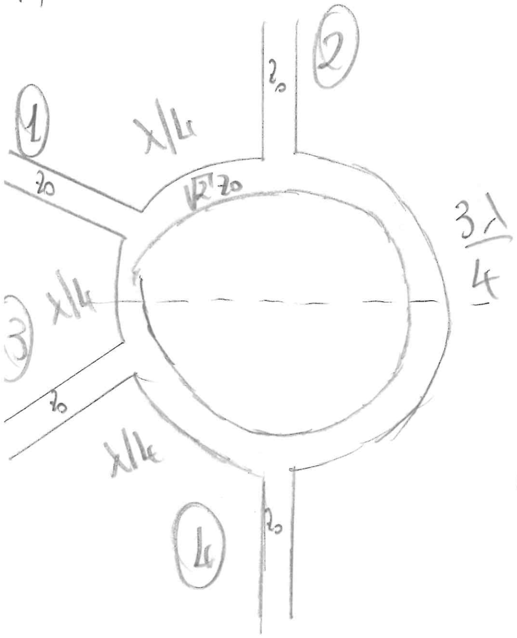
$\frac{b_2}{a_0} = \frac{V_{B^+}^+}{V_{A^-}^+} \Rightarrow V_{B^+}^+ = V_{B^-}^+[1+\Gamma_{B^-}] = V_{A^+}^+ \exp(-jkl)[1+\Gamma_{B^-}] = -j\, V_{A^+}^+ \zeta_{B^-}[1+\cancel{\Gamma_{A^-}}] =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)$; da qua, sovrapponendo: $S_{31} = \ldots = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$S_{11} = \frac{b_1^e}{2a_0} + \frac{b_1^o}{2a_0} = 0$ $\quad S_{41} = \frac{b_1^e}{2a_0} - \frac{b_1^o}{2a_0} = 0$; $S_{21} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[-1-j+1-j] = -\frac{j}{\sqrt{2}}$;

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & j & 1 & 0 \\ j & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & j \\ 0 & 1 & j & 0 \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Anello ibrido



Si ha: $S_{12} = S_{34}$, $S_{32} = S_{14}$, $S_{33} = S_{11}$, $S_{22} = S_{44}$

Voglio calcolare $S_{11}, S_{21}, S_{31}, S_{41}$, ecc.

$\underline{\underline{a}} = \begin{bmatrix} a_1^e & a_1^o \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; $\underline{a}^{e,o} = \begin{bmatrix} a_1^{e,o} \\ a_3^{e,o} \end{bmatrix}$

(alimento per simmetria solo 1 e 3 con modi pari e dispari);

$$\rightarrow \begin{cases} b_1 = S_{11} a_1 + S_{13} a_3 ; \\ b_2 = S_{12} a_1 + S_{14} a_3 ; \\ b_3 = S_{13} a_1 + S_{11} a_3 ; \\ b_4 = S_{14} a_1 + S_{12} a_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{13} & S_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_2 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{12} & S_{14} \\ S_{14} & S_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

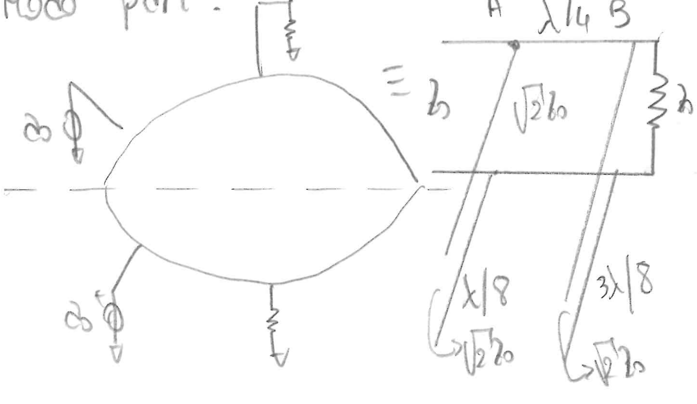
$\underline{\underline{S}} = \underline{\underline{b}}\,\underline{\underline{a}}^{-1}$; $\underline{\underline{a}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{2a_0}$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} S_{11} & S_{13} \\ S_{13} & S_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^e & b_1^o \\ b_3^e & b_3^o \end{bmatrix} \frac{1}{2a_0} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^e + b_1^o & b_1^e - b_1^o \\ b_3^e + b_3^o & b_3^e - b_3^o \end{bmatrix} \frac{1}{2a_0} \rightarrow \begin{array}{l} S_{11} = \frac{1}{2a_0}\left[b_1^e + b_1^o\right] \\ S_{13} = \frac{1}{2a_0}\left[b_1^e - b_1^o\right] \end{array}$$

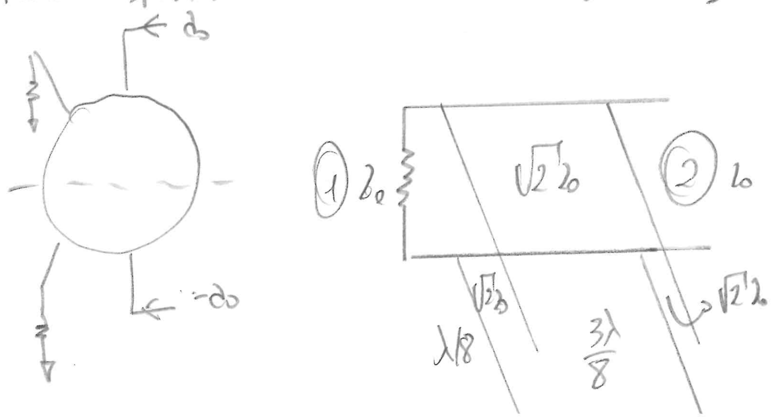
Allo stesso modo:

$$\begin{bmatrix} S_{12} & S_{14} \\ S_{14} & S_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2^e & b_2^o \\ b_4^e & b_4^o \end{bmatrix} \frac{1}{2a_0} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2^e + b_2^o & b_2^e - b_2^o \\ b_4^e + b_4^o & b_4^e - b_4^o \end{bmatrix} \frac{1}{2a_0} \rightarrow \begin{array}{l} S_{12} = \frac{1}{2a_0}\left[b_2^e + b_2^o\right] \\ S_{14} = \frac{1}{2a_0}\left[b_2^e - b_2^o\right] \end{array}$$

Modo pari:



Modo dispari:



Per il modo pari:

$\Gamma_S = 1$; $\Gamma_{B^+S} = j$; $\zeta_{B^+S} = j$; $y_{B^+S} = -j$; $Y_{B^+S} = \frac{-j}{\sqrt{2} Z_0}$; $Y_{B^-} = \frac{1}{Z_0} + \frac{j}{\sqrt{2} Z_0} = \frac{1}{Z_0}\left[1 - \frac{j}{\sqrt{2}}\right]$;

$y_{B^-} = \sqrt{2}\left[1 - \frac{j}{\sqrt{2}}\right] = \sqrt{2} - j$; $y_{A^+} = \frac{1}{\sqrt{2} - j}$; $y_{A^+S} = j$; $Y_{A^-} = \frac{j}{\sqrt{2} Z_0} + \frac{1}{2Z_0 - j\sqrt{2}}$;

$= \frac{1}{Z_0}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2 - j\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{Z_0}\frac{\sqrt{2}+j}{\sqrt{2}-j}$; $\Gamma^e_{A^-} = \dots = \frac{-j}{\sqrt{2}}$.

$V^+_{B^+} = V^+_{A^-}\left[1 + \Gamma_{A^-}\right]\cdot(-j)\cdot\zeta_{B^-}$; $\frac{b_2^e}{a_0} = -j(1+\Gamma_{A^-})\zeta_{B^-} = -j(1+\Gamma_{A^-})\frac{1}{\sqrt{2}-j} = -j\frac{\cancel{\sqrt{2}-j}}{\sqrt{2}}\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}-j}} =$

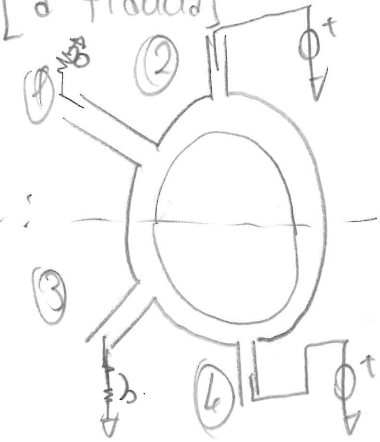
$= -j/\sqrt{2}$

Per il modo dispari:

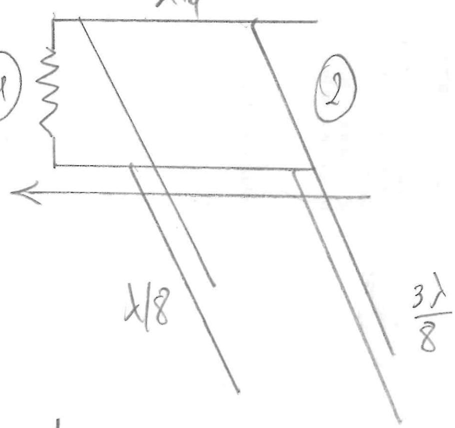
$\Gamma_{A^-} = +\frac{j}{\sqrt{2}}$; $\frac{b_2^o}{a_0} = -\frac{j}{\sqrt{2}}$ [a fiducia]

↳ $S_{11} = 0$; $S_{12} = -\frac{j}{\sqrt{2}}$

Per S_{22} e S_{24} si ha:

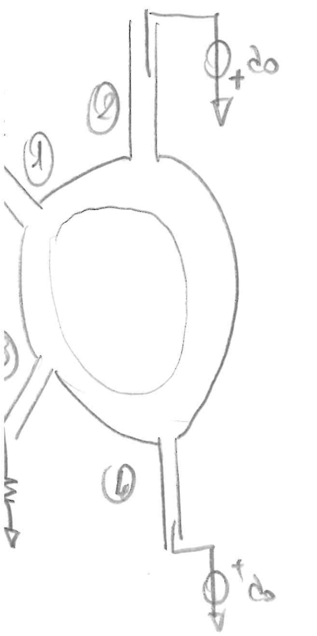


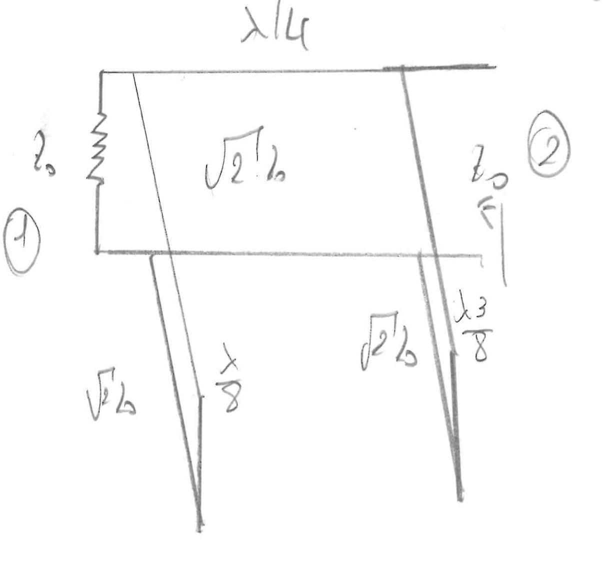
Modo pari:



$\frac{b_2}{a_0} = \Gamma_{B^-}$;

Modo dispari:





Si dimostra che:

$S_{22} = 0$

$S_{24} = \frac{j}{\sqrt{2}}$

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\left(\frac{-j}{\sqrt{2}}\right)$$