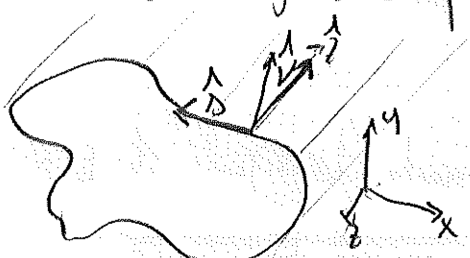
Guide d'onda II : Dispense Dila / De Hon

(01)

Formulation of the problem



I versori $\{\hat{\nu}, \hat{s}, \hat{z}\}$ formano una terna destrorsa: nel dettaglio,

$$\boxed{\hat{s} \times \hat{\nu} = -\hat{z}} \qquad -\hat{z} = \hat{s} \times \hat{\nu} \qquad \hat{s} = \hat{\nu} \times -\hat{z}$$

Questo si deduce guardando (x, y, z), e, perché $+\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$, si ha che, nella figura di esempio, $\hat{z} \leftrightarrow -\hat{z}$, $\hat{\nu} \leftrightarrow \hat{y}$, $\hat{x} \leftrightarrow -\hat{s}$!

$\underline{\rho}$: vettore trasverso a $\hat{z}$; nel dettaglio,

$\underline{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$ (nel sistema cartesiano).

(o, che ne so, $\underline{\rho} = \rho\hat{\rho} + \varphi\hat{\varphi}$ in un sistema cilindrico).

↳ OCCHIO: $\hat{\rho}$ è quello del sistema, $\underline{\rho}$ quello che abbiamo definito noi!

Le eq. di Maxwell sono:

$$\nabla \times \underline{\mathcal{H}}(\underline{r}, t) = + \frac{\partial \underline{\mathcal{D}}(\underline{r}, t)}{\partial t} + \underline{\mathcal{J}}_e(\underline{r}, t) \qquad \underline{\mathcal{D}} = \underline{\mathcal{D}}(\underline{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{H}})$$

$$\nabla \times \underline{\mathcal{E}}(\underline{r}, t) = - \frac{\partial \underline{\mathcal{B}}(\underline{r}, t)}{\partial t} - \underline{\mathcal{J}}_m(\underline{r}, t) \qquad \underline{\mathcal{B}} = \underline{\mathcal{B}}(\underline{\mathcal{E}}, \underline{\mathcal{H}})$$

Condizione PEC:

$$\hat{\nu} \times \underline{\mathcal{E}}(\underline{r}, t) \Big|_{\underline{\rho} = \underline{\rho}_\Gamma} = \underline{0}$$

questo, + Meixner Conditions

Waveguide uniforme o infinitamente lunga: configurazione di campo invariante a traslazione lungo $\hat{z}$!

Si arriva con Fourier a:

$$-\nabla\times\underline{H}+j\omega\varepsilon\underline{E}=-\underline{J}_e \quad (1)$$

$$\nabla\times\underline{E}+j\omega\mu\underline{H}=-\underline{J}_m \quad (2)$$

Come variabili di stato, si scelgono le componenti trasversali di $\underline{E}$ e $\underline{H}$:
- componenti di campo trasverse sono continue sui vari piani trasversi $\underline{\rho}$
- è utile ciò, quando si studiano le discontinuità.

Equazioni trasverse

$$\underline{E}=\underline{E}_t+E_z\hat{z} \qquad \underline{H}=\underline{H}_t+H_z\hat{z}$$

$$\underline{J}_e=\underline{J}_{e,t}+J_{e,z}\hat{z} \qquad \underline{J}_m=\underline{J}_{m,t}+J_{m,z}\hat{z}$$

$$\underline{r}=\underline{\rho}+z\hat{z} \qquad \nabla=\nabla_t+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Riscrivo la (2) così:

$$\left(\nabla_t+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\underline{E}_t+E_z\hat{z}\right)+j\omega\mu\left(\underline{H}_t+H_z\hat{z}\right)=-\left(\underline{J}_{m,t}+J_{m,z}\hat{z}\right)$$

$$=\nabla_t\times\underline{E}_t+\nabla_t\times\left(E_z\hat{z}\right)+\hat{z}\times\frac{\partial\underline{E}_t}{\partial z}+\cancel{\hat{z}\times\frac{\partial E_z}{\partial z}\hat{z}}+j\omega\mu\left(\underline{H}_t+H_z\hat{z}\right)=-\left(\underline{J}_{m,t}+J_{m,z}\hat{z}\right) \quad (3)$$

Ora: i vettori che derivano da un prodotto vettoriale con $\hat{z}$ son ortogonali a $\hat{z}$; gli altri son longitudinali.
Rimane la seguente eq. trasversale, ottenuta calcolando $\hat{z}\times(3)$:

$$\hat{z}\times\left(\nabla_t\times\underline{E}_t\right)=0$$

$$\left(\nabla_t\times\left(E_z\hat{z}\right)\right)=\nabla_t E_z\times\hat{z}+E_z\boxed{\nabla_t\times\hat{z}}=\nabla_t E_z\times\hat{z} \quad (\text{trasversale})$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial\underline{E}_t}{\partial z}+j\omega\mu\,\hat{z}\times\underline{H}_t=-\hat{z}\times\underline{J}_{m,t} \qquad \left[\hat{z}\times\frac{\partial\underline{E}_t}{\partial z}\times\hat{z}=-\frac{\partial\underline{E}_t}{\partial z}(\hat{z}\cdot\hat{z})+0\right]$$

$$-\frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = j\omega\mu\, \underline{H}_t \times \hat{z} - \nabla_t E_z + \underline{J}_{m,t} \times \hat{z}$$

$$-\frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon\, \hat{z} \times \underline{E}_t - \nabla_t H_z - \underline{J}_{e,t} \times \hat{z}$$

Poi, parte longitudinale:

$$\hat{z} \cdot (\ldots) \Rightarrow \hat{z} \cdot (\nabla_t \times \underline{E}_t) + j\omega\mu\, H_z = -J_{mz}$$

$$\hookrightarrow j\omega\mu\, H_z = -\hat{z} \cdot (\nabla_t \times \underline{E}_t) - \underline{J}_{mz} = -\nabla_t \cdot (\underline{E}_t \times \hat{z}) - \underline{J}_{mz} =$$

$$= \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{E}_t) - J_{mz}$$

Calcolo il gradiente di questa:

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu}\left[\nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{E}_t) - \underline{J}_{mz}\right]$$

$$\nabla_t H_z = \frac{1}{j\omega\mu}\left[\nabla_t \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{E}_t) - \nabla_t J_{mz}\right]$$

Sostituisco ciò nell'eq. trasversale:

$$-\frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon\, \hat{z} \times \underline{E}_t - \frac{1}{j\omega\mu}\left[\nabla_t \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{E}_t) - \nabla_t J_{mz}\right] + \hat{z} \times \underline{J}_{e,t}$$

raccolgo

$$\hookrightarrow -\frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon\left[\underline{\underline{I}} + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2}\right] \cdot (\hat{z} \times \underline{E}_t) + \hat{z} \times \underline{J}_{e,t} + \frac{\nabla_t J_{mz}}{j\omega\mu}$$

$$\underline{J}_{e,t}^{\,eff} = J_{e,t} \qquad\qquad \hat{z} \times (\ldots) - \frac{\nabla_t J_{mz}}{j\omega\mu}$$

Cos'è $(\ldots)$?

$$(\ldots) = \frac{\nabla_t \times (J_{mz}\hat{z})}{j\omega\mu}$$

infatti, $\nabla_t \times (J_{mz}\hat{z}) = \cancel{\nabla_t \times \hat{z}} + \nabla_t J_{mz} \times \hat{z}$

$$\hat{z} \times (\nabla_t J_{mz} \times \hat{z}) = \nabla_t J_{mz}(\hat{z}\cdot\hat{z}) - \hat{z}\,(\cancel{\nabla_t J_{mz} \cdot \hat{z}})$$

$\Rightarrow$

Da qui, ho le eq. di Marcuvitz & Schwinger!

Boundary conditions:

$$\hat{\nu} \times \underline{E} = 0 \Big|_{\underline{\rho} = \underline{\rho}_\Gamma}$$

uso la trasversalizzazione:

$$\hat{\nu} \times (\underline{E}_t + E_z\hat{z}) = \hat{\nu} \times \underline{E}_t \Big|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_\Gamma} + E_z\,\hat{\nu} \times \hat{z} = 0$$

ma $\boxed{\hat{\nu} \times \hat{z} = -\hat{s}}$ come detto all'inizio!

$$\hookrightarrow \hat{\nu} \times \underline{E}_t \Big|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_\Gamma} - \hat{s}\, E_z \Big|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_\Gamma} = \underline{0}$$

Questo è una eq. vettoriale: vuol dire che son 2 eq:

$$\begin{matrix} \hat{s}\cdot \\ \hat{\nu}\times \end{matrix} \begin{cases} E_z = 0 \\ \hat{\nu} \times \underline{E}_t = 0 \end{cases}$$

La seconda contiene un constraint su E_z, il quale NON compare in Marcuvitz-Schwinger!
Però in verità non è esattamente così: ammesso ho $J_{ez}=0$, dall'eq:

$$j\omega\varepsilon E_z = \nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \hat{z}) - \cancel{J_{ez}} = 0$$

$$\hookrightarrow E_z = 0 \quad \text{implica} \quad \boxed{\nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \hat{z}) = 0}$$

[condizione su $\underline{H}_t$!]

In pagina 03 c'è l'espressione di una delle due eq. di Marcuvitz e Schwinger; le riporto ora per intero:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = j\omega\mu \left[\underline{\underline{I}} + \dfrac{\nabla_t \nabla_t}{k^2} \right] \cdot (\underline{H}_t \times \hat{z}) + \underline{\tilde{J}}_{m,t} \times \hat{z} \\ -\dfrac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon \left[\underline{\underline{I}} + \dfrac{\nabla_t \nabla_t}{k^2} \right] \cdot (\hat{z} \times \underline{E}_t) + \hat{z} \times \underline{J}_{e,t} \end{cases}$$

Queste equazioni sono state ricavate dalle Maxwell, senza imporre <u>niente</u>: queste eq sono <u>equivalenti</u> alle Maxwell, solo che si identifica una "direzione privilegiata", che è quella che sarà considerata, tra breve, la "direzione di propagazione", questo dal momento che presto "imporremo" che la struttura sia invariante rispetto a z.
Le Marcuvitz-Schwinger sono dunque solo le Maxwell, a cui è stata cambiata la base, "privilegiando" z!
L'utilità di ciò sta nel fatto che usando le M-S su omogenee, è possibile costruire una <u>base</u> per lo spazio dei campi trasversi, INDIPENDENTE da z: i modi.

Le soluzioni di un problema differenziale sono decomponibili in 2 parti: la soluz. omogenea, che è legata al ker dell'operatore differenziale che definisce l'equazione; la sol. particolare, che sarà legata al range di questo stesso (analogia sistemi lineari: il ker è la sol. del sistema omogeneo, la soluzione è una combinazione dei vettori che formano lo spazio delle colonne, il range!)
Una base del ker viene ricavata risolvendo il problema agli autovalori: la base formata dagli autovettori è ottima, specialmente se, come nei problemi PEC, l'operatore è hermitiano.
Questi autovettori sono i modi.

Cerchiamo di capire un po' perché queste frasi han senso: le eq. di M-S possono essere riscritte, definendo $\underline{\psi}$ vettore di funzioni e $\underline{\underline{A}}$ operatore (come $\underline{e}$ e $\underline{c}$)

$$\underline{\underline{\psi}} = \begin{bmatrix} E_t(\rho, z) \\ H_t(\rho, z) \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{c} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_{m,t} \times \hat{z} \\ \hat{z} \times \tilde{\underline{J}}_{e,t} \end{bmatrix}$$

Come!

$$-\frac{d}{dz}\underline{\psi} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\psi}(z) + \underline{c}$$

dove $\underline{\underline{A}}$ (vedi espressioni) <u>NON</u> dipende da z.

Questo è, in altre parole, un SISTEMA di eq. differenziali a coeff. costanti rispetto a z! i coeff. sono "nella" matrice $\underline{\underline{A}}$!

In generale, è possibile (anzi, è così!) che $\underline{\underline{A}}$ non sia diagonale; definiamo $\underline{\psi} = \underline{\underline{M}}\,\underline{\Psi}$, dove $\underline{\psi}$ è il vettore nella base di partenza, $\underline{\Psi}$ quello nella base finale, $\underline{\underline{M}}$ è la matrice di diagonalizzazione, quella degli autovettori:

$$-\frac{d}{dz}\underline{\underline{M}}\,\Psi = \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{M}}\,\Psi \cancel{+\varphi}$$

Consideriamo il probl. OMOGENEO per ora: quando risolvo una ODE, prima cerco la sol. particolare!

$\underline{\underline{M}}$ non dipende da z: son autovett. di $\underline{\underline{A}}$, e $\underline{\underline{A}}$ non dipende da z!

$$\hookrightarrow \boxed{-\frac{d}{dz}\Psi = \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{M}}\,\Psi}$$

NOTA GENERALE! PRIMA ESPANDERÒ E POI RICAVARE L'EXP DI MATRICE O LASCIA COSÌ?

$\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{M}}$ è DIAGONALE $\underline{\underline{\Lambda}}$, ho 2 eq. disaccoppiate, del tipo $-\frac{d}{dz}f(z) = a f(z)$; la sol. è un esponenziale e^{-az}: l'exp. di matrice!

$$\Psi(z-z_0) = e^{\underline{\underline{\Lambda}}(z-z_0)}\,\Psi(z_0)$$

$= \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\psi}(z_0)$

da qui: $\underline{\psi}(z-z_0) = \underline{\underline{M}}\,\underline{\Psi}(z-z_0) = \boxed{\underline{\underline{M}}\,e^{\underline{\underline{\Lambda}}(z-z_0)}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\,\underline{\psi}(z_0)}$

Recuperiamo ora dal principio il problema omogeneo: 08

$$-\frac{d}{dz}\underline{\Psi} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\Psi} \implies \boxed{-\frac{d}{dz}\underline{\Psi}(\underline{\rho}, z) = \underline{\underline{A}}(\underline{\rho}) \cdot \underline{\Psi}(z)}$$

Assumo che la soluzione di questo problema, $\underline{\Psi}$, si possa scrivere (sia scritta) mediante un'espansione in una serie di autovettori, pesata da coeff. c_i:

$$\underline{\Psi}(\underline{\rho}, z) = \sum_i c_i(z)\underline{y}_i(\underline{\rho})$$

[decomposto problema in z e $\underline{\rho}$: l'operatore $\left(\frac{d}{dz}\right)$ non agisce su $\underline{\rho}$!]

$\underline{\underline{M}}$ è, di fatto, costruita come: $\underline{\underline{M}} = \left[\begin{bmatrix} \underline{y}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underline{y}_2 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \underline{y}_n \end{bmatrix} \right]$:

matrice degli autovettori in colonna; la $\underline{\Psi}$ si può quindi scrivere come prodotto matriciale:

$$\sum_i c_i(z)\underline{y}_i(\underline{\rho}) \quad \underline{\underline{M}}(\underline{\rho})\underline{c}(z) \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

[$\underline{c}$: coeff. rispetto a z! autovalori del problema in z! DIPEND. IN z NEI COEFF., IN $\underline{\rho}$ NEGLI $\underline{y}$!]

$$\boxed{\underline{\Psi}(z) = \underline{\underline{M}}(\underline{\rho})\underline{c}(z)}$$

Sostituisco ciò nel risultato di prima: $\underline{\Psi} = \underline{\underline{M}} \, e^{\underline{\underline{\Lambda}}(z-z_0)} \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\Psi}$:

$$\cancel{\underline{\underline{M}}}\,\underline{c}(z) \; \cancel{\underline{\underline{M}}}\, e^{\underline{\underline{\Lambda}}(z-z_0)} \; \cancel{\underline{\underline{M}}^{-1}} \; \cancel{\underline{\underline{M}}}\,\underline{c}(z_0)$$

$$\implies \boxed{\underline{c}(z) = e^{\underline{\underline{\lambda}}(z-z_0)} \underline{c}(z_0)}$$

Questa eq. fornisce informazioni sull'evoluzione spaziale degli autovalori $\underline{c}(z)$!

Questa si può sostituire nell'eq. diff. non omogenea, per trovare:

$$-\frac{d}{dz}\left(\underline{\underline{M}}\,\underline{c}(z)\right) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{M}}\,\underline{c}(z) + \underline{\varphi}$$

da cui, invertendo a sx:

$$-\frac{d}{dz}\underline{c}(z) = \underbrace{\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{M}}}_{\underline{\underline{\Lambda}}}\,\underline{c}(z) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\varphi}$$

$$\hookrightarrow -\frac{d}{dz}\underline{c}(z) = \underline{\underline{\Lambda}}\,\underline{c}(z) + \underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\varphi}$$

Questa è una rappresentazione compatta delle linee di tx equivalenti: $\underline{c}(z)$ è l'autovettore del problema trasversale; la sua dip. da z è un exp; soddisfa eq. simili a quelle delle linee; $\underline{c}$ è una tensione/corrente modale.

Questa formulazione astratta "anticipa" e "motiva" tutto il discorso più pratico che segue.

Rappresentazione dei campi come componenti longitudinali

Ora IMPONIAMO l'invarianza a z, imponendo che i campi abbiano la seguente dipendenza da z, come esplicitato nella sezione precedente:

$$\begin{cases} \underline{E}_t(\underline{\rho}, z) = c_E\, \underline{e}_t(\underline{\rho}, k_z)\, e^{-jk_z z} \\ \underline{H}_t(\underline{\rho}, z) = c_H\, \underline{h}_t(\underline{\rho}, k_z)\, e^{-jk_z z} \end{cases}$$

c_E, c_H hanno il ruolo di ampiezze dei campi E e H;

$$E_z(\underline{\rho}, z) = c_E\, e_z(\underline{\rho}, k_z)\, e^{-jk_z z}$$

$$H_z(\underline{\rho}, z) = c_H\, h_z(\underline{\rho}, k_z)\, e^{-jk_z z}$$

Ricordo le eq. trasversali, e sostituisco:

$$-\frac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = j\omega\mu \underline{H}_t \times \hat{z} - \nabla_t E_z \longrightarrow +jk_z C_E \underline{e}_t = j\omega\mu C_H (\underline{h}_t \times \hat{z}) - C_E \nabla_t e_z$$

$$-\frac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon \hat{z} \times \underline{E}_t - \nabla_t H_z \longrightarrow jk_z C_H \underline{h}_t = j\omega\varepsilon C_E (\hat{z} \times \underline{e}_t) - C_H \nabla_t h_z$$

... e le longitudinali:

$$j\omega\mu H_z = \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{E}_t) \longrightarrow j\omega\mu C_H h_z = C_E \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{e}_t)$$

$$j\omega\varepsilon E_z = \nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \hat{z}) \longrightarrow j\omega\varepsilon C_E e_z = C_H \nabla_t \cdot (\underline{h}_t \times \hat{z})$$

Dalle trasversali:

$$\left.\begin{aligned} \underline{e}_t &= \frac{\omega\mu}{k_z}\frac{C_H}{C_E}(\underline{h}_t \times \hat{z}) - \frac{1}{jk_z}\nabla_t e_z \\ \underline{h}_t &= \frac{\omega\varepsilon}{k_z}\frac{C_E}{C_H}(\hat{z} \times \underline{e}_t) - \frac{1}{jk_z}\nabla_t h_z \end{aligned}\right\}$$

si definisce

$$Y_\infty = \frac{C_H}{C_E}, \quad Z_\infty = \frac{1}{Y_\infty}.$$

Per ricavare $\underline{e}_t$ e $\underline{h}_t$ in funzione di e_z e h_z, si usa il seguente procedimento che viene applicato per ricavare $\underline{e}_t$ ($\underline{h}_t$ è analogo). Prima si deve eliminare $\underline{h}_t$; per far ciò, si prende la sua espressione, e le si applica il "$\times \hat{z}$":

$$\underline{h}_t \times \hat{z} = \frac{\omega\varepsilon}{k_z} Z_\infty \hat{z} \times \underline{e}_t \times \hat{z} - \frac{1}{jk_z}\nabla_t h_z \times \hat{z}$$

Ora si tratta il termine col doppio rotore secondo la formula:

$$\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C} = \underline{B}(\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{A}(\underline{B} \cdot \underline{C})$$

Applicando la guida si ottiene:

$$\hat{z} \times \underline{e}_t \times \hat{z} = \underline{e}\underbrace{(\hat{z}\cdot\hat{z})}_{=1} - \hat{z}\underbrace{(\underline{e}_t \cdot \hat{z})}_{=0}$$

(vettore trasverso proiettato lungo $\hat{z}$!) NO COMPONENTI!

da cui:

$$\underline{h}_t \times \hat{z} = \frac{\omega\epsilon}{k_z} z_\infty \underline{e}_t - \frac{1}{jk_z} \nabla_t h_z \times \hat{z}$$

Sostituisco in $\underline{e}_t$:

$$\underline{e}_t = \frac{\omega\mu}{k_z} y_\infty \left[\frac{\omega\epsilon}{k_z} z_\infty \underline{e}_t - \frac{1}{jk_z} \nabla_t h_z \times \hat{z} \right] - \frac{1}{jk_z} \nabla_t e_z$$

$$= \frac{\omega^2\mu\epsilon}{k_z^2} \underline{e}_t - \frac{\omega\mu}{jk_z^2} y_\infty \nabla_t h_z \times \hat{z} - \frac{1}{jk_z} \nabla_t e_z$$

Quindi:

$$\underbrace{(k_z^2 - \omega^2\mu\epsilon)}_{= -k_t^2} \underline{e}_t = j\omega\mu y_\infty \nabla_t h_z \times \hat{z} + j k_z \nabla_t e_z$$

da cui:

$$\underline{e}_t = -j \frac{\omega\mu}{k_t^2} y_\infty \nabla_t h_z \times \hat{z} - j \frac{k_z}{k_t^2} \nabla_t e_z$$ [e, analogamente];

$$\underline{h}_t = -j \frac{k_z}{k_t^2} \nabla_t h_z - j \frac{\omega\epsilon}{k_t^2} (\hat{z} \times \nabla_t e_z)$$

A questo punto, eliminando $\underline{e}$ e $\underline{h}$, è finalmente possibile definire gli "eigenproblems"!

Recuperando l'equazione longitudinale in h_z, posso vedere che:

$$j\omega\mu \, C_H \, h_z = C_E \, \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{e}_t)$$

$$\hookrightarrow j\omega\mu \, h_z = Z_\infty \, \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{e}_t)$$

$$= Z_\infty \nabla_t \cdot \left[-j \frac{\omega\mu}{k_t^2} Y_\infty \hat{z} \times \nabla_t h_z \times \hat{z} - j \frac{k_z}{k_t^2} \hat{z} \times \nabla_t e_z \right] =$$

$$= -j \frac{\omega\mu}{k_t^2} \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \nabla_t h_z \times \hat{z}) - j Z_\infty \frac{k_z}{k_t^2} \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \nabla_t e_z)$$

Ora! da Savi-Zich (B. 184) si ha:

$$\nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot (\nabla \times \underline{A}) - \underline{A} \cdot (\nabla \times \underline{B})$$

applicandola:

$$\nabla_t \cdot (\hat{z} \times \nabla_t e_z) = (\nabla_t e_z) \cdot (\underbrace{\cancel{\nabla_t \times \hat{z}}}_{=0}) - \underbrace{\hat{z} \cdot (\underbrace{\nabla_t \times \nabla_t e_z}_{=\text{trasversale}})}_{=0 \text{ (no proiezione!)}}$$

$$= 0$$

Quindi, rimane:

$$j\omega\mu \, h_z = -j \frac{\omega\mu}{k_t^2} \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \nabla_t h_z \times \hat{z})$$

ma, usando la $\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C}$:

$$\hat{z} \times \nabla_t h_z \times \hat{z} = \nabla_t h_z (\hat{z} \cdot \hat{z}) - \hat{z} (\underbrace{\cancel{\nabla_t h_z \cdot \hat{z}}}_{=0}) = \nabla_t h_z$$

$$\Longrightarrow j\omega\mu \, h_z = -j \frac{\omega\mu}{k_t^2} \nabla_t^2 h_z$$

$$\hookrightarrow \boxed{\nabla_t^2 h_z + k_t^2 h_z = 0}$$

Allo stesso modo:

$$\nabla_t^2 e_z + k_t^2 e_z = 0$$

Nota: i k_t NON son noti: sono la soluzione del nostro eigenproblem!

Un operatore differenziale va definito in un certo dominio; questo è definito dalla condizione PEC:

$$\hat{\nu} \times \underline{E}\Big|_{\rho = \rho_r} = 0$$

$$\underline{E} = \underline{E}_t + E_z \hat{z} \Rightarrow \hat{\nu} \times \underline{E} = \hat{\nu} \times \underline{E}_t + \hat{\nu} \times E_z \hat{z} = \hat{\nu} \times \underline{E}_t + E_z \hat{s} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\nu} \times \underline{E}_t = 0 \Rightarrow \hat{\nu} \times \underline{e}_t = 0 \\ E_z = 0 \Rightarrow e_z = 0 \end{cases}$$

$$\hat{\nu} \times \underline{e}_t = \hat{\nu} \times \left[-j \frac{\omega \mu}{k_t^2} y_0 \nabla_t h_z \times \hat{z} - j \frac{k_z}{k_t^2} \nabla_t e_z \right] =$$

$$= -j \frac{\omega \mu}{k_t^2} y_0 \hat{\nu} \times \nabla_t h_z \times \hat{z} - j \frac{k_z}{k_t^2} \hat{\nu} \times \nabla_t e_z$$

ricordo (p. 01) che:

$$\hat{\nu} = \hat{s} \times \hat{z}$$

$$\hookrightarrow (\hat{s} \times \hat{z}) \times \nabla_t e_z = \hat{z}(\hat{s} \cdot \nabla_t e_z) - \hat{s}(\underbrace{\nabla_t e_z \cdot \hat{z}}_{=0}) = \boxed{\hat{z} \frac{\partial e_z}{\partial s}}$$

Poi:

$$\hat{\nu} \times \nabla_t h_z \times \hat{z} = \nabla_t h_z (\underbrace{\hat{z} \cdot \hat{\nu}}_{=0}) - \hat{z}(\hat{\nu} \cdot \nabla_t h_z) = -\hat{z} \frac{\partial h_z}{\partial \nu}$$

(queste due usando la $\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C}$!)

Quindi:

$$k_z \frac{\partial e_z}{\partial s}\bigg|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_r} - \omega\mu \frac{\partial h_z}{\partial \nu}\bigg|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_r} = 0$$

Ora: poiché $e_z = 0$, $\frac{\partial e_z}{\partial s} = 0$ (derivata sul bordo); da qui:

$$\Rightarrow \frac{\partial h_z}{\partial \nu}\bigg|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_r} = 0$$

2 problemi:

$$\begin{cases} (\nabla_t^2 + k_t^2) e_z = 0 \\ e_z \big|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_r} = 0 \end{cases} \quad \text{(problema DIRICHLET)} \qquad \begin{cases} (\nabla_t^2 + k_t^2) h_z = 0 \\ \frac{\partial h_z}{\partial \nu}\big|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_r} = 0 \end{cases} \quad \text{(PROBLEMA NEUMANN)}$$

Visto che il contorno è PEC, i campi sono COSTANTI su di esso; non avendosi variazioni del campo e_z, h_z lungo z, le due cond. al contorno SON DISACCOPPIATE.

Nel problema di Dirichlet, $h_z = 0$ $\forall \underline{\rho}$: il problema è trasverso magnetico, poiché non vi è componente longitudinale (solo trasversale) del campo magnetico!

In Neumann lo stesso!

Modi TM

Nei modi TM si studia il laplaciano con dominio definito da condizioni di Dirichlet!

Dimostreremo ora che il "Dirichlet Laplacian" ha infiniti autovalori reali e positivi; inoltre, le autofunzioni son ortogonali!

Dato l'i-esimo modo, si deve risolvere:

$$\left(\nabla_t^2 + k_{t,i}'^2\right) e_{z,i} = 0$$

La proietto su $e_{z,i}$:

$$\left\langle \left(\nabla_t^2 + k_{t,i}'^2\right) e_{z,i}, e_{z,i} \right\rangle = \int_\Sigma e_{z,i}^* \nabla_t^2 e_{z,i} \, d\sigma + k_{t,i}^2 \int_\Sigma e_{z,i}^* e_{z,i} \, d\cancel{\Sigma} = 0$$

da cui:

$$k_{t,i}^2 = \frac{\int e_{z,i}^* \nabla_t^2 e_{z,i} \, d\sigma}{\int e_{z,i}^* e_{z,i} \, d\sigma}$$

Applico il I° th di Green al numeratore: prima, sommo e sottraggo ciò:

$$\int e_{z,i}^* \nabla_t^2 e_{z,i} \, d\sigma = \int \left[e_{z,i}^* \nabla_t^2 e_{z,i} + \left(\nabla_t e_{z,i}^*\right) \cdot \left(\nabla_t e_{z,i}\right) - \left(\nabla_t e_{z,i}^*\right) \cdot \left(\nabla_t e_{z,i}\right) \right] d\sigma;$$

applico "Leibnitz" al contrario:

$$= \int \left[\nabla_t \left(e_{z,i}^* \nabla_t e_{z,i} \right) - \left(\nabla_t e_{z,i}^*\right) \cdot \left(\nabla_t e_{z,i}\right) \right] d\sigma$$

ORA, applico Green:

$$= \oint \hat{\nu} \cdot \left(e_{z,i}^* \nabla e_{z,i} \right) ds - \int \nabla_t e_{z,i}^* \cdot \nabla_t e_{z,i} = \oint \underbrace{e_{z,i}^*}_{=0 \text{ per B.C.!}} \frac{\partial e_{z,i}}{\partial \nu} - \int \left(\nabla_t e_{z,i}^*\right) \cdot \left(\nabla e_{z,i}\right) d\sigma$$

$$= - \int \left(\nabla_t e_{z,i}^*\right) \cdot \left(\nabla_t e_{z,i}\right) d\sigma$$

da cui:

$$k_{t,i}^2 = \frac{\|\nabla_t e_{z,i}\|^2}{\|e_{z,i}\|^2}$$

Poi, dimostriamo che i modi son ortonormali; a questo fine, considero due interi modali i e j:

$$(\nabla_t^2 + k_{t,i}^2)\, e_{z,i} = 0$$
$$(\nabla_t^2 + k_{t,j}^2)\, e_{z,j} = 0$$

proietto e sottraggo:

$$\int (e_{z,j}^* \nabla_t^2 e_{z,i} - e_{z,i} \nabla_t^2 e_{z,j}^*)\, d\sigma = -(k_{t,i}^2 - k_{t,j}^2) \int e_{z,j}^* e_{z,i}\, d\sigma$$

voglio dimostrare che il membro sinistro è nullo! Applico lo stesso trucco di prima, 2 volte: sommo e sottraggo sia $(\nabla_t e_{z,i}^*) \cdot (\nabla_t e_{z,j})$ che $(\nabla_t e_{z,i}) \cdot (\nabla_t e_{z,j}^*)$, applico Green, 2 volte, e boh!

Trovo:

$$\int e_{z,j}^* e_{z,i}\, d\sigma = 0 \qquad \text{con } k_{t,i}^2 \neq k_{t,j}^2$$

Questo, per modi non degeneri. Poi, poiché i campi son a energia finita (ossia in L^2), essi ammettono comunque una base, indipendentemente dalla dim. dell'autospazio!

Vedi p. 35 note Orta!!! Quello Orta-Delta!

Mode functions properties - TM modes

I modi TM vengono indicati con un "prime" apex: $'$.
In questi, $h_z' = 0$; quindi, ho: e_z', $\underline{e}_t'$, $\underline{h}_t'$; si ha che:

$$\underline{e}_t' = -j \frac{k_z}{k_t^2} \nabla_t e_z'$$

$$\underline{h}_t' = -j \frac{\omega \varepsilon}{k_t^2} \left(\hat{z} \times \nabla_t e_z' \right) z_0$$

[NOTA! $\underline{e}_t'$ e $\underline{h}_t'$ sono, rispetto a e_z', shiftati di $-\frac{\pi}{2}$, poiché son moltiplicati per "$-j$"]

Inoltre, poiché la h_z' è nulla, la seguente equazione:

$$\underline{h}_t = \frac{\omega \varepsilon}{k_z} z_0 (\hat{z} \times \underline{e}_t) - \cancel{\frac{1}{j k_z} \nabla_t h_z}_{=0}$$

[è una relazione di impedenza: lega campo elettrico e magnetico!]

z_0' è stata definita come $\frac{c_E}{c_H}$; essa può dunque essere scelta: è ancora un parametro libero, che può essere scelto applicando una NORMALIZZAZIONE, ossia scegliendo quale deve essere l'ampiezza delle funzioni modali.

Si sceglie che:

$$\|\underline{h}_t'\|^2 = \|\underline{e}_t'\|^2$$

Usando la rel. di impedenza appena scritta, risulta che:

$$\|\underline{h}_t'\|^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon^2}{k_z^2} z_0'^2 \|\underline{e}_t'\|^2$$

da cui, $\|\underline{h}_t'\|^2 = \|\underline{e}_t'\|^2$ se $\boxed{z_0' = \frac{k_z}{\omega \varepsilon}}$

Questa scelta ha i seguenti vantaggi: se $[\underline{E}] = \frac{V}{m}$, $[\underline{H}] = \frac{A}{m}$, si ha che $[z_0] = \Omega$, ossia che questa scelta di z_0 produce una impedenza "che è veramente un'impedenza", misurabile in Ω; essendo $\underline{E}_t' \propto c_E \underline{e}_t'$, $z_0 = \frac{c_E}{c_H}$, allora $[c_E] = V$: c_E è effettivamente UNA TENSIONE!

c_H, allo stesso modo, sarà una corrente.

$\underline{e}'$ e $\underline{h}'$ han la stessa dimensione, ed è m^{-1}; $[\underline{e}'] = [\underline{h}'] = m^{-1}$,

infatti, $\|\underline{h}'\|^2 = \iint \underline{h} \cdot \underline{h}^* \, d\sigma = \text{costante}$; se un integrale doppio (spaziale) del quadrato di una funzione $(\underline{h} \cdot \underline{h}^*)$ è costante, vuol dire che $[\underline{h} \cdot \underline{h}^*] = m^{-2}$, quindi ho $[\underline{h}] = m^{-1}$!!! =)

Quindi, $\underline{c_E \to V'}$, $\underline{c_H \to I'}$! =) dove $\underline{V' = Z_\infty I'}$

Nota aggiuntiva: $\underline{e}_t'$ è il gradiente di una funzione scalare, dunque è irrotazionale: $\nabla_t \times \underline{e}_t' = 0$!

Inoltre, $\underline{h}_t'$ è normale a $\underline{e}'$ e a $\hat{z}$, dunque (th. di Helmholtz) è solenoidale: $\nabla_t \cdot \underline{h}_t'(\underline{\rho}) = 0$! (oppure: $\nabla_t \cdot \underline{h}_t' = \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{e}_t') =$

$= \underline{e}_t' \cdot (\underbrace{\nabla_t \cdot \hat{z}}_{=0}) - \hat{z} \, (\underbrace{\nabla_t \times \underline{e}'}_{=0 \text{ x irrotazionalità!}}) = 0$

Scrivo M-S:

$$\begin{cases} jk_z V' \underline{e}_t' = j\omega\mu I' \left(\underline{\underline{I}}_t + \dfrac{\nabla_t \nabla_t}{k^2} \right) \cdot (\underline{h}_t' \times \hat{z}) \\ jk_z I' \underline{h}_t' = j\omega\varepsilon V' \left(\underline{\underline{I}}_t + \dfrac{\nabla_t \nabla_t}{k^2} \right) \cdot (\hat{z} \times \underline{e}_t') \end{cases}$$

$\hookrightarrow \underline{h}_t' \times \hat{z} = \underline{e}_t'$ (x la normalizzazione!) $\qquad I' = Y_\infty V' = \dfrac{\omega\varepsilon}{k_z} V'$

$\hookrightarrow j\cancel{k_z}\cancel{V'}\underline{e}_t' = j\omega\mu \dfrac{\omega\varepsilon}{k_z} \cancel{V'} \left(\underline{\underline{I}}_t + \dfrac{\nabla_t \nabla_t}{k^2} \right) \cdot \underline{e}_t'$

$\hookrightarrow k_z^2 \underline{e}_t' = k^2 \left(\underline{\underline{I}}_t + \dfrac{\nabla_t \nabla_t}{k^2} \right) \cdot \underline{e}_t'$

che, essendo $k_t'^2 = k^2 - k_z^2$, diventa:

$$\underline{(\nabla_t \nabla_t + k_t'^2) \underline{e}_t' = 0}$$

Ossia, $\underline{e}_t'$ è autofunzione dell'operatore $\nabla_t \nabla_t$ con le B.C. dei modi TM, che sono:

$\hat{\nu} \times \underline{e}_t' = 0$, $\nabla_t \cdot \underline{e}_t' = 0$

Il fatto che $\nabla_t \cdot \underline{e}_t' = 0$ deriva dalla relazione di impedenza, applicata alla seconda equazione della cond. al contorno, che ricordo:

$$\nabla_t \cdot \left(\underline{H}_t \times \hat{z} \right) \Big|_{\underline{\rho} = \underline{\rho}_{r1}} = 0$$

Nota: $\{\underline{e}'_{t,i}\}_i$ sono tra loro ortogonali, ora lo proviamo!
Vogliamo ossia dimostrare che:

$$\langle \underline{e}_i', \underline{e}_j' \rangle = 0, \quad k_{t,i}'^2 \neq k_{t,j}'^2$$

Sappiamo che:

$$\underline{e}_{t,i}' = -j \frac{k_{z,i}'}{k_{t,i}'^2} \nabla_t e_{z,i}'$$

$$\Rightarrow \langle \underline{e}_{t,i}', \underline{e}_{t,j}' \rangle = \frac{k_{z,i}' k_{z,j}'^*}{k_{t,i}'^2 k_{t,j}'^2} \int (\nabla_t e_{z,i}') \cdot (\nabla_t e_{z,j}') \, d\sigma$$

tuttavia, con un passaggio simile a quello visto prima:
(per e_z) (sommo e sottraggo $e_{z,i} \nabla_t^2 e_{z,j}$)

$$\nabla_t e_{z,i}' \cdot \nabla_t e_{z,j}'^* = \nabla_t \cdot \left(e_{z,i}' \nabla_t e_{z,j}^{*\prime} \right) - e_{z,i}' \nabla_t^2 e_{z,j}'^*$$

tuttavia, poiché $e_{z,j}$ soddisfa il problema agli autovalori di Helmholtz,

$$\nabla_t^2 e_{z,j}'^* = - k_{t,j}^{*2} e_{z,j}'^*$$

$$\Rightarrow \nabla_t e_{z,i}' \cdot \nabla_t e_{z,j}'^* = \nabla_t \cdot \left(e_{z,i}' \nabla_t e_{z,j}^{*\prime} \right) - k_{t,j}'^{*2} e_{z,i}' e_{z,j}'^*$$

reale!

da cui:

$$\langle \underline{e}_{t,i}, \underline{e}_{t,j} \rangle = \frac{k^{1}_{z,i}\, k^{1*}_{z,j}}{k^{12}_{t,i}\, k^{12}_{t,j}} \left[\underbrace{\int \nabla_t \cdot \left(e^1_{z,i} \nabla_t e^{1*}_{z,j} \right) d\sigma}_{\parallel \text{(Gauss)}} + k^{12}_{t,j} \underbrace{\int e^1_{z,i}\, e^{1*}_{z,j}\, d\sigma}_{\parallel 0} \right]$$

(rel. ortogonalità e_z!)

$$\oint e^1_{z,i} \frac{\partial e^{1*}_{z,j}}{\partial \nu} ds$$

$= 0$, per la B.C. su $e_{z,i}$

$= 0$, se $\boxed{k^{12}_{t,i} \neq k^{12}_{t,j}}$

Allo stesso modo, per la rel di impedenza, $\langle \underline{h}_{t,i}, \underline{h}_{t,j} \rangle = 0$.

La normalizzazione precedentemente fatta (normalizzazione di equimodulo), fissa Z_{∞} (o Y_{∞}), che è il rapporto $\frac{c_E}{c_H}$; rimane da fissare il valore di c_E o c_H! Quindi, ciò si può fare con la norma di $\|e_{t,i}\|^2$!

Vediamo perché:

$$\|\underline{e}^1_{t,i}\|^2 = \langle \underline{e}^1_{t,i}, \underline{e}^1_{t,i} \rangle = \langle \underline{e}_{t,i}, \underline{h}^1_{t,i} \times \hat{z} \rangle = \int \left(\underline{e}_{t,i} \times \underline{h}_{t,i} \right) \cdot \hat{z}\, d\sigma$$

Una cosa simile ricorda il th. di Poynting; proviamo a scriverlo:

$$P_i + j Q_i = \int \left(\underline{E} \times \underline{H}^* \right) \cdot \hat{z}\, d\sigma = \int \left(\underline{E}_t \times \underline{H}_t^* \right) \cdot \hat{z}\, d\sigma = V_i I_i^* \underbrace{\int \left(\underline{e}^1_i \times \underline{h}^{1*}_i \right) \cdot \hat{z}\, d\sigma}$$

conviene fissare questa a 1; in questo modo, $P_i + j Q_i$ dipende solo da quantità circuitali, V_i e I_i!

→ quindi: CONVIENE

$\|e_{t,i}\|^2 = 1$

Purtroppo, questa cosa non è compatibile con l'attuale normalizzazione di e_z!

In fatti,

$$\|\underline{e}_i'^{2}\| = \frac{|k_{z,i}'|^2}{k_{t,i}'^2}\int |e_{z,i}'|^2\, d\sigma = \frac{|k_{z,i}'|^2}{k_{t,i}'^2}\|e_{z,i}'\|^2 = \|\Phi_i(\underline{\rho})\|^2$$

Per far ciò, si definiscono delle funzioni Φ_i tali per cui:

$$\Phi_i(\underline{\rho}) = j\,\frac{k_{z,i}'}{k_{t,i}'}\,e_{z,i}'(\underline{\rho})$$

Così: $\|\Phi_i(\underline{\rho})\|^2 = \frac{|k_{z,i}'|^2}{|k_{t,i}'|^2}\|e_{z,i}'\|^2 = 1$

definite $\Phi_i(\rho)$ ortonormali: ortonormali x definizione!

Ossia, 'ste $\Phi_i(\underline{\rho})$ sono scelte in modo tale che: siano proporzionali alle e_z, ma in più anche NORMALI, non solo ortogonali!

Essendo $\Phi_i(\underline{\rho}) \propto e_{z_i}'(\underline{\rho})$, si ha che vale il seguente problema:

$$\begin{cases} (\nabla_t^2 + k_{t,i}'^2)\,\Phi_i(\underline{\rho}) = 0 \\ \Phi_i(\underline{\rho})\big|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_\Gamma} = 0 \end{cases}$$

tali per cui:

$$\langle \Phi_i(\underline{\rho}), \Phi_j(\underline{\rho})\rangle = \delta_{ij}$$

Infine:

$$\underline{e}_i' = -\cancel{j}\,\frac{\cancel{k_{z,i}'}}{k_{t,i}'^2}\,\nabla_t\left(\frac{\cancel{k_{t,i}'}}{\cancel{j k_{z,i}'}}\,\Phi_i\right) = -\frac{\nabla_t\,\Phi_i(\underline{\rho})}{k_{t,i}'}$$

Questo è quanto.

TE modes are almost the same!

Modal fields representations

Prima di tutto: i modi TE e TM sono ortogonali?

$$\langle \underline{e}'_i , \underline{e}''_j \rangle = \frac{k'_{z,i}\, k''^{*}_{z,j}}{k'^{2}_{t,i}\, k''^{2}_{t,j}} \int \underset{\downarrow \atop e'_t = \dots}{\nabla_t e'_{z,i}} \cdot \underset{\hookrightarrow\, e''_j = \dots}{\left(\nabla_t h''^{*}_{z,j} \times \hat{z} \right)} \, da =$$

applico la regola del prodotto misto

$$= \int \left(\nabla_t e'_{z,i} \times \nabla_t h''^{*}_{z,j} \right) \cdot \hat{z} \, da$$

ricordo la regola di Leibnitz:

$$\nabla_t \times \left(e'_{z,i} \nabla_t h''^{*}_{z,j} \right) = \nabla_t e'_{z,i} \times \nabla_t h''^{*}_{z,j} + \underbrace{e'_{z,i} \nabla_t \times \nabla_t h''^{*}_{z,j}}_{\text{il rotore del gradiente è sempre nullo!}}$$

da cui:

$$= \int \nabla_t \times \left(e'_{z,i} \nabla_t h''^{*}_{z,j} \right) da = \overset{\text{per il}}{(\text{th. Stokes})} =$$

$$= \oint e'_{z,i} \frac{\partial h''_{z,j}}{\partial s} \, ds = 0 \qquad \text{c.v.d.}$$

Allo stesso modo,

$$\langle \underline{h}'_i , \underline{h}''_j \rangle = 0 .$$

I modi TE e TM generano due sottospazi ortogonali tra loro; in altre parole, i modi sono <u>disaccoppiati</u> <u>in potenza</u>.

Questo implica che la totale potenza attraverso la sezione trasversa di una guida è data dalla SOMMA DELLE POTENZE associate a ciascun modo.

P. 43: un modo progressivo ha:

$\mathrm{Im}\{k_{z,i}\} < 0$

o

$\mathrm{Re}\{k_{z,i}\} > 0$, e $\mathrm{Im}\{k_{z,i}\} = 0$

Però ci son 2 gruppi di $k_{z,i}$: progressivi (come sopra) e regressivi. $(-k_{z,i})$

Quindi:

$$E_t = \sum_{i=1}^{\infty} \left(V_{i,0}^{+} e^{-jk_{z,i}z} + V_{i,0}^{-} e^{+jk_{z,i}z} \right) \underline{e}_i(\underline{\rho}) = \dots = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(z)\, \underline{e}_i(\underline{\rho})$$

H_t - - - -

For E_z, the correct way of finding it is:

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \hat{z}) = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla_t \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} I_i'(z)\, \underline{h}_i'(\underline{\rho}) \times \hat{z} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} I_i'(z) \frac{\nabla_t \cdot \underline{e}_i'(\underline{\rho})}{j\omega\varepsilon}$$

ma:

$$\frac{\nabla_t \cdot \underline{e}_i'(\underline{\rho})}{j\omega\varepsilon} = -j \frac{k_{z,i}'}{k_{t,i}'^{2}} \frac{\nabla_t^2 e_{z,i}'}{j\omega\varepsilon} = \text{(applicando Helmholtz):}$$

$$\nabla_t^2 e_{z,i}' = -k_{t,i}'^{2}\, e_{z,i}'$$

$$= j k_{z,i}' \frac{e_{z,i}'}{j\omega\varepsilon} = \underline{Z_{\infty,i}'\, e_{z,i}'}$$

Idem per H_z per dualità.

Dal momento che si ha l'ortogonalità dei modi,

$$V_j'(z) = \langle \underline{E}_t, \underline{e}_j' \rangle \qquad V_j''(z) = \langle \underline{E}_t, \underline{e}_j'' \rangle$$

$$I_j'(z) = \langle \underline{H}_t, \underline{h}_j' \rangle \qquad I_j''(z) = \langle \underline{H}_t, \underline{h}_j'' \rangle$$

Dimostriamolo:

$$\langle \underline{E}_t, \underline{e}_j' \rangle = \langle \sum_{i=1}^{\infty} [V_i'(z)\, \underline{e}_i'(\underline{\rho}) + V_i''(z)\, \underline{e}_i''(\underline{\rho})], \underline{e}_j'(\underline{\rho}) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} V_i'(z)\, \delta_{ij} = V_j'(z)$$

Dimostriamo ora il fatto che i modi sono disaccoppiati in potenza.
Applico Poynting:

$$P_{i+j\,Qi} = \int (\underline{E}_t \times \underline{H}_t^*) \cdot \hat{z}\, d\sigma = \iint \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty} V_i' \underline{e}_i' + \sum_{i=1}^{\infty} V_i'' \underline{e}_i'' \right) \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} I_j' \underline{h}_j' + \sum_{j=1}^{\infty} I_j'' \underline{h}_j'' \right) \right] \cdot \hat{z}\, d\sigma =$$

$$= \sum_{i,j} V_i' I_j'^* \langle \underline{e}_i', \underline{h}_j' \times \hat{z} \rangle + \sum_{i,j} V_i'' I_j'' \langle \underline{e}_i'', \underline{h}_j'' \times \hat{z} \rangle +$$

$$+ \sum_{i,j} V_i' I_j''^* \underbrace{\langle \underline{e}_i', \underline{h}_j'' \times \hat{z} \rangle}_{=0} + \sum_{i,j} V_i'' I_j'^* \underbrace{\langle \underline{e}_i'', \underline{h}_j'^* \times \hat{z} \rangle}_{=0} =$$

$$= \sum_{i,j} V_i' I_j'^* \delta_{ij} + \sum_{i,j} V_i'' I_j''^* = \sum_{i=1}^{\infty} V_i' I_i'^* + \sum_{i=1}^{\infty} V_i'' I_i''^* .$$

i modi sono disaccoppiati in potenza, e la potenza totale è la somma delle potenze portate dai singoli modi.

Questo dimostra quanto è stato detto.

$$\boxed{\sum_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty}}$$

Modi TEM

Abbiamo detto che esistono modi TE ($e_z = 0$) e TM ($h_z = 0$); esistono TEM, ossia per cui $e_z = h_z = 0$?

Prendiamo le equazioni da cui sono state ricavate $\underline{e} = ()$ e $\underline{h} = ()$ funzione di e_z e h_z:

$$\underline{e}_t = \frac{\omega\mu}{k_z} y_\infty \, \underline{h}_t \times \hat{z}$$

$$\underline{h}_t = \frac{\omega\varepsilon}{k_z} z_\infty \, \hat{z} \times \underline{e}_t$$

ma dunque:

$$\underline{h}_t \times \hat{z} = \frac{\omega\varepsilon}{k_z} z_\infty \, \hat{z} \times \underline{e}_t \times \hat{z} = \frac{\omega\varepsilon}{k_z} \underline{e}_t \, z_\infty$$

$$\hookrightarrow \underline{e}_t = \frac{\omega\mu}{k_z} y_\infty z_\infty \frac{\omega\varepsilon}{k_z} \underline{e}_t = \frac{\omega^2\varepsilon\mu}{k_z^2} \underline{e}_t$$

$$\underline{e}_t = \underline{e}_t \text{ se e solo se } \boxed{\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{k_z^2} = 1} \Rightarrow \boxed{k_z = \pm\omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \pm k}$$

$k_z = +k$ modi <u>PROGRESSIVI</u>

$\quad = -k$ modi <u>REGRESSIVI</u>.

Sostituisco questo k_z:

$$\underline{e}_t = \frac{\cancel{\omega}\mu}{\cancel{\omega}\sqrt{\varepsilon\mu}} y_\infty \, \underline{h}_t \times \hat{z} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} y_\infty \, \underline{h}_t \times \hat{z}$$

allo stesso modo,

$$\underline{h}_t = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} z_\infty \, \hat{z} \times \underline{e}_t$$

se impongo $\|\underline{e}_t\| = \|\underline{h}_t\|$,

$$\Rightarrow z_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \; !$$

Quindi:

$$\boxed{\underline{h}_t = \hat{z} \times \underline{e}_t}$$ (con questa normalizzazione)

Dalle eq longitudinali, che ora copio:

$$j\omega\mu c_H h_z = c_E \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{e}_t) \qquad e_z = h_z = 0$$

$$j\omega\varepsilon c_E e_z = c_H \nabla_t \cdot (\underline{h}_t \times \hat{z})$$

$$\hookrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 = \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{e}_t) \\ 0 = \nabla_t \cdot (\underline{h}_t \times \hat{z}) \end{matrix}}$$ = da cui, con la rel. di impedenza:

$$\boxed{\begin{matrix} \nabla_t \cdot \underline{h}_t = 0 \\ \nabla_t \cdot \underline{e}_t = 0 \end{matrix}}$$ (solenoidali)

ma: $\nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{e}_t) = (\text{prodotto misto}) = \hat{z} \cdot (\nabla_t \cdot \underline{e}_t)$

quindi $\underline{e}_t$ è pure irrotazionale!

$$\boxed{\underline{e} = -\nabla_t \Phi}$$

da cui:

$$\nabla_t \cdot \underline{e} = -\nabla_t \cdot (\nabla_t \Phi) = -\nabla_t^2 \Phi = 0$$

Φ soddisfa l'eq. di Laplace! / Poisson!

L'eq. per Φ è quindi

$$\nabla_t^2 \Phi = 0$$

con condizioni al contorno dettate da:

$$\hat{\nu} \times \underline{e}\Big|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_\Gamma} = -\hat{\nu} \times \nabla_t \Phi\Big|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_\Gamma} = (\hat{z} \times \hat{s}) \times \nabla_t \Phi =$$

$$= \underbrace{(\hat{z} \cdot \nabla_t \Phi)}_{=0\,!} \hat{s} - \hat{z}(\nabla_t \Phi \cdot \hat{s}) = -\hat{z} \frac{\partial \Phi}{\partial s}\Big|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_\Gamma}.$$

∇_t è trasverso!

In altre parole, se $\frac{\partial \Phi}{\partial s}\Big|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_\Gamma} = 0$, $\boxed{\Phi\Big|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_\Gamma} = \Phi_0}$

Quindi: il problema differenziale è:

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ \Phi\Big|_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_\Gamma} = \Phi_\Gamma \end{cases}$$

dove Φ_Γ è una certa costante: il Φ ai bordi è COSTANTE!

Se il dominio è semplicemente connesso ho 1 sola costante, e $\underline{e}$, $\underline{h}$ son nulle; se ho più parti metalliche,  ho 1 costante per ogni bordo! Quindi Φ non è più costante nella cross section! E così manco $\underline{e}$, $\underline{h}$ son nulle!

TEM: caso particolare di modi TM!

Non ci sono modi TE! Infatti, $\Psi(\underline{\rho})$ = costante è SEMPRE soluzione del "Neumann Laplacian", quindi $\underline{e}$" e $\underline{h}$" sarebbero SEMPRE nulle!

(vedi p 49 orlal)

Il secondo passo da fare è normalizzare a 1 l'autofunzione:

$\|\underline{e}\|^2 = 1$

$$\|\underline{e}\|^2 = \int \|\nabla_t \Phi\|^2 \, d\sigma = \int (\nabla_t \Phi)(\nabla_t \Phi^*) =$$

$$(\nabla_t \Phi)\circ(\nabla_t \Phi^*) = (\nabla_t \Phi)\circ(\nabla_t \Phi^*) + \Phi \nabla_t^2 \Phi^* - \Phi \nabla_t^2 \Phi^* =$$

$$= \nabla_t (\Phi \nabla_t \Phi^*) - \Phi \nabla_t^2 \Phi$$

$$\hookrightarrow \int (\ldots) = \int \nabla_t (\Phi \nabla_t \Phi^*) \, d\sigma - \int \Phi \nabla_t^2 \Phi \, d\sigma$$

$\hookrightarrow$ applico Green su ciò!

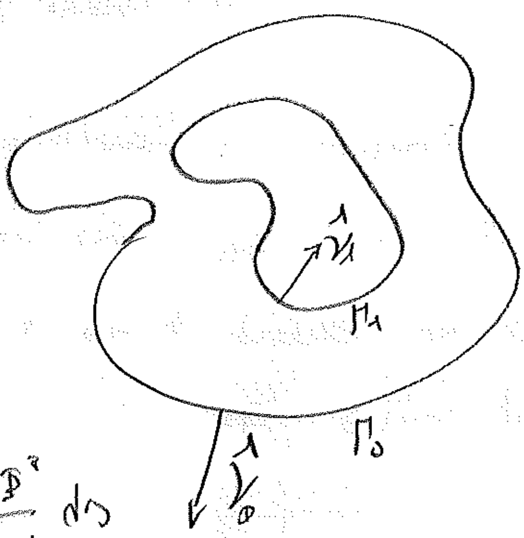
$$= \oint \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} ds - \int \Phi \underbrace{\nabla_t^2 \Phi}_{=0} d\sigma$$

0 perché soddisfa l'eq. di Poisson

da cui:

$$\boxed{\|\underline{e}\|^2 = \oint \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} ds}$$

Suppongo di avere un dominio come in figura:



Così, ho che:

$$\oint \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} ds = \Phi_{\Gamma_0} \oint_{\underline{\rho} = \underline{\rho}_{\Gamma_0}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} ds + \Phi_{\Gamma_1} \oint_{\underline{\rho} = \underline{\rho}_{\Gamma_1}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} ds$$

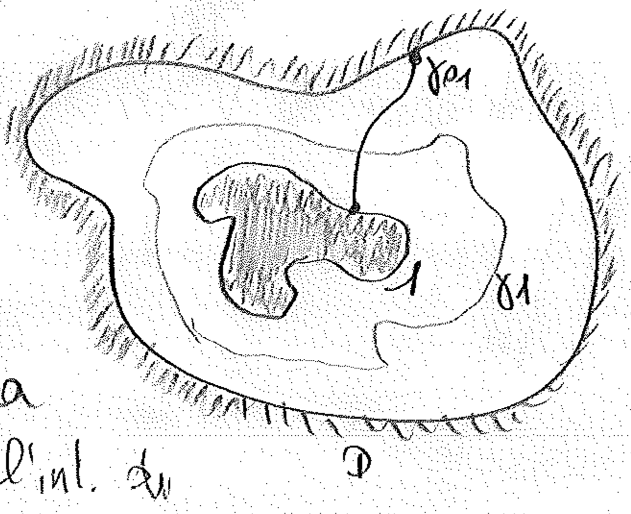
= aggiungo e sottraggo $\Phi_{\Gamma,1} \oint_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_{\Gamma,0}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} ds$,

$$= -(\Phi_{\Gamma,1} - \Phi_{\Gamma,0}) \oint_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_{\Gamma,0}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} ds - \Phi_{\Gamma,1} \left[\oint_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_{\Gamma,1}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} ds - \oint_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_{\Gamma,0}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} ds \right]$$

però $\underline{e}$ dipende solo da $\Phi_{\Gamma,1} - \Phi_{\Gamma,0}$: $\underline{e}$ infatti è irrotazionale, quindi conservativo, e quindi, poiché quei due integrali son due circuitazioni che coinvolgono $\frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} = \hat{\nu} \cdot \nabla_t \Phi^* = \hat{\nu} \cdot \underline{e}$, essendo $\underline{e}$ conservativo, non importa quale cammino si fa: l'integrale è sempre uguale! La [ ] è = 0!

$$= -(\Phi_{\Gamma,1} - \Phi_{\Gamma,0}) \oint_{\underline{\rho}=\underline{\rho}_{\Gamma,0}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu} ds$$

Normalizzazione alternativa modi TEM



Si consideri l'elettrostatica, dati 2 conduttori, si definisca la corrente come la circuitazione del campo magnetico lungo una linea chiusa arbitraria, la tensione come l'int. di linea su contorno arbitrario tra i due conduttori. Dato γ_1 il contorno per la circuitazione, γ_{01} il contorno per l'int. di linea

$$V(z) = -\int_{\gamma_{01}} \underline{E} \cdot \hat{s}\, ds$$

$$I(z) = \oint_{\gamma_1} \underline{H} \cdot \hat{s}\, ds$$

D'oltre parte:

$$\left.\begin{aligned} \underline{E}_t &= V^m(z)\, \underline{e}(\underline{\rho}) \\ \underline{H}_t &= I^m(z)\, \underline{h}(\underline{\rho}) \end{aligned}\right\}$$ $V^m(z)$ e $I^m(z)$ sono correnti e tensioni modali, ora, però, possiamo dar loro significato fisico:

$\underline{E} \cdot \hat{s} = \underline{E}_t \cdot \hat{s}$ (infatti, $\underline{E} \cdot \hat{s} = (E_t \hat{\rho} + E_z \hat{z})$, $\hat{\rho} = (\hat{s} + \hat{\nu})$,
$\hat{\rho} \cdot \hat{s} = \hat{s}$, $\hat{\nu} \cdot \hat{s} = 0$,
$\hat{z} \cdot \hat{s} = 0$

$\hookrightarrow = V^m(z)\, \underline{e}(\underline{\rho})$

Quindi:

$$V(z) = -V^m(z) \int_{\gamma_{01}} \underline{e}(\underline{\rho}) \cdot \hat{s}\, ds$$

volendo dare a $V^m(z)$ il significato di "tensione",

$$\boxed{-\int_{\gamma_{01}} \underline{e}(\underline{\rho}) \cdot \hat{s}\, ds = 1}$$

Similmente,

$$I(z) = \int I^m(z)\, \underline{h} \cdot \hat{s}\, ds \implies \boxed{\int \underline{h} \cdot \underline{s}\, ds = 1}$$

Infine si vede che:

$$P + jQ = V I^*$$

$$\Longrightarrow \int (\underline{e} \times \underline{h}^*) \cdot \hat{z} \, d\sigma = 1$$

Dal momento che prima si è detto che:

$$\underline{e} = -\nabla_t \Phi \, ,$$

$$\hookrightarrow \int_{\gamma 01} \nabla_t \Phi \cdot \hat{s} \, ds = 1 \Longrightarrow \boxed{\Phi_{\Gamma_1,1} - \Phi_{\Gamma,0} = 1}$$

Poi: è noto che:

$$\underline{h} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \, z_{\infty} \, \hat{z} \times \underline{e} \Longrightarrow \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \, z_{\infty} \oint_{\gamma 1} (\hat{z} \times \underline{e}) \cdot \hat{s} \, ds = 1$$

$$\hookrightarrow \text{ossia: } z_{\infty} = + \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\oint_{\gamma 1} (\hat{z} \times \underline{e}) \cdot \hat{s} \, ds}$$

ma: $(\hat{z} \times \underline{e}) \cdot \hat{s} = (\hat{s} \times \hat{z}) \cdot \underline{e} = (\hat{s} \times \hat{z}) \cdot (-\nabla \Phi) = \hat{\nu} \cdot (-\nabla \Phi) =$

$$= - \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$$

$$\hookrightarrow z_{\infty} = - \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\oint_{\gamma 1} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \, ds}$$

[remark! $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} < 0$, da cui $z_{\infty} > 0$!]

Verifichiamo ora che $\int (\underline{e} \times \underline{h}^*) \cdot \hat{z}\, d\sigma = 1$:

$$\underline{h} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, z_{\infty}\, \hat{z} \times \underline{e}$$

$$\hookrightarrow \int \left(\underline{e} \times \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, z_{\infty}\, \hat{z} \times \underline{e} \right) \cdot \hat{z}\, d\sigma =$$

$\underline{e} \times \hat{z} \times \underline{e} = \|\underline{e}\|^2 - 0$

$$= z_{\infty} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \|\underline{e}\|^2 =$$

ma da prima,

$$\|\underline{e}\|^2 = -\left(\Phi_{\Gamma_1,1} - \Phi_{\Gamma_1,0}\right) \oint_{\underline{\rho} = \underline{\rho}_{\Gamma_1,0}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu}\, ds$$

$z_{\infty} = \dots$

$\boxed{(\Phi \text{ è reale!})}$

$$\hookrightarrow = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \frac{\cancel{\oint_{\underline{\rho} = \underline{\rho}_{\Gamma_{0}}} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \nu}\, ds}}{\cancel{\oint_{\gamma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\, ds}}\, \left(\Phi_{\Gamma_1,1} - \Phi_{\Gamma_1,0}\right) = 1 \quad \text{(imposto prima)}$$

Questa normalizzazione può essere usata ora per ricavare, a partire dalle eq. di M-S, le eq. delle linee di tx TEM in modo RIGOROSO (non col modellino circuitale!)

Date le M-S senza sorgenti e TEM,

$$-\frac{\partial E_t}{\partial z} = j\omega\mu\, H_t \times \hat{z} \qquad \leadsto \qquad -\frac{dV}{dz}\, \underline{e} = j\omega\mu\, I\, \underline{h} \times \hat{z}$$

$$-\frac{\partial H_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon\, \hat{z} \times E_t \qquad\qquad -\frac{dI}{dz}\, \underline{h} = j\omega\varepsilon V\, \hat{z} \times \underline{e}$$

Ora, $\underline{h} \neq \hat{z} \times \underline{e}$: abbiamo cambiato normalizzazione!

Però: prendiamo la prima, e proiettandola su $-\hat{s}$, ho:

$$+\frac{dV}{dz}\underline{e}\cdot\hat{s} = -j\omega\mu I\,(\underline{h}\times\hat{z})\cdot\hat{s}$$

Integro su γ_{01}, in modo da far sparire la parte "brutta" a primo membro; infatti:

$$\int_{\gamma_{01}} \frac{dV}{dz}\,\underline{e}\cdot\hat{s}\,ds = -\int j\omega\mu I\,(\underline{h}\times\hat{z})\cdot\hat{s}\,ds$$

$$\parallel$$

$$\frac{dV}{dz}\underbrace{\int_{\gamma_{01}}\underline{e}\cdot\hat{s}\,ds}_{-1} = -\frac{dV}{dz} = j\omega\mathcal{L}I,$$

dove $\mathcal{L} = -\mu\int(\underline{h}\times\hat{z})\cdot\hat{s}\,ds =$

$$= \mu\int\underline{h}\cdot\hat{\nu}\,ds$$

Similmente, si può ottenere:

$$-\frac{dI}{dz} = j\omega\mathcal{C}V, \qquad \mathcal{C} = \varepsilon\oint_{\gamma_1}(\hat{z}\times\underline{e})\cdot\hat{s}\,ds = \varepsilon\oint_{\gamma_1}\underline{e}\cdot\hat{\nu}\,ds$$

Nota:

$[\mathcal{L}] = [\mu] = \frac{H}{m}$; $\rightsquigarrow$ parametri p.u.l. (per unit length);

$\hookrightarrow$ magnetic displacement flux p.u. current

$[\mathcal{C}] = [\varepsilon] = \frac{F}{m}$; $\hookrightarrow$ electric displacement flux p.u. voltage

see p. 53

Poiché:

$$\mathcal{C} = \dots = -\varepsilon \oint \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\, ds \qquad (\text{uso } \underline{e} = -\nabla \Phi)$$

$$\mathcal{L} = -\mu \int_{\gamma_{01}} (\underline{h} \times \hat{z}) \cdot \hat{s}\, ds = \left(\text{recuperando } \underline{e} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \text{y}_{0}(\underline{h} \times \hat{z})\right):$$

$$= -\mu\, Z_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \underbrace{\int_{\gamma_{01}} \underline{e} \cdot \hat{s}\, ds}_{=1!\ \text{per prima}} = -\mu\, Z_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} =$$

$$= -\mu \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \frac{1}{\oint_{\gamma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}\, ds}$$

da cui, si può vedere che:

$$\sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}} = \sqrt{\frac{-\mu \frac{1}{\oint_{\gamma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds}}{-\varepsilon \oint_{\gamma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\, \frac{1}{\oint \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds} = Z_0$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{L} \cdot \mathcal{C}}} = \sqrt{\frac{\oint_{\gamma_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds}{\varepsilon \mu \oint \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = c$$

Quindi, la normalizzazione è d'accordo sia con la fisica, sia col modello circuitale =)

Modal tx line equations

Assunto il fatto che i modi sono una base completa, li usiamo per rappresentare la soluzione delle eq. di Maxwell.
Per far ciò, proiettiamo le M-S sulla base modale, e ciò ci guida verso una rappresentazione circuitale.
Riprendo le M-S:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \underline{E}_t}{\partial z} = j\omega\mu\left(\underline{\underline{I}}_t + \dfrac{\nabla_t\nabla_t}{k^2}\right)\cdot\left(\underline{H}_t \times \hat{z}\right) + \underline{J}_{mt}^{ell} \times \hat{z} \\ -\dfrac{\partial \underline{H}_t}{\partial z} = j\omega\varepsilon\left(\underline{\underline{I}}_t + \dfrac{\nabla_t\nabla_t}{k^2}\right)\cdot\left(\hat{z} \times \underline{E}_t\right) + \hat{z} \times \underline{J}_{et}^{ell} \end{cases}$$

Dove rappresento (espando) $\underline{E}_t$ e $\underline{H}_t$ come:

$$\begin{cases} \underline{E}_t = \sum_{i=1}^{\infty} V_i^{\alpha}(z)\, \underline{e}_i^{\alpha}(\underline{\rho}) \\ \underline{H}_t = \sum_{i=1}^{\infty} I_i^{\alpha}(z)\, \underline{h}_i^{\alpha}(\underline{\rho}) \end{cases}$$

dove "α" è "$'$" o "$''$", a seconda che i modi siano TM o TE.
Sostituisco: trovo

$$-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{dV_i^{\alpha}}{dz}\underline{e}_i^{\alpha} = j\omega\mu \sum_{i=1}^{\infty} I_i^{\alpha}\left(\underline{\underline{I}}_t + \frac{\nabla_t\nabla_t}{k^2}\right)\cdot\left(\underline{h}_i^{\alpha} \times \hat{z}\right) + \underline{J}_{mt}^{ell} \times \hat{z}$$

$$-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{dI_i^{\alpha}}{dz}\underline{h}_i^{\alpha} = j\omega\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} V_i^{\alpha}\left(\underline{\underline{I}}_t + \frac{\nabla_t\nabla_t}{k^2}\right)\cdot\left(\hat{z} \times \underline{e}_i^{\alpha}\right) + \hat{z} \times \underline{J}_{et}^{ell}$$

Ora stiamo parlando di modi TE o TM (NON TEM per cui la normalizzazione può essere diversa dallo solito), dunque $\underline{h}_i^{\alpha} = \hat{z} \times \underline{e}_i^{\alpha}$, $\underline{e}_i^{\alpha} = \underline{h}_i^{\alpha} \times \hat{z}$ (vale la normalizzazione di equimodulo).
Da qui, proietto la I^a eq su delle $\underline{e}_j^{\beta}$, la II^a su delle $\underline{h}_j^{\beta}$, dove β può essere "$'$" o "$''$" a seconda di TM o TE rispettivamente.
Dunque:

$$\langle \underline{e}_i^{\alpha}, \underline{e}_j^{\beta} \rangle = \langle \underline{h}_i^{\alpha}, \underline{h}_j^{\beta} \rangle = \begin{cases} \delta_{ij}, & \alpha \equiv \beta \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

da qui, facendo ciò:

036

$$-\frac{dV_j^\beta}{dz} = j\omega\mu \sum_{i=1}^{\infty} I_i^\alpha \left\langle \left(\underline{\underline{I}}_t + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2}\right)\cdot \underline{e}_i^\alpha, \underline{e}_j^\beta \right\rangle + \left\langle \underline{J}_{mt}^{eff} \times \hat{z}, \underline{e}_j^\beta \right\rangle$$

$$-\frac{dI_j^\beta}{dz} = j\omega\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} V_i^\alpha \left\langle \left(\underline{\underline{I}}_t + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2}\right)\cdot \underline{h}_i^\alpha, \underline{h}_j^\beta \right\rangle + \left\langle \hat{z}\times \underline{J}_{et}^{eff}, \underline{h}_j^\beta \right\rangle$$

Rimangono da valutare le proiezioni degli operatori. Lo faccio per $\underline{e}$, dal momento che per gli $\underline{h}$ valgono considerazioni analoghe

$$\left\langle \left(\underline{\underline{I}}_t + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2}\right)\cdot \underline{e}_i^\alpha, \underline{e}_j^\beta \right\rangle = ?$$

Se $\alpha \neq \beta$, ossia se uno è TE e l'altro TM, tutto ciò fa 0;
Se $\alpha \equiv \beta = TM$, si ha ciò:

$$\left\langle \left(\underline{\underline{I}}_t + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2}\right)\cdot \underline{e}_i^1, \underline{e}_j^1 \right\rangle = \left\langle \underline{e}_i^1, \underline{e}_j^1 \right\rangle + \left\langle \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2}\cdot \underline{e}_i^1, \underline{e}_j^1 \right\rangle$$

ma $\nabla_t \nabla_t \cdot \underline{e}_i^1 = -k_{ti}^{1\,2}\, \underline{e}_i^1$

$$\hookrightarrow = \delta_{ij} - \frac{k_{ti}^{1\,2}}{k^2}\delta_{ij} = \frac{k^2 - k_{ti}^{1\,2}}{k^2}\delta_{ij} = \frac{k_{zi}^{1\,2}}{k^2}\delta_{ij}.$$

Poi, se $\alpha \equiv \beta \equiv TE$, si ha:

$$\left\langle \left(\underline{\underline{I}}_t + \frac{\nabla_t \nabla_t}{k^2}\right)\cdot \underline{e}_i^{''}, \underline{e}_j^{''} \right\rangle = \delta_{ij} + \left\langle \frac{\nabla_t(\nabla_t \cdot \underline{e}_i^{''})}{k^2}, \underline{e}_j^1 \right\rangle$$

ma $\underline{e}_i^{''}$ è solenoidale (è stato dimostrato molte pagine fa):

$$\nabla_t \cdot \underline{e}_i^{''} = 0$$

$$\Rightarrow = \delta_{ij}$$

Valgono cose duali per gli h!

Poi: definisco:

$$v_j^\beta(z) = \langle \underline{J}_{m,t}^{eff} \times \hat{z}, \underline{e}_j^\beta \rangle$$

$$i_j^\beta(z) = \langle \hat{z} \times \underline{J}_{e,t}^{eff}, \underline{h}_j^\beta \rangle$$

da tutto ciò, si ottiene: $(k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu)$

(TM):

$$\begin{cases} -\dfrac{dV_j'}{dz} = j\dfrac{k_{z,j}'^2}{\omega\varepsilon} I_j' + v_j' \\ -\dfrac{dI_j'}{dz} = j\omega\varepsilon V_j' + i_j' \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$Z_{\infty,j}' = \frac{k_{z,j}'}{\omega\varepsilon}$$

(TE)

$$\begin{cases} -\dfrac{dV_j''}{dz} = j\omega\mu I_j'' + v_j'' \\ -\dfrac{dI_j''}{dz} = j\dfrac{k_{z,j}''}{\omega\mu} + i_j'' \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$Z_{\infty,j}'' = \frac{\omega\mu}{k_{z,j}''}$$

↳ da qui:

$$\begin{cases} -\dfrac{dV_j^\alpha}{dz} = j k_{z,j}^\alpha Z_{\infty,j}^\alpha I_j^\alpha + v_j^\alpha \\ -\dfrac{dI_j^\alpha}{dz} = j k_{z,j}^\alpha Y_{\infty,j}^\alpha V_j^\alpha + i_j^\alpha \end{cases}$$

Nota: ogni tensione/corrente per ogni modo $(j\alpha)$ è disaccoppiata da quella degli altri modi (grazie ortogonalità!)

Ora, lavoriamo sulle <u>sorgenti</u>

$$v_j' = \langle \underline{J}_{mt}^{eff} \times \hat{z}, \underline{e}_j' \rangle = \int (\underline{J}_{m,t}^{eff} \times \hat{z}) \cdot \underline{e}_j'^* \, d\sigma = \int \underline{J}_{mt}^{eff} \cdot (\hat{z} \times \underline{e}_j'^*) \, d\sigma =$$

$$= \langle \underline{J}_{mt}^{eff}, \underline{h}_j' \rangle = \langle \underline{J}_{mt}, \underline{h}_j' \rangle + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \int (\hat{z} \times \nabla_t J_{ez}) \cdot \underline{h}_j'^* \, d\sigma =$$

$$= \langle \underline{J}_{mt}, \underline{h}_j' \rangle + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \int \underline{e}_j'^* \cdot \nabla_t J_{ez} \, d\sigma$$

Sul II° integrale posso applicare la regola:

$$\underline{e}_j^{'*} \cdot \nabla_t J_{ez} = \nabla_t \cdot (J_{ez}\, \underline{e}_j^{'*}) - J_{ez}\, \nabla_t \cdot \underline{e}_j^{'*}$$ (Leibniz divergenza del contorno)

$$\hookrightarrow \int \underline{e}_j^{'*} \cdot \nabla_t J_{ez}\, d\sigma = \iint \left[\nabla_t \cdot (J_{ez}\, \underline{e}_j^{'*})\right] d\sigma - \int J_{ez}\, \nabla_t \cdot \underline{e}_j^{'*}\, d\sigma =$$

$$\overset{\text{Gauss}}{=} \oint \hat{\nu} \cdot (\underline{e}_j^{'*} J_{ez})\, ds - \int J_{ez}\, \nabla_t \cdot \underline{e}_j^{'*}\, d\sigma$$

↳ questo è nullo: è una corrente a distanza infinitesima da piano di massa, o comunque da del PEC!

Ora: ricordo che

$$\frac{\nabla_t \cdot \underline{e}_i'}{j\omega\varepsilon} = Z_{0,i}'\, \underline{e}_{z,i}'$$; ne prendo il complesso coniugato, e ho:

$$\hookrightarrow v_j' = \langle \underline{J}_{mt}, \underline{h}_j' \rangle + Z_{0,j}'^{*} \langle J_{ez}, e_{z,i}' \rangle$$

Poi, per v_j'', c'è solo il I° termine (infatti $e_{z,i}'' = 0$!)

Un lavoro simile va ora fatto su i_j'

$$i_j' = \langle \hat{z} \times \underline{J}_{et}^{eff}, \underline{h}_j' \rangle = \langle \underline{J}_{et}^{eff}, \underline{e}_j' \rangle = \langle \underline{J}_{et}, \underline{e}_j' \rangle - \frac{1}{j\omega\mu} \int (\hat{z} \times \nabla_t J_{mz}) \cdot \underline{e}_j^{'*}\, d\sigma =$$

$$= \langle \underline{J}_{et}, \underline{e}_j' \rangle + \frac{1}{j\omega\mu} \int \underline{h}_j^{'*} \cdot \nabla_t J_{mz}\, d\sigma$$

usando lo stesso trucco di prima, si ottiene:

$$= \langle \underline{J}_{et}, \underline{e}_j' \rangle + \frac{1}{j\omega\mu} \left[\oint \hat{\nu} \cdot (\underline{h}_j^{'*} J_{mz})\, ds - \int J_{mz}\, \nabla_t \cdot \underline{h}_j^{'*}\, d\sigma \right]$$

tuttavia,

$$\hat{\nu} \cdot \underline{h}_j' = \hat{\nu} \cdot (\hat{z} \times \underline{e}_j') = (\hat{\nu} \times \hat{z}) \cdot \underline{e}_j' = -\hat{s} \cdot \underline{e}_j'$$

questo, valutato sul contorno, è nullo per le B.C.

Inoltre, $\nabla_t \cdot \underline{h}_j'' = 0$ ($\underline{h}_j''$ è solenoidale, dimostrato prima!)

$$\Rightarrow i_j' = \langle \underline{J}_{et}, \underline{e}_j' \rangle$$

Infine, analogamente a prima:

$$i_j'' = \langle \underline{J}_{et}, \underline{e}_j'' \rangle + Y_{\infty,j}'' \langle J_{mz}, h_{zj}'' \rangle$$

Da qui:

$$v_j = \langle \underline{J}_{mt}, \underline{h}_j \rangle + Z_{\infty,j}^* \langle J_{ez}, e_{z,j} \rangle$$

$$i_j = \langle \underline{J}_{et}, \underline{e}_j \rangle + Y_{\infty j}^* \langle J_{mz}, h_{zj} \rangle$$

L'ultima cosa da discutere è: come scrivere i campi longitudinali?

Dalla eq. longitudinale: (M-S)

$$H_z = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{E}_t) - \frac{J_{mz}}{j\omega\mu} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{j\omega\mu} V_i''(z) \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{e}_i'') - \frac{J_{mz}}{j\omega\mu}$$

$$E_z = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla_t \cdot (\underline{H}_t \times \hat{z}) - \frac{J_{ez}}{j\omega\varepsilon} = \dots$$

ma $\displaystyle \frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t \cdot (\hat{z} \times \underline{e}_i'') = \frac{1}{j\omega\mu} \nabla_t \cdot \underline{h}_i'' = Y_{\infty,i}'' h_{z,i}''$

$$\Rightarrow H_z = \sum_{i=1}^{\infty} V_i''(z)\, Y_{\infty,i}''\, h_{z,i}''(\underline{\rho})$$

e un risultato analogo per E_z $\Rightarrow$

Questa formula per H_z ha 2 contributi:

- quello della sommatoria, calcolabile conoscendo (th. linee di tx) V e I !
- quello della J_{ez}, J_{mz} che sia: queste, circuitalmente, causano la presenza di vari generatori lungo z, atti a modellare varie δ di dirac lungo z.