Antenne e propagazione - Teoria

Richiami di Campi Elettromagnetici

La base per la descrizione di un sistema elettromagnetico sono le equazioni di Maxwell:

$$\nabla \times \underline{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \underline{\mathcal{B}}}{\partial t} - \underline{\mathcal{M}};$$
$$\nabla \times \underline{\mathcal{H}} = \frac{\partial \underline{\mathcal{D}}}{\partial t} + \underline{\mathcal{J}};$$
$$\nabla \cdot \underline{\mathcal{B}} = 0 \quad (\rho_m) \longrightarrow \text{utili per teorema di equivalenza!}$$
$$\nabla \cdot \underline{\mathcal{D}} = \rho_e;$$

Nota: principio di dualità:

$$-\underline{\mathcal{B}} \longleftrightarrow \underline{\mathcal{D}}$$
$$-\underline{\mathcal{M}} \longleftrightarrow \underline{\mathcal{J}}$$

Condizioni al contorno (per imporre la continuità dei campi anche in discontinuità di mezzi);

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\underline{\mathcal{H}}_2 - \underline{\mathcal{H}}_1) = \underline{\mathcal{J}}_s \\ (\underline{\mathcal{E}}_2 - \underline{\mathcal{E}}_1) \times \hat{n} = \underline{\mathcal{M}}_s \end{cases}$$

(ve ne sono anche altre ma non le presentiamo, come le altre 2, o quelle di Meixner!)

Di solito, di queste si considerano i fasori:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu \underline{H} - \underline{M}; \\ \nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon \underline{E} + \underline{J}; \\ \nabla \cdot \underline{H} = \frac{\rho_m}{\mu} \\ \nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon} \end{cases}$$

Si ricordi che: $\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = c$, $\quad \mu \simeq 4\pi\,\text{E-7}\ \frac{H}{m}$, $\quad \varepsilon \simeq 8{,}854\ pF/m$

e

$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2\pi}{k}$ "periodo spaziale": fissato un certo $t = t_0$, λ è la distanza tra due picchi dell'onda.

Problema della irradiazione

Il problema della irradiazione è: trovare $\underline{E}$ a partire da:

$$\underline{\underline{L}}(\nabla, j\omega) \cdot \underline{E}(\underline{P}, \omega) = -j\omega\mu\, \underline{J}_{eq}(\underline{P}, \omega) \quad \text{(problema di inversione dell'operatore)}$$

dove $\underline{J}_{eq} = \underline{J} - \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times \underline{M}$ e $\underline{\underline{L}}(\nabla, j\omega) = \nabla \times \nabla \times \underline{\underline{I}} - k^2 \underline{\underline{I}}$

Si ricava che:

$$\underline{E}(\underline{P}) = -j\omega\mu \int_V \underline{\underline{G}}(\underline{P} - \underline{P}') \cdot \underline{J}_{eq}(\underline{P}')\, dV, \qquad \underline{\underline{G}} = \left[\underline{\underline{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k^2}\right] \phi(\underline{P})$$

e, a grande distanza, questo diventa:

$$\underline{E}(\underline{P}) \approx -j\omega\mu \int_V \underline{\underline{I}}_{tr} \cdot \underline{J}_{eq}(\underline{P}') \frac{\exp(-jkr)}{4\pi r}\, dV$$

$$\underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_r \\ J_\theta \\ J_\varphi \end{bmatrix} \quad A \propto \frac{1}{r} \quad B \propto 1 + \frac{1}{r}$$

T2

Vale l'approssimazione di campo lontano:

$$\frac{\exp(-jkr)}{r} \approx \frac{\exp(-jk(R-\underline{r}'\cdot\hat{R}))}{R} \quad \text{dove } |P-P'| > R_F \,,\; R_F = \frac{2D^2}{\lambda}$$

(distanza di Fraunhofer) D dimensione confinente il volume di carica/corrente!

In questo caso l'integrale diventa:

$$\underline{E}(P) = -j\omega\mu \frac{\exp(-jkR)}{R} \underline{\underline{I}}_{tr} \cdot \int_V \underline{J}_{eq}(P') \exp(jk\underline{r}'\cdot\hat{R})\, dV$$

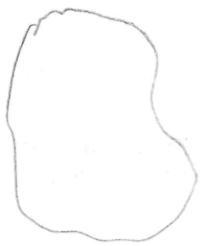
(integrale di irradiazione in campo lontano) $\longrightarrow$ condizioni: $\begin{cases} r \gtrapprox 10\lambda \\ r > \frac{2D^2}{\lambda} \end{cases}$

Nota: l'int. di irr. si può vedere come una sovrapposizione di effetti di onde sferiche: come il principio di Huygens-Fresnel (onda sviluppabile in "base di onde sferiche").

Teorema di equivalenza

Obiettivo: ridurre l'ordine di integrazione (volume $\rightarrow$ superficie)

Correnti equivalenti: supponendo di non avere nella "palla" campo elettrico o magnetico, applicando le cond. al contorno:



$$\begin{cases} \underline{M}_s = \underline{E} \times \hat{n} \\ \underline{J}_s = \hat{n} \times \underline{H} \end{cases}$$

Adattamento:

$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$; SWR: $S = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|}$; RLR (Return Loss Ratio): $|\Gamma|^2 = \frac{P_{riflessa}}{P_{incidente}} \rightarrow R_{RLR} = 20 \log_{10}|\Gamma|$

Circuito Tx antenna:

$\Longrightarrow P_{irr} = \frac{R_{irr}}{R_{irr} + R_L}$

Guadagno:

P_e: potenza di alimentazione dell'antenna; $P_{irr} = \eta P_e$.

$$G = \frac{\frac{dP}{dS}}{\left.\frac{dP}{dS}\right|_{isotropico}} = \text{posso dire che: } dS = R^2 d\Omega;\; \left.\frac{dP}{dS}\right|_{iso} = \frac{P_e}{4\pi R^2} \Longrightarrow \frac{\frac{dP}{\cancel{R^2}d\Omega}}{\frac{P_e}{4\pi \cancel{R^2}}} = \frac{\frac{dP}{d\Omega}}{\frac{P_e}{4\pi}}$$

Direttività: stessa cosa, con P_{irr}! non tiene conto di η!

$G = \eta D$!

Nota! $G = G(\vartheta,\varphi)$: complicato! Di solito ho solo dei "tagli"!

Direttività normalizzata:

$D(\vartheta,\varphi) = D_{max}\, d(\vartheta,\varphi)$; so però che:

$$D(\vartheta,\varphi) = \frac{\frac{dP}{dS}}{\left.\frac{dP}{dS}\right|_{irr}} = \frac{\frac{dP}{r^2 d\Omega}}{\frac{P_{irr}}{4\pi r^2}} = \frac{4\pi}{P_{irr}}\frac{dP}{d\Omega} \Longrightarrow \frac{4\pi}{P_{irr}}\frac{dP}{d\Omega} = D_{max}\, d(\vartheta,\varphi)$$

integro sull'angolo solido (4π steradianti):

$$D_{max}\int_{4\pi} d(\vartheta,\varphi)\, d\Omega = \frac{4\pi}{P_{irr}}\int_{4\pi}\frac{dP}{\cancel{d\Omega}}\cancel{d\Omega} \quad \text{ma} \int_{4\pi} dP = P_{irr} \;!$$

$$\hookrightarrow D_{max} = \frac{4\pi}{\int_{4\pi} d(\vartheta,\varphi)\, d\Omega}$$

(ciò dimostra che più stretto è l'angolo del HPBW e più alto il guadagno)

Formula magica del guadagno: considero, per un'antenna direttiva con pol. lineare,

$\vartheta_{3dB\,xz} \triangleq \vartheta_1$; $\vartheta_{3dB\,yz} \triangleq \vartheta_2$

La porzione di angolo in steradianti è $\Delta\Omega = \vartheta_1\vartheta_2$; la def. di direttività è:

$$D(\vartheta,\varphi) = \frac{4\pi}{P_{irr}}\frac{dP}{d\Omega}$$

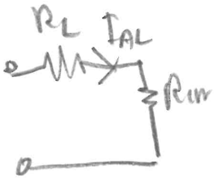
se suppongo che la densità di potenza sia piatta rispetto all'angolo solido,

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{P_{irr}}{\Delta\Omega} \Longrightarrow D_{max} = \frac{4\pi}{\cancel{P_{irr}}}\frac{\cancel{P_{irr}}}{\Delta\Omega} = \frac{4\pi}{\Delta\Omega} \approx \frac{31000}{\vartheta_1\vartheta_2}$$

Altezza efficace:

$$\begin{cases} V_0 = |\underline{h}_{eff}|\,|\underline{E}_{inc}| \\ \underline{P}_e = I_{AL}\, \underline{h}_{eff} \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ corrente di alimentazione:



Altezza eff. / area eq. / G:

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{eq} \;;\quad A_{eq} = |\underline{h}_{eff}|^2 \frac{Z_0}{4 R_g}$$

Guadagno: dà solo informazioni sulla potenza, non sulla direzione di $\underline{E}$ o $\underline{H}$. (T4)
Questa sta nella polarizzazione.
Quando si parla di pol. lineare (p. es. verticale), si definisce la direzione del campo elettrico rispetto al sistema. Dato "x" l'asse orizzontale, y quello verticale, se $\hat{E} \equiv \hat{y}$ la pol. è lineare verticale, e così via. Ciò dà informazione sulla direzione dei campi.

Polarizzazioni:
- nominale: quella che "progettiamo", quella che "vorremmo",
- incrociata: "spuria": componente indesiderata. Se voglio p. es. una pol. verticale, avrò una componente spuria orizzontale.

Antenne ad apertura

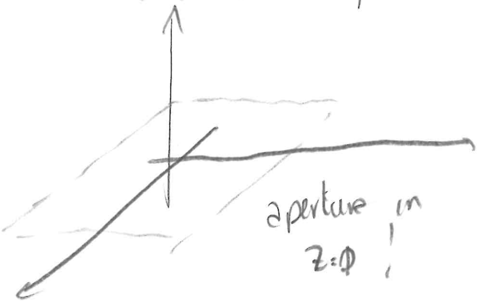
Ricordo l'espressione in far field dell'integrale di irradiazione:

$$\underline{E} = -j \frac{Z_0}{2\lambda} \frac{\exp(-jkR)}{R} \int_A \underline{J}_t \exp(jk\underline{r}' \cdot \hat{R})\, dS$$

Nota: $\underline{r}'$ è il punto che individua una sorgente nel volume (o, in questo caso, nella superficie: l'integrale si estende in A, non in V), R il punto potenziato, $\underline{R} = \underline{P} - \underline{P}'$

Risolviamo "sto" integrale: considero, come elemento di superficie, dS, quello cartesiano:

$dS = dx\,dy$



considero un'apertura su $z=0$, $r' \in \mathbb{R}^3$, $z=0$.

$$\underline{r}' = (x, y, 0) = x\hat{x} + y\hat{y} + \cancel{0\hat{z}}$$

Per quanto riguarda $\hat{R}$:

$$\hat{R} = \hat{x}\sin\vartheta\cos\varphi + \hat{y}\sin\vartheta\sin\varphi + \hat{z}\cos\vartheta$$

Posso calcolare il prodotto:

$$\underline{r}' \cdot \hat{R} = k x \sin\vartheta\cos\varphi + k y \sin\vartheta\sin\varphi \triangleq k_x x + k_y y$$

Il MEG allora è:

$$\underline{P}_e = \int_A \underline{J}_t \exp\left(j(K_x x + K_y y)\right) dx\, dy = \mathfrak{F}_2 \left\{ J_t \right\}$$

Devo integrare sull'apertura; di tutte le densità di corrente $\underline{J}_t$ considero solo quelle superficiali! $\underline{J}_s$! Applico su queste il th. di equivalenza:

$$\begin{cases} \underline{J}_s = \hat{n} \times \underline{H} \\ \underline{M}_s = \underline{E} \times \hat{n} \end{cases}$$

Lo applico in forma "PMC": solo correnti elettriche:

$$\underline{J}_s = 2\, \hat{n} \times \underline{H} \qquad \underline{H} = H_x \hat{x} + H_y \hat{y}$$

$\hookrightarrow$ $\hat{n} \times \underline{H}$, $\hat{n} = \hat{z}$, è:

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 0 & 1 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{x}(-H_y) - \hat{y}(-H_x) = \underline{H_x \hat{y} - H_y \hat{x}}$$

Date:

$$g_x \triangleq \mathfrak{F}_2 \left\{ H_{s,x} \right\} ; \quad g_y \triangleq \mathfrak{F}_2 \left\{ H_{s,y} \right\}, \text{ ho:}$$

$$\underline{E} = E_\vartheta \hat{\vartheta} + E_\varphi \hat{\varphi}$$

nota:

$$\hat{x} = \sin\vartheta\cos\varphi\, \hat{r} + \cos\vartheta\cos\varphi\, \hat{\vartheta} - \sin\varphi\, \hat{\varphi}$$
$$\hat{y} = \sin\vartheta\sin\varphi\, \hat{r} + \cos\vartheta\sin\varphi\, \hat{\vartheta} + \cos\varphi\, \hat{\varphi}$$
$$\hat{z} = \cos\vartheta\, \hat{r} - \sin\vartheta\, \hat{\vartheta}$$

ho:

$$g_x \hat{y} - g_y \hat{x} = g_x\left(\sin\vartheta\sin\varphi\, \hat{r} + \cos\vartheta\sin\varphi\, \hat{\vartheta} + \cos\varphi\, \hat{\varphi}\right) - g_y\left(\sin\vartheta\cos\varphi\, \hat{r} + \cos\vartheta\cos\varphi\, \hat{\vartheta} + - \sin\varphi\, \hat{\varphi}\right)$$

$\hookrightarrow$ E_ϑ (raccolgo ciò che dipende da $\hat{\vartheta}$):

$$\begin{cases} E_\vartheta = \hat{\vartheta} \cos\vartheta \left(g_x \sin\varphi - g_y \cos\varphi \right) \\ E_\varphi = g_x \cos\varphi + g_y \sin\varphi \end{cases}$$

(Vedi "Coordinate Curvilinee", papers > Elettromagnetismo)

Questa usando un PMC; si può far lo stesso con un PEC.

Polarizzazione secondo Ludwig

Problema: identificare dei vettori $\hat{p}$ e $\hat{q}$ per la polarizzazione

Idea 1: $\hat{p} = \hat{y}$, $\hat{q} = \hat{x}$; funziona per $z=0$, perché $\underline{r} \equiv \underline{r}'$ ($z=0$); se però $z \neq 0$, abbiamo $\sin\vartheta \neq 0$, nelle espressioni dei versori (c cambiare sempre):

$$\hat{y} = \sin\vartheta \sin\varphi \, \hat{r} + \cos\vartheta \sin\varphi \, \hat{\vartheta} + \cos\varphi \, \hat{\varphi}$$

se $\sin\vartheta \neq 0$ (cosa che si ha per $z \neq 0$), si ha una componente di polarizzazione lungo $\hat{r}$, cosa insensata.

Idea 2: $\hat{p} = \hat{\vartheta}'$; $\hat{q} = \hat{\varphi}'$ (versori dove l'asse polare è y)

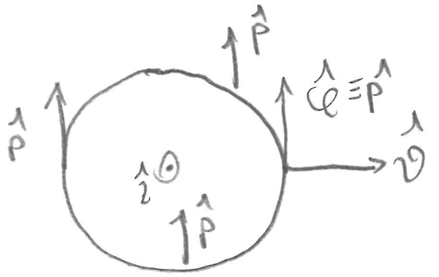
Non funziona per il piano xy per $\varphi = \pm\pi/2$: si hanno discontinuità.

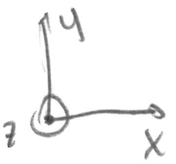
Idea 3: la misura di un'antenna si effettua ruotando una sonda disposta secondo la p. dritta o incrociata in piani a $\varphi =$ costante; in realtà di solito si fissa la sonda e ruota l'antenna under test attorno a $\hat{y}$, incrementando di $\delta\varphi$. Si ricava:

$$\begin{cases} \hat{p} = \cos\varphi \, \hat{\varphi} + \sin\varphi \, \hat{\vartheta} \\ \hat{q} = -\sin\varphi \, \hat{\varphi} + \cos\varphi \, \hat{\vartheta} \end{cases} ; \quad \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{\vartheta} \end{bmatrix}$$

$\vartheta = \pi$ è un punto problematico.

Ora si ha ciò: sempre verso 'l'alto'!





Separabilità delle variabili

Il guadagno, o comunque una funzione $f(\vartheta, \varphi)$ a esso associata, non è in generale a var. separabili, ma si ha la certezza che essa sia periodica: dopo 360° di variazione di ϑ, essa torna "come prima".

Fisso $\vartheta = \vartheta_0$, e faccio variare φ: posso fare uno "sviluppo parziale" in serie di Fourier:

$$f(\vartheta_0, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi) \right]$$

Sblocco ϑ: per ogni ϑ si avrà una diversa serie di Fourier, sempre di questa forma, ma con coeff. diversi: dipendenti da ϑ:

$$\hookrightarrow f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(\vartheta) \cos(n\varphi) + b_n(\vartheta) \sin(n\varphi) \right]$$

se scelgo un opportuno sistema di riferimento, posso annullare uno dei coeff., ottenendo:

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum a_n(\vartheta) \cos(\varphi) \xrightarrow[\text{I° ordine}]{\text{tronco al}} \longrightarrow f(\vartheta, \varphi) \approx a_n(\vartheta) \cos\varphi$$

Questa è un'approssimazione che permette di calcolare direttività e la massima guadagno, con maggiore semplicità.

Guadagno di un'apertura

È noto che:

$$D_{max} = \frac{4\pi}{\int_{4\pi} d(\vartheta, \varphi)\, d\Omega}$$

L'integrale può essere problematico: nel nostro attuale caso però esso può essere calcolato solo sull'apertura: non devo calcolare il flusso sulla sfera all'∞!

$$P_{irr} = \int_A \frac{dP}{dS} dS$$

Ricordo che:

$$D_{max} = \frac{\left.\frac{dP}{d\Omega}\right|_{max}}{\frac{P_{irr}}{4\pi}}$$

ma, dalla teoria, $\frac{dP}{dS} = \frac{|E|^2}{Z_0}$ (da Poynting)

$$P_{irr} = \int_A \frac{dP}{dS} dS \quad ; \quad \frac{dP}{dS} = \frac{dP}{R^2 d\Omega}$$

$$\hookrightarrow \frac{dP}{d\Omega} = R^2 \frac{dP}{dS}$$

$$\longrightarrow D_{max} = \frac{\left.\frac{dP}{dS}\right|_{max}}{\frac{P_{irr}}{4\pi}} = 4\pi R^2 \frac{\frac{|\underline{E}_{max}|^2}{Z_0}}{\int_A \frac{dP}{dS} dS}$$

Dal modulo quadro dell'integrale di irradiazione, si ricava che: (sparisce $\exp(-jkR)$)

$$|\underline{E}| = \frac{Z_0}{2\lambda R} \left| \int_A 2\, \underline{E}\frac{1}{Z_0} dS \right| \qquad \text{infatti, } J = \hat{n} \times H, \quad \underline{H} = \frac{1}{Z_0} \hat{n} \times \underline{E}$$

$\underline{E}_A$, ci interessa la sola apertura!

$$\frac{\frac{1}{Z_0} \frac{4\pi R^2}{4\lambda^2 R^2} \left| \int_A 2\, \underline{E}_A dS \right|^2}{\frac{1}{Z_0} \int_A |\underline{E}_A|^2 dS} = D_{max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \underbrace{\frac{\left| \int E_A dS \right|^2}{\int |E_A|^2 dS}}_{A_{eq}}$$

Apertura rettangolare

Ipotesi fondamentale: campo non nullo solo all'interno dell'apertura rettangolare.

Si ha il seguente integrale!

$$f_{xy} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E_{xy} \exp(jk_x x + jk_y y)\, dx\, dy$$

Altre ipotesi: campo sull'apertura (illuminazione) a variabili separabili:

$$E(x,y) = \sum_n E_{x_n}(x) E_{y_n}(y)$$

La $\mathcal{F}_2$ è il prodotto delle due trasformate, grazie alla separabilità delle variabili.

<u>Caso facilmente risolubile</u>: illuminazione uniforme ($\underline{E}$ costante sull'apertura)

Nomenclature: la dimensione spaziale massima, il "confine" della corrente è $x = \frac{a}{2}$ o $y = \frac{b}{2}$; come nota dall'esponente si ha $k_x x + k_y y$; $k_x x_{max} = k_x \frac{a}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{2} \sin\vartheta\cos\varphi$; definisco $u \triangleq \frac{\pi}{\lambda} a \sin\vartheta\cos\varphi$ ma, sull'asse x, $\varphi = \phi$, $\cos\varphi = 1$: per il taglio $\varphi = \phi$, $u = \frac{\pi}{\lambda} a \sin\vartheta$.

Dualmente, $v \triangleq \frac{\pi}{\lambda} b \sin\vartheta\sin\varphi$ ($\sin\varphi = 1$ per taglio $\varphi = \frac{\pi}{2}$). $u \triangleq \left. k_x \frac{a}{2} \right|_{\varphi = \phi}$.

Nel caso di illuminazione uniforme si fa la trasformata di Fourier di un campo costante sull'apertura, nullo altrove: una porta! La trasformata è ben nota, ed è una sinc:

$$\mathfrak{F}\{rect(u)\} = \frac{\sin(u)}{u} a \qquad \text{e stessa cosa per "l'asse } v\text{"}.$$

Risolvendo equazioni $\frac{\sin u}{u} = c$, c per esempio uguale a $\frac{\sqrt{2}}{2}$, si può trovare, noto a, θ_{-3dB}, poi si può vedere che il I° lobo secondario vale $-13dB$.

Normalmente però l'illuminazione non è uniforme: quello che si fa di solito è illuminare con campi più bassi ai bordi che al centro dell'apertura. Esempio comune:

$$\frac{E(x)}{E(0)} = \cos\left(\pi \frac{x}{a}\right), \quad |x| < \frac{\pi}{a}$$

[Comune: è l'autofunzione del TE_{10} in guide rettangolari!]

La trasformata di questa è ancora nota. Riassumendo, però:

Trasformata del cos(), quindi 2 delta, convoluta per quella della porta

- il lobo principale è più largo (apertura meno direttiva dunque che guadagna meno)

$\downarrow$

- zeri / lobi spostati "più avanti"
- 1° lobo secondario: $-23dB$!!!

↳ Tapering: se faccio in modo che il campo su un'apertura è più basso ai bordi che al centro, ho (ragionamento da matematico) che la trasformata di Fourier è di un qualcosa di "più stretto" (la trasformanda è più stretta), dunque la trasformata è più larga ⟹ lobo principale più largo, dunque meno guadagno e meno lobi, dal momento che la potenza totale non cambia. Questo è il Tapering.

$$t = -20\log_{10}\left(\frac{E(\frac{a}{2})}{E(0)}\right) \qquad \text{[è usualmente positivo]}$$

t: collegato all'area efficace: minore è il campo ai bordi (meno uniforme la distribuzione), minore l'area equivalente.

Distribuzioni di campo "famose":

- coseno sul piedistallo: $f(x) = t + (1-t)\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ [coseno o $\cos^2$ o $\cos^2$]
- distribuzione di Hamming: $f(x) = t + (1-t)\cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)$ [particolare compromesso]

↳ per $t = 0{,}14$, lobo a $-43dB$, D relativamente alta

Errore di fase

Per vari motivi, vi può essere un termine immaginario variabile funzione di x nell'esponenziale! Eillumminazione: $E_0 \exp[j\varphi(x)]$, $\varphi(x)$ funzione "errore di fase": è un termine che modifica la fase della funzione trasformanda, creando a volte seri fastidi. Infatti:

$$F(u) = \frac{a}{2}\int_0^1 f(x)\underbrace{\exp[-j\Psi(x)]}\exp[jux]\,dx$$

↳ questo termine "modifica il Kernel della trasformazione".

Errore lineare: $\Psi(x)$ è una retta. È come introdurre, in teoria dei segnali, un "ritardo in frequenza", ed è ciò che capita: sposta la "u" del massimo, dunque $\vartheta_{max} \neq 0°$!

- Errore quadratico: molto più difficile da studiare in forma chiusa (se non per errori piccoli, per cui si possono usare sviluppi di Taylor o cose simili), ma il risultato finale è:

1) Abbassamento del massimo 2) Riempimento dei minimi (non più zeri), innalzamento lobi, spostamento

Centro di fase ⟹ fastidioso. Da evitare.

Ciò capita perché per esempio una tromba ha un fronte d'onda che avanzando si incurva.

Apertura circolare

Si era detto per un sistema cartesiano, che:

$$E_A \propto \int_A f(x,y)\exp[j(k_x x + k_y y)]\,dx\,dy$$

Ora il sistema ha simmetria cilindrica, dunque conviene usare coordinate polari planari:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi' \\ y = \rho\sin\varphi' \end{cases}$$

dove φ' è l'angolo considerato nel piano dell'apertura: il "φ delle sorgenti".

$$\hookrightarrow \int_A E\exp[j(\rho\cos\varphi' k\sin\vartheta\cos\varphi + \rho\sin\varphi' k\sin\vartheta\sin\varphi)]\,\rho\,d\rho\,d\varphi'$$

↳ Jacobiano

$$= (\text{per formule di addizione}) = \int_A E\exp[j\rho k\sin\vartheta\cos(\varphi-\varphi')]\,\rho\,d\rho\,d\varphi'$$

Definisco anche qua una "u", diversa da prima:

$u \triangleq K a \sin\vartheta$ | dove a è il raggio della apertura circolare! |

introduco inoltre un cambio di variabili (normalizzo):

$r \triangleq \frac{\rho}{a} \Rightarrow \rho = ra$; $d\rho = a\, dr$

così che: l'integrale diventa (variabili separabili)

$\hookrightarrow a^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(j a K r \sin\vartheta \cos(\varphi-\varphi')) \, r\, dr\, d\varphi' = a^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[j u \cos(\varphi-\varphi')] \, r\, dr\, d\varphi'$

Ipotesi finale: distribuzione a simmetria assiale: indipendente da φ'

$\hookrightarrow \int_0^{2\pi} \exp[j u \cos(\varphi-\varphi')] \, d\varphi' = 2\pi J_0(ur)$ [Appendice A.15 me da trovare/dimostrare!]

$\hookrightarrow \underline{E} = 2\pi a^2 \int_0^1 r\, J_0(ur)\, dr$

Nel caso di illuminazione uniforme, per le proprietà delle funzioni di Bessel, si ha:

$$F(u) = 2\pi a^2 \frac{J_1(u)}{u}$$

Nel caso di illuminazione NON uniforme, si ha:

$F(u,\varphi) = 2\pi a^2 \int_0^1 f(r)\, r\, J_0(ur)\, dr$ Trasformata di Fourier-Bessel

Una funzione "famosa" per le aperture circolari "taperate" è:

$i(r) = (1-r^2)^p$ [Prova da trasformare secondo FBT]

$\hookrightarrow FBT\{i(r)\} = (\text{si dimostra}) = \pi a^2 \frac{2^{p+1} p!\, J_{p+1}(u)}{u^{p+1}}$ aumento p, aumento il tapering

Nota:

- nelle aperture rettangolari, si hanno lobi secondari elevati sugli assi x e y (del riferimento considerato), più bassi da altre parti; questo si vede valutando le sinc su varie zone del piano (u,v)
- nelle aperture circolari, la potenza è distribuita in modo più uniforme, grazie all'ipotesi di simmetria assiale: lobi più bassi e più distribuiti, più uniformi.

Nota: aperture circolare e distribuzioni $f(r)$ generiche

Idea: parto da

$$F(u) = \int_0^1 f(r) J_0(ur)\, r\, dr$$

uso: cambio di variabile $x = 1 - r^2$

$\hookrightarrow f(x) \simeq \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ e lo sviluppo in polinomi. $N=5$ per f molto ballerine, $N=2$ per funzioni smooth

$\hookrightarrow f(r) \approx \sum_{n=0}^{N} a_n (1-r^2)^n$ $\Rightarrow$ sviluppo in base di 'ste funzioni!

$$\hookrightarrow F(u) \approx \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} a_n (1-r^2)^n J_0(ur)\, r\, dr = \underline{\sum_{n=0}^{N} a_n \int_0^1 (1-r^2)^n J_0(ur)\, r\, dr}.$$

Centro di fase

Centro di fase: centro dell'onda sferica che parte dall'apertura.

Funzione di campo irradiato un po' SO un po' LO: considero solo il lobo principale per star sicuro di non aver sbalzi di fase.

Un'onda sferica ha modulo che si attenua come $\frac{1}{r}$, fase che va come $\exp(jkr)$, dove r è il punto considerato. Data per esempio tromba rettangolare, cosa si ha: l'apertura sta su di una porzione di piano, non di sfera; la superficie a fase costante invece è una sfera. Questo significa che sull'apertura la fase non è costante: per esempio il centro dell'apertura appartiene a una certa sfera (sup a fase costante), un altro punto NO, dal momento che un piano è una superficie diversa da una sfera!

La differenza tra punto dell'apertura e punto appartenente alla sfera a fase costante è l'errore di fase.

Anticipo: più la tromba è lunga, più la sfera sarà a raggio lungo, quindi più sarà "approssimabile a un piano"; per questo l'errore di fase è minore.

L'errore è quadratico! Infatti:

$r = \sqrt{x^2 + L^2}$ per Pitagora.

Vogliamo determinare, per un'apertura, il centro di fase: la zona per cui la fase resta circa costante.

Soluzione: considerare un punto potenziante NON nel piano $z = \phi_1$ ma in un altro punto: $\underline{r}'$, vettore che descrive/indica le sorgenti, sarà:

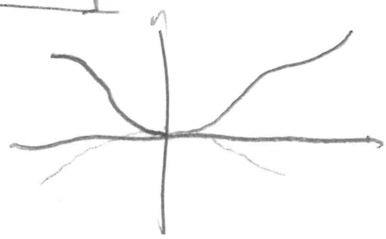
$$\underline{r}' = x\hat{x} + y\hat{y} + d\hat{z}$$

$$\hookrightarrow k\underline{r}' \cdot \hat{R} = k_x x + k_y y + k d\cos\theta$$

Questo è ciò che si ottiene spostando il nostro vettore r' di "d" in z.

Ci è permesso di definire un riferimento di fase tale per cui si ha:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \exp\left(jkd\cos\theta\right) \xrightarrow[\text{di fase}]{\text{cambio rif.}} \underline{E} = \underline{E}_0 \exp\left[jkd\left(\cos\theta - 1\right)\right]$$



così che, se $\theta = \phi_1$ l'incremento di fase è nullo.

Il fatto di aver introdotto questo "d" introduce una funzione di fase moltiplicativa (moltiplicare per significa sommarla) che COMPENSA l'andamento dell'errore quadratico.

Cosa si fa? Si sceglie un d tale da compensare la concavità intrinseca di $\angle \underline{E}$ richiedendo di non avere variazione di fase su un certo u, dunque su un certo θ (per es. $\theta = 10°$). Scelto il θ_0 (per es. $\theta_0 = \theta - 0.05$), si chiede:

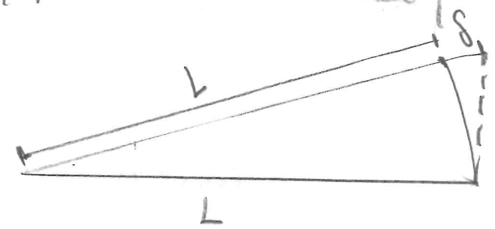
$$\frac{d}{\lambda} = \frac{\phi_0}{2\pi\left[\cos\theta_0 - 1\right]}$$ approssimo il coseno con $1 - \frac{x^2}{2}$ $\Rightarrow$ $$\frac{\phi_0}{2\pi\left[-\frac{\theta_0^2}{2} - 1 + 1\right]} = \frac{\phi_0}{\pi\theta_0^2}$$

Meno ???

Antenne a tromba

Trombe rettangolari | piramidali

Ottenuta aumentando le dimensioni della guida d'onda, per "adattare con l'aria"; partendo da una guida rettangolare supponendo che nulla inneschi o lasci comunque propagare fino all'apertura modi superiori, si suppone monomodalità all'apertura: TE_{10}, dunque con campo elettrico con andamento $\propto \cos(x)$, diretto lungo $\hat{y}$, e costante lungo $\hat{x}$.



$\underline{E} = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\hat{y}$ → questa è a pol. verticale.

Quantifico l'errore di fase: come detto, la sup a fase costante è una sfera di raggio L; δ è la massima distanza tra apertura e sfera di raggio L; usando Pitagora,

$$(L+\delta)^2 = L^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow \cancel{L^2} + \underbrace{\delta^2}_{\simeq 0} + 2\delta L = \cancel{L^2} + \frac{b^2}{4} \rightarrow \boxed{\delta = \frac{b^2}{8L}}$$

questo è per il piano $\underline{E}$.

Una nota: ora che sappiamo qualcosa sulla polarizzazione,

- $\varphi = 0$ è il piano orizzontale, ossia il piano $H \Rightarrow$ variabile solo u $[\sin\varphi = 0]$
- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ è il piano verticale, ossia il piano $E \Rightarrow$ variabile solo v $[\cos\varphi = 0]$

Ciò dimostra quanto detto prima: se L è corto, la sfera ha raggio piccolo, e approssima male il piano! Più errore!

L'errore di fase ψ è $k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{\cancel{2}\pi}{\lambda}\frac{b^2}{\cancel{8}L} = \boxed{\frac{\pi b^2}{4L\lambda}}$

Ciò (con x o y) vale per entrambi i piani!

Nota: L può essere L_H o L_E, dal momento che L è la distanza tra il punto di incontro tra ipotenusa e asse della tromba, e, se la tromba è "astigmatica", i due L son diversi. L NON è la distanza tra attacco con la guida e apertura!

↳ $\phi(x) = \frac{\pi a^2}{4\lambda L_H}$; $\phi(y) = \frac{\pi b^2}{4\lambda L_E}$

$(\varphi = 0)$ $\quad$ $(\varphi = \frac{\pi}{2})$

Tromba ottima

Più l'apertura è larga, più aumenta il suo guadagno ma, a parità di L aumenta anche l'errore di fase (quadratico), che riduce il guadagno. Si ha:

$$G = 10\left[\log\left(0{,}81 \times 4\pi \frac{ab}{\lambda^2}\right)\right] \underbrace{-L_e - L_h}_{Losses}$$

, dove $L_e \approx 16\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^2$, $\frac{\delta}{\lambda} < 0{,}7$

$L_h \approx 7{,}2\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^2$, $\frac{\delta}{\lambda} < 0{,}6$

(in dB)

(formule ottenute per interpolazione)

↳ perdita quadratica rispetto a δ!

Tromba ottima: la tromba con massimo guadagno, a parità di lunghezza.

Si dimostra (abbastanza empiricamente) che la tromba ottima si ha per:

$$s = \frac{3\lambda}{8} \; ; \; t = \frac{\lambda}{4} \implies \begin{cases} a = \sqrt{3\lambda l_h} \\ b = \sqrt{2\lambda l_e} \end{cases}$$

perdita 2 dB rispetto a guadagno senza errore di fase.

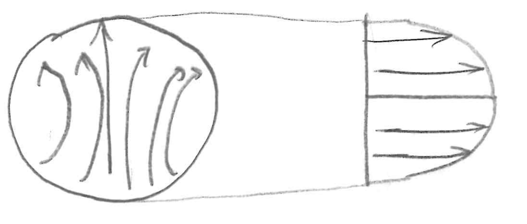
Tromba a fascio simmetrico: imponendo i ϑ_{3dB} uguali, si ricava $\frac{a}{b} \approx \frac{1{,}2}{0{,}88} = 1{,}36 \approx \frac{4}{3}$

Nota: $l_e \approx L_E$, $l_h \approx L_H$. Dimostro: posso usare Pitagora così:

$$l^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (l - \delta)^2 = \frac{b^2}{4} + \cancel{l^2} - 2l\delta + \underset{\approx 0}{\delta^2} - \cancel{l^2} \implies l \approx \frac{b^2}{8l} \approx \frac{b^2}{8L} \;\; !!!$$

Trombe coniche

Supponendo ancora la monomodalità, l'ampiezza del campo elettrico è ora non costante sul piano E: il modo fondamentale è un TE_{11}



distribuzione "tapered": una J_1 (funzione di Bessel)

in questo caso l'errore di fase è uguale nei 2 piani: $\delta = \frac{D^2}{8L\lambda}$

Se δ è trascurabile ($< \frac{1}{10}$), $\nu \approx 0{,}83$ ↳ $G_0 = 20\log_{10}\left(\frac{\pi D}{\lambda}\right) - 0{,}8$

con errore più pronunciato, si ha una loss:

$$L \approx 13{,}8\left(\frac{\delta}{\lambda}\right)^2$$

In realtà con l'errore di fase, più che ridurre il guadagno, aumentano i lobi.

Impossibilità di avere il diagramma simmetrico: un cerchio è e resta tale.
Si può fare la tromba ottima invece.

Simmetria e polarizzazione.

La simmetria è importante perché permette di ridurre la X-polarization! Si ha che:

$$\begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varphi} \\ \hat{\vartheta} \end{bmatrix}$$

[La 2.104 è impostata a 90]

Si ha:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 \left[F_H(\vartheta) \cos\varphi \,\hat{\varphi} + F_E(\vartheta) \sin\varphi \,\hat{\vartheta} \right] \qquad \underline{E} \cdot \hat{q} = \sin\varphi\cos\vartheta \left[F_H(\vartheta) - F_E(\vartheta) \right]$$

Faccio il prodotto con $\hat{p}$ e $\hat{q}$:

Se $F_E = F_H$, ossia se si ha simmetria in modulo e fase, ho bassa pol. incrociata!

Ciò può essere utile per avere "multipolarizzazione".

Questo vuol dire: trasmettere informazione sia nella polarizzazione verticale, sia per quella orizzontale, e le 2 "non interferiscono"!! Ma le 2 devono essere "ben disaccoppiate": non devono esserci polarizzazioni incrociate che sarebbero delle spurie rispetto all'informazione.

Per avere ciò, servirebbe avere circa lo stesso tapering nei 2 piani.

Tromba bimodale

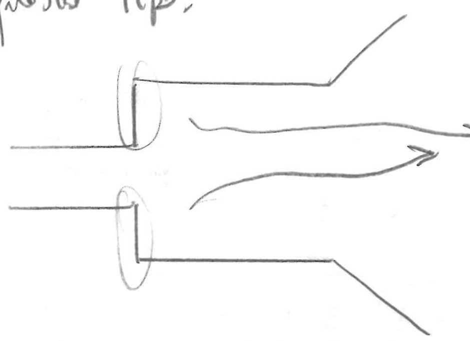
Bimodale: che innesca <u>2 modi</u>. Partiamo dalla propagazione guidata:

$$\nabla_t^2 \phi + k_{ti}^2 \phi = \emptyset$$

applicando le condizioni al contorno, si possono ottenere le autofunzioni modali.

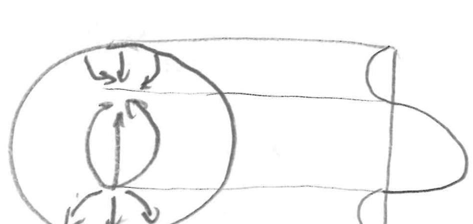
- Per i modi TM_i è di Dirichlet: $\phi(a) = \emptyset$
- Per i modi TE_i di Neumann: $\frac{d\psi}{d\gamma} = \emptyset$

Dei modi superiori saremo interessati a combinare il TM_{11}, che però non è il primo modo superiore al TE_{11} (ciò si può vedere dalle funzioni di Bessel e dai loro zeri).
Prima vediamo come eccitarlo, poi perché ci interessa. L'idea è usare una discontinuità di questo tipo:



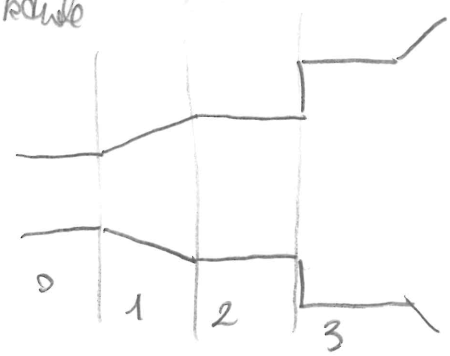
idea: per realizzare un modo TM si deve realizzare un gradino brusco nella guida d'onda, perché si ha una parete metallica (2) perpendicolare all'asse z; qui, si richiede una componente assiale del campo elettrico, dunque un modo TM.
Il fatto che il primo indice sia ancora 1 indica che si ha una variazione di sezione, ma non di simmetria nella guida (medesima variazione azimutale).
Si ha una discontinuità radiale (varia il ρ), ma non azimutale, quindi, dalla teoria, m non può variare, n sì, ma il primo modo a "m=1" dopo il TE_{11} è il TM_{11} !!!
(Vedi Matekovits p.11) $\begin{cases} TE_{mn} \\ TM_{mn} \end{cases}$

Perché tutto ciò? Beh, il TM_{11} ha una topografia di campo del tipo:

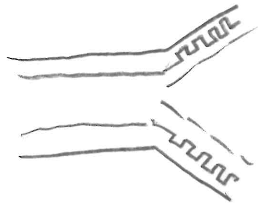


"sommandola" alla TE_{11} con un certo peso (20%), si ottiene:  (distribuzione topografica circa quanto quella nell'altro asse) (fino a ≈ 40 dB di 606)

Come si fa? 1) Prima si introduce una restrizione graduale
2) Si introduce uno spazio per l'allineamento dei 2 sottomodi
3) Si fa uno step per supportare il TE_{11} (farlo propagare)
Questo, perché* un singolo gradino sarebbe troppo elevato, e le k_t troppo diverse.



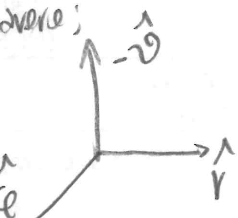
Tromba corrugata

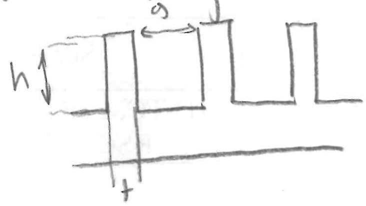


La superficie interna è, per l'appunto corrugata.
Si hanno condizioni al contorno particolari essendo il contorno molto complicato; possiamo però trovare delle "condizioni al contorno macroscopiche", che permettono di avere condizioni "generali" valide su tutta la superficie di separazione tra solchi e spazio esterno.

Si può dimostrare che, in questa struttura, non sono possibili modi solo TE o solo TM, bensì solo <u>ibridi</u>: non completamente TE e non TM.

Per l'analisi che si vuole effettuare, dato "t" lo spessore di ciascun dente, "g" la distanza tra 2 denti, "h" l'altezza di ciascun dente, si deve avere:

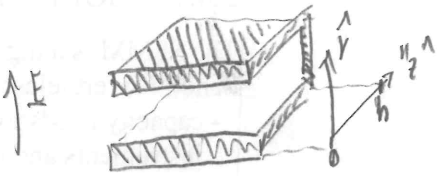




$\begin{cases} t \ll g & \text{(spessore dente} \ll \text{larghezza solco)} \\ g \ll \lambda & \text{(largh. solco} \ll \lambda\text{)} \end{cases}$ $(1/5 \div 1/6)$

si ha

$E_\varphi = 0$: infatti, <u>anche</u> <u>dentro ai solchi</u>, si ha una "guida a facce piane parallele", con $g \ll \lambda$, dunque <u>sotto taglio</u>! Per la proprietà delle guide "planari", si ha dunque un "corto circuito" anche nei solchi.



E_r : la lunghezza dei solchi è ∞, e, guardando il campo elettrico, o meglio la sua componente verso $\hat{r}$, vediamo che possiamo ragionare come se avessimo una guida (su una ipotetica direzione longitudinale z, che, nel disegno della slide è tipo $\hat{\vartheta}$), caricata su uno short a distanza "h" (lungo la "z"). Vale però una relazione di impedenza:

$E_r = Z_T H_\varphi$

Possiamo calcolare Z_T con il modello della linea di trasmissione su questa "guida":

$Z_T = j Z_0 \tan(kh)$

Queste condizioni sono anisotrope (dipendono dalla direzione, a seconda di essa cambiano), c'è una condizione di "relazione di impedenza superficiale", a differenza che nelle guide, dove no "di corto circuito". Queste dan vita a modi ibridi.

oto! prendendo l'eq. di Helmholtz, passandola in coordinate sferiche, applicando le cond. al contorno, per φ si han seni/coseni, per "r" l'equazione sferica di Bessel, per "ϑ" l'equazione di Legendre.

Nota: vengono fuori funzioni di Hankel, che sono combinazioni lineari delle Bessel (la "Y", la f. di Neumann, non poteva esserci nella guida perché diverge per argomento nullo), hanno un forte significato: la I^a e la II^a si comportano come onde cilindriche rispettivamente progressive e regressive; se le Hankel derivano da un'eq. di Laplace/Helmholtz sferica, stanno discorso con onde sferiche.

Tutto ciò deriva da eq. differenziali ma, se per le condizioni è tutto nullo al bordo, tutta la soluzione è nulla; non si hanno solo modi TE o TM.

Combinando i 2, con un peso $\gamma = 1$, $E_\vartheta = E_\varphi$: diagramma di radiazione teoricamente simmetrico! L'integrale si fa solo in r.

Per avere $\gamma = 1$, il "modo ibrido bilanciato", $j \eta_0 \tan kh$ deve andare a ∞: vedi (2.116). $(\gamma = 1)$. $\Rightarrow h = \lambda/4$, $\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$: ciò è il modo ibrido bilanciato! $h = \frac{\lambda}{4}$.

→ Buonissima simmetria e, se progettati adeguatamente i denti, banda larga! (e dell'adattamento)

Nota: impossibilità modo TEM, perché per quanto la struttura potrebbe supportarlo, la guida circolare non potrebbe eccitarlo (parte da indice azimutale $m \geq 1$).

Ottica Geometrica

Metodo approssimato di studio di fenomeni elettromagnetici basato su ipotesi di λ infinitesima (o enorme, nel caso di campo vicino)

Oltre all'ipotesi su λ, se ne hanno altre 2:
- superfici di fase per E e H identiche
- ampiezze dei campi lentamente variabili rispetto alla fase (essendo λ piccola, per minimi spostamenti spaziali la fase varia di centinaia di gradi)

dunque:

$$\underline{E}(\underline{P}) = \underline{E}_0(\underline{P}) \exp(-jk_0 \Psi) \qquad \Psi \text{ è la superficie di fase,}$$

$$\underline{H}(\underline{P}) = \underline{H}_0(\underline{P}) \exp(-jk_0 \Psi) \qquad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$$

Le eq. del rotore sono:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu_0 \underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{J}_{cond} \end{cases}$$

sostituisco in una:

$$\nabla \times \underline{E} = \nabla \times (\underline{E}_0 \exp(-jk_0\Psi)) = \nabla \times \underline{E}_0 \exp(-jk_0\Psi) + \underline{E}_0 \times \nabla \exp(-jk_0\Psi) =$$

$$= \exp(-jk_0\Psi)\, \nabla \times \underline{E}_0 - jk_0 \exp(-jk_0\Psi)\, \underline{E}_0 \times \nabla\Psi = -j\omega\mu_0 \underline{H}$$

Allora:

$$-j\omega\mu_0 \underline{H}_0 \cancel{\exp(-jk_0\Psi)} = \cancel{\exp(-jk_0\Psi)} [\nabla \times \underline{E}_0 - jk_0\, \underline{E}_0 \times \nabla\Psi]$$

Se vale l'ipotesi di variazioni di campo quasi nulle, $\nabla \times \underline{E}_0$, collegato alla derivata di $\underline{E}_0$ nelle varie direzioni, è $\simeq \phi$:

$$\cancel{j}\omega\mu_0 \underline{H}_0 \simeq \cancel{j} k_0 \underline{E}_0 \times \nabla\Psi \longrightarrow \underline{E}_0 \times \nabla\Psi = \frac{\omega\mu_0}{k_0} \underline{H}_0$$

Allo stesso modo si ricava la duale:

$$\nabla\Psi \times \underline{H}_0 - \frac{\omega\varepsilon}{k_0} \underline{E}_0 \simeq \phi$$

da unire:

$$\underline{H}_0 = \frac{k_0}{\omega\mu} \nabla\Psi \times \underline{E}_0 \longrightarrow \nabla\Psi \times (\nabla\Psi \times \underline{E}_0) \frac{k^2}{\omega^2\mu\varepsilon} - \underline{E}_0 = \phi$$

MA:

$$\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C} = \underline{B}(\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C}(\underline{B} \cdot \underline{A}) \longrightarrow \underbrace{(\underline{E}_0 \cdot \nabla\Psi)}_{\simeq \phi} \nabla\Psi\, \underline{E}_0 - |\nabla\Psi|^2 \underline{E}_0 + n^2 \underline{E}_0 = \phi$$

$$\longrightarrow |\nabla\Psi|^2 \underline{E}_0 = n^2 \underline{E}_0$$

Questa è:

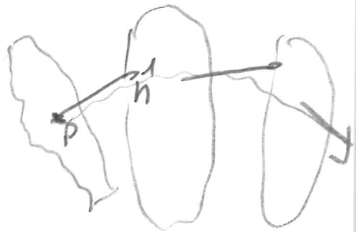
$$|\nabla\Psi|^2 = n^2(x,y,z)$$

Questa Ψ è detta "funzione iconale", dal tedesco Eikonal, dal greco εἰκών, "immagine", ed è importante dal momento che fa dedurre due:

- $\underline{E_0}$ e $\underline{H_0}$ sono trasversali a $\nabla\Psi$, essendo $\nabla\Psi$ ortogonale a Ψ;
- questa eq. descrive i fronti di fase: lega la variazione della superficie a fase costante con l'indice di rifrazione!

- si ha che $k_0 \underline{E_0} \times \nabla\Psi = \omega \mu \underline{H_0}$: $\underline{H_0}$ è perpendicolare a $\underline{E_0} \times \nabla\Psi$, ma $\underline{E_0}$ è perpendicolare a $\nabla\Psi$: i 3 formano una terna ortogonale. $\underline{E} \times \underline{H}$ è parallelo a $\nabla\Psi$, quindi $\nabla\Psi$ è anche la direzione del flusso di potenza.

Definizione di raggio



Data superficie di fase Ψ_1 e un punto su di essa, si può tracciare la normale alla superficie passante per esso.

Il fronte d'onda progredirà, spostandosi lungo la normale, verso una Ψ_2. Da qui, partendo dal punto P, arrivando alla Ψ_2, si trova una successione di punti dati dall'intersezione della normale alla superficie con fronte d'onda successivo.

Il raggio è il luogo delle normali alle superfici di fase passante per un punto nella sup. di fase di partenza.

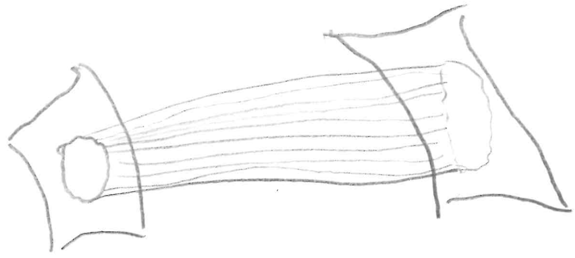
Se il mezzo è omogeneo, n = costante e, per l'eq. dell'iconale, è una <u>retta</u>.

Il raggio tende a curvarsi verso la direzione in cui il gradiente dell'indice di rifrazione è positivo: dove il mezzo è più denso, n maggiore. (Snell: $n_0 \sin\vartheta_i = n_1 \sin\vartheta_{rifr}$)

Se $\nabla\Psi$ è parallelo a ∇n, il raggio è comunque retto.

Tubo di flusso

I raggi sono linee di flusso dell'energia; date due superfici di fase Ψ_1 e Ψ_2, data su Ψ_1 una linea chiusa, dati tutti i raggi su questa linea chiusa, li si facciano arrivare fino a Ψ_2: questo insieme di linee sembra un tubo: tubo di flusso.



Attraverso le pareti laterali di questo "tubo", non vi è flusso di potenza, dal momento che il vettore di Poynting è parallelo, non ha dunque componenti ortogonali al raggio.

Se il mezzo è senza perdite, il flusso del vettore di Poynting $\underline{S}$ attraverso questa superficie è nullo: data S la superficie laterale del tubo, A_1 la superficie identificata dalla linea chiusa su Ψ_1, A_2 quella della linea chiusa su Ψ_2, considerando le normali definite NON tutte verso l'esterno, ma verso dx (direzione del raggio),

$\hat{n}_1 \approx -\hat{n}_2$

Per la conservazione della potenza e per l'assenza di perdite, si ha:

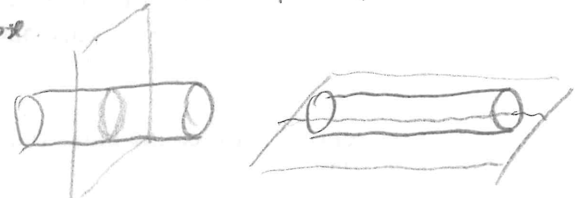
$$\int_{S+A_1+A_2} \underline{S} \cdot \hat{n}\, dA = \Phi = \underbrace{\int_S \underline{S} \cdot \hat{n}\, dA}_{\Phi} + \int_{A_1} \underline{S} \cdot \hat{n}_1 dA + \int_{A_2} \underline{S} \cdot \hat{n}_2\, dA = \int_{A_1} \underline{S} \cdot \hat{n}_1\, dA - \int_{A_2} \underline{S} \cdot n_1\, dA$$

$$\hookrightarrow \int_{A_1} \underline{S} \cdot \hat{n}_1\, dA = \int_{A_2} \underline{S} \cdot \hat{n}_1\, dA \longrightarrow \text{CONSERVAZIONE ENERGIA NEI TUBI DI FLUSSO}$$

Ora: data superficie a fase costante Ψ_1, un punto $P_1 \in \Psi_1$, area pseudo-rettangolare identificata da segmenti dx e dy, vorremmo identificare il raggio di curvatura della superficie in P_1. Se la superficie è non-sfera, nel punto vi potrebbero essere infinite diverse curve che la attraversano, infiniti centri di circonferenze osculatrici nel punto, ∞ raggi!

Noi consideriamo un ρ_{min} e un ρ_{max} di curvatura! I "raggi principali" di curvatura, ossia quello minimo e quello massimo. Le direzioni di questi, si dimostra, sono ortogonali: Tagliare con piani la sup. di fase.

Cilindro: $\rho_{min} = \rho_{cerchio}$, $\rho_{max} = \infty$ (retta)!



Abbiamo detto che le direzioni dei raggi principali son ortogonali; attribuiamo "x" al ρ_{min}, "y" al ρ_{max} (gli "effetti"); si ha:

$dx_1 = \rho_{1min}\, d\alpha$ $\qquad dx_1, \rho_1$ associati a Ψ_1, $d\alpha$ incremento infinitesimo di angolo!

$dy_1 = \rho_{1max}\, d\beta$

$\hookrightarrow dA_1 = dx_1\, dy_1 = \rho_{1min}\, \rho_{1max}\, d\alpha\, d\beta$

superficie infinitesima sulla sup. a fase costante, attorno a P_1

Consideriamo dA_2: per ipotesi supponiamo che, nella nuova superficie a fase costante $d\alpha$ e $d\beta$ si preservino, se i raggi sono rettilinei per ipotesi, si può dimostrare che i piani principali di ψ_2 su P_2 son gli stessi di ψ_1 in A_1, dunque i raggi saranno:

$$dx_2 = (\rho_{1min} + p)\, d\alpha$$
$$dy_2 = (\rho_{1max} + p)\, d\beta$$

"p" distanza tra P_1 e P_2: $p \triangleq P_2 - P_1$

si "prolungano" i raggi di "p", considerando per ipotesi raggi rettilinei.

↳ definisco $\rho_{min} \triangleq \rho_{1min}$, $\rho_{max} \triangleq \rho_{1max}$

$$\hookrightarrow dA_2 = (\rho_{min} + p)(\rho_{max} + p)\, d\alpha\, d\beta$$

Ragiono sul Poynting: $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}^*$ dove $\underline{H} = \frac{1}{z_0} \hat{n} \times \underline{E}$

$$\hookrightarrow |\underline{S}| = \frac{|\underline{E}|^2}{z_0}$$

$$\hookrightarrow \int_{A_1} \underline{S} \cdot \hat{n}_1\, dA = \int_{A_2} \underline{S} \cdot \hat{n}_2\, d\sigma \iff \frac{|\underline{E}_1|^2}{z_0} \rho_{min}\rho_{max}\, d\alpha\, d\beta = \frac{|\underline{E}_2|^2}{z_0} (\rho_{min} + p)(\rho_{max} + p)\, d\alpha\, d\beta$$

$$\hookrightarrow |\underline{E}_2|^2 = |\underline{E}_1|^2 \frac{\rho_{min}\rho_{max}}{(\rho_{min} + p)(\rho_{max} + p)}$$

sapendo poi che la fase è legata alle superfici, se $\psi_2 - \psi_1 = p$,

$$\hookrightarrow \underline{E}_2 = \underline{E}_1 \exp(-jk_0 p) \sqrt{\frac{\rho_{min}\rho_{max}}{(\rho_{min} + p)(\rho_{max} + p)}}$$

Nota: se $p = \{-\rho_1, -\rho_2\}$, la formula NON VALE: punti di caustica, qua l'ottica geometrica NON VALE.

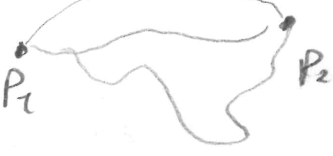
Nota:
$$\lim_{p \to \infty} |\underline{E}_2| \simeq \frac{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}{p} |\underline{E}_1|$$
: andamento del modulo a onda sferica!

Nel caso di onde piane, i tubi di flusso sarebbero paralleli tra loro, essendo tutte le normali parallele alla sup. a fase costante (è un piano...). Non si avrebbe, in questo caso, attenuazione, essendo costanti le superfici dei tubi di flusso. Più il tubo di flusso si allarga, più la densità di potenza si "spalma", si riduce.

Nota: l'int. di irradiazione dice che il campo dipende da ∞ sorgenti, qua solo del campo in un altro punto. Dalle approssimazioni (metodo fase stazionaria) i 2 metodi son collegati.

Principio di Fermat

Dati 2 punti P_1 e P_2, esistono infiniti cammini che possono collegarli; di tutti questi, il "cammino ottico" è l'integrale di linea dell'indice di rifrazione n:



$$C_{ottico} = \int_{l_{P_1 \to P_2}} n \, dl$$

Il principio di Fermat dice che il cammino ottico reale, quello che il corpo effettivamente percorre, è quello minimo, ossia quello per cui l'integrale di linea diventa un integrale su un intervallo:

$$= \int_{P_1}^{P_2} n \, dl$$

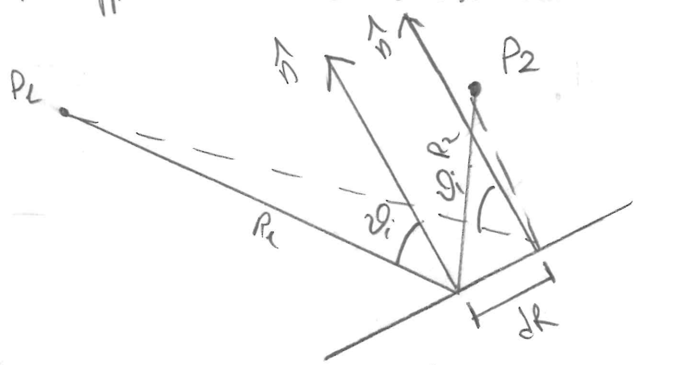
| questo, in un mezzo omogeneo; in un mezzo non omogeneo, si ha un cammino). [dim. : Collin - Antennas and radiowave propagation. p. 482 - appendix]

cammino minimo $\longleftrightarrow$ stazionario

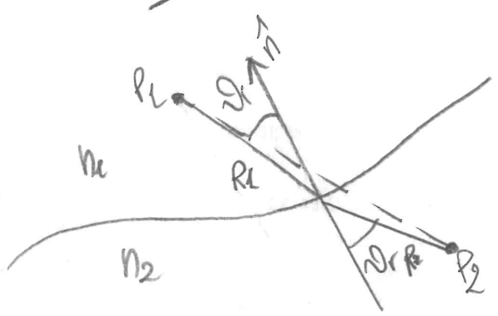
Da Collin, una nota: il principio di Fermat corrisponde, in ottica, al "principio di minima azione", noto in meccanica razionale. In effetti si recuperano, per dimostrarlo, le eq. di Eulero Lagrange, note per il calcolo delle variazioni, spesso applicate in meccanica razionale.

Applicazione: leggi di Snell

Ricavo le leggi di Snell con il principio di Fermat: le condizioni che rendono stazionaria la differenza tra i due cammini si ottengono imponendo il "differenziale della differenza tra cammini" nullo. Si ha, in un caso, $p = R_1 + R_2$. ϑ_i è circa uguale:



$$\begin{cases} dR_1 = dR \sin\vartheta_i \\ dR_2 = dR \sin\vartheta_r \end{cases} \Longrightarrow dR = dR\sin\vartheta_i - dR\sin\vartheta_r$$



$\hookrightarrow \sin\vartheta_i = \sin\vartheta_r$

Per la rifrazione, si fa qualcosa di simile: il cammino totale è $n_1 R_1 + n_2 R_2$; faccio gli incrementi, e ottengo:

$\hookrightarrow \cancel{n_1 p_1 + n_2 p_2} + \underbrace{dR\, n_1 \sin\vartheta_i - dR\, n_2 \sin\vartheta_t}$ → annullando ciò:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\vartheta_t}{\sin\vartheta_r}$$

Le antenne ad apertura han una superficie curva e dunque i raggi principali di curvatura di un raggio su esse incidenti sono diversi: i fronti d'onda si "deformano", dunque cambia per esempio la direzione di riflessione se per esempio la superficie curva è usata da riflettore.

Antenne a riflettore - introduzione/concetti preliminari

Che tipo di superfici usiamo, per riflettere il campo elettromagnetico?

Supponiamo di avere una superficie PEC, regolare fino alla derivata II^a, in modo da poterla descrivere mediante un'espansione tridimensionale di Taylor al II° ordine:

$$z = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right) \qquad \begin{bmatrix} R_1, R_2 \text{ raggi principali di curvatura,} \\ x, y, \text{ direzioni principali} \end{bmatrix}$$

Il sistema di riferimento scelto è:

- Origine sul punto P della superficie considerata
- Versore dell'asse $\hat{z}$ del sistema di riferimento coincidente con la normale $\hat{n}$ della superficie, su P.

→ Ciò annulla i termini di I° e 0° grado!

Si consideri, di tutte queste, la famiglia delle "superfici di rivoluzione": si tratta di superfici, espresse in un sistema di coordinate cilindrico, per cui, data la curva che si fa ruotare attorno all'asse $f(\rho)$ funzione di $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, detta $g(\rho) = 1 + [f'(\rho)]^2$, valgono le seguenti proprietà sui raggi principali di curvatura:

$$\begin{cases} R_1 = [g(\rho)]^{\frac{3}{2}} / f''(\rho) ; & \rightarrow R_1 : \text{ raggio di curvatura del } \underline{\text{profilo}}. \\ R_2 = \rho \sqrt{g(\rho)} / f'(\rho) ; & \rightarrow R_2 : \text{ raggio di curvatura del } \underline{\text{meridiano}}. \end{cases}$$

Data l'equazione del profilo, ora sappiamo, nel particolare caso delle superfici di rivoluzione calcolarne i raggi di curvatura.

Informazioni sul fronte d'onda riflesso dalla superficie non-piana: vogliamo trovare, dal campo in una sorgente S, il campo riflesso da una superficie di cui conosciamo i raggi di curvatura; ci sono 3 step:

1) Trovare il campo al punto di riflessione R a partire dalla sorgente S
2) Determinare il campo riflesso dalla sup. curva
3) Determinare il campo nel punto di osservazione P a partire da quello riflesso; ciò, se la sup. di riflessione è curva va fatto con la formula di propagazione dell'ottica geometrica!

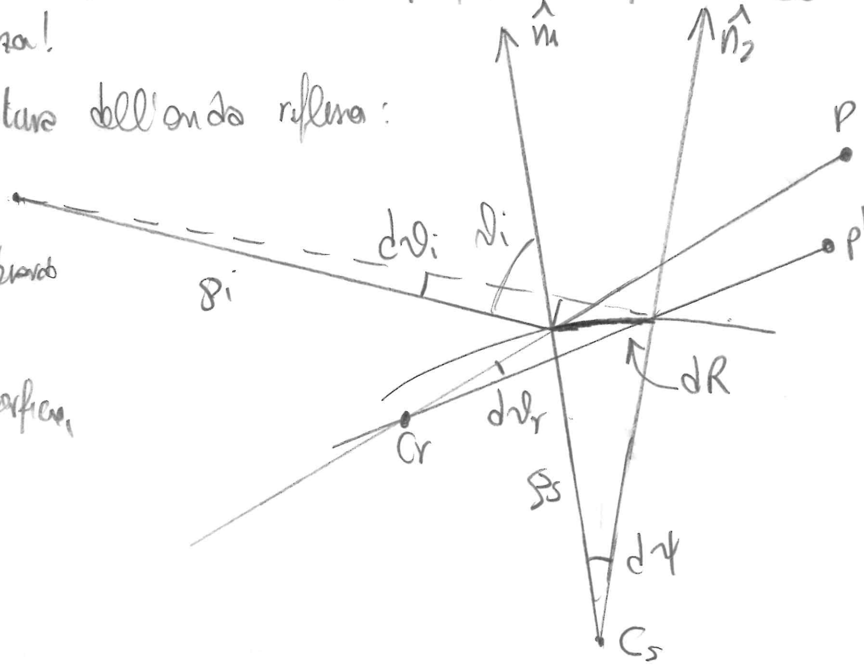
Problema: per lo step 3, servono i 2 raggi di curvatura dell'onda riflessa, ossia caratterizzare la superficie a fase costante dell'onda riflessa. Per ora non sappiamo farlo.

Per lo step 4, vale la seguente formula:

$$|\underline{S}| = \frac{|E|^2}{Z_0} \quad ; \quad \underline{S} = \frac{P_T G_T |\vartheta_i(\varphi)|}{4\pi R^2} \Longrightarrow |E| = \sqrt{\frac{Z_0 P_T G_T}{4\pi R^2}} \simeq \boxed{5{,}5 \frac{\sqrt{G_T P_T}}{R}}$$

Ciò va bene, finché non interviene la curvatura della superficie di riflessione a distorcere il fronte d'onda di portanza!

Calcoliamo i raggi principali di curvatura dell'onda riflessa:



Vi sono 3 angoli fondamentali: gli incrementi di ϑ_i, ϑ_r, e ψ, considerando un $R+dR$ invece di R.

C_s è il centro di curvatura della superficie, ρ_s il raggio.

Si vede che:

$$dR = \rho_s \, d\psi$$

Cerchiamo altri modi: considerando paralleli (dato che a grande distanza) i 2 raggi incidenti,

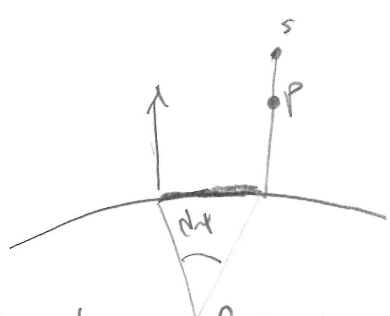
$$\rho_i \, d\vartheta_i = dR \cos\vartheta_i$$

Allo stesso modo coi raggi riflessi,

$$\rho_r \, d\vartheta_r = dR \cos\vartheta_r$$

Inoltre serve una relazione tra gli angoli: $d\vartheta_r = d\vartheta_i + 2\,d\psi$! Infatti, $d\psi$ agisce sia aumentando l'angolo di incidenza, sia aumentando l'angolo di riflessione; sostituendo:

$$d\vartheta_r = \frac{dR\cos\vartheta_r}{\rho_r} \quad ; \quad d\vartheta_i = \frac{dR\cos\vartheta_i}{\rho_i} \quad ; \quad d\psi = \frac{dR}{\rho_s}$$



$$\hookrightarrow \frac{\cancel{dR}\cos\vartheta_r}{\rho_r} = \frac{\cancel{dR}\cos\vartheta_i}{\rho_i} + \frac{2\cancel{dR}}{\rho_s}$$

ma $\vartheta_i = \vartheta_r$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\rho_r} = \frac{1}{\rho_i} + \frac{2}{\rho_s \cos\vartheta_i}$$

Ciò vale per il piano di incidenza: il piano della normale e del raggio di incidenza. "Girando" la figura, nel piano perpendicolare a quello di incidenza, si dimostra!

$$\frac{1}{\rho_r} = \frac{1}{\rho_i} + \frac{2\cos\vartheta}{\rho_s}$$

(vedi quaderno)

Metodi di analisi delle antenne a riflettore: 3 metodi

Soluzione esatta

Volendo studiare il campo irradiato da un punto, si deve imporre, in quel punto, la condizione al contorno:

$$\hat{n} \times \underline{E}_{totale} = 0$$

dove $\underline{E}_{totale}$ è, nell'ordine esatto

$$\underline{E}_{TOTALE} = \underline{E}_{incidente} + \frac{j}{\omega\mu}\int_A \underline{\underline{G}}(\underline{r}-\underline{r}') \cdot \underline{J}_t \, dS \implies 0 = \hat{n} \times \underline{E}_{incidente} + \frac{j}{\omega\mu}\hat{n} \times \int_A \underline{\underline{G}}(\underline{r}-\underline{r}') \cdot \underline{J}_t \, dS$$

$\underline{\underline{G}}$ è nota, $\underline{J}$ è l'incognita del problema. Ciò si risolve numericamente.

Ottica fisica

Metodo di approssimazione basato su alcune ipotesi:

- assenza di correnti nella regione "in ombra" del conduttore
- distribuzione di corrente nella zona illuminata che si ottiene come se in ogni punto illuminato, il campo incidente (l'illuminazione) interagisse con la superficie allo stesso modo di un'onda piana incidente sul piano tangente alla superficie nel punto considerato.

Valgono le relazioni:

$$\begin{cases} \underline{E} = \underline{E}_{inc} + \underline{E}_{rifl} \\ \underline{H} = \underline{H}_{inc} + \underline{H}_{rifl} \end{cases}$$

ricavabili con le condizioni di impedenza!

$$\underline{H}_i = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\hat{s}_0 \times \underline{E}_{inc}$$

$$\underline{H}_r = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\hat{s}_1 \times \underline{E}_{rifl}$$

Un approccio è basato sul calcolo della corrente indotta mediante il campo magnetico:

$$\underline{J}_S = \hat{n} \times \underline{H}_{totale}$$

Un'onda è decomponibile in componente TE e in componente TM; vediamo che fa:

- Onde TM: il campo magnetico "raddoppia":

  $$\underline{H}_{totale} = 2\,\underline{H}_{incidente}$$

- Onde TE:

  $$\underline{H}_{totale} = 2\,\underline{H}_{incidente}\cos\vartheta_i$$

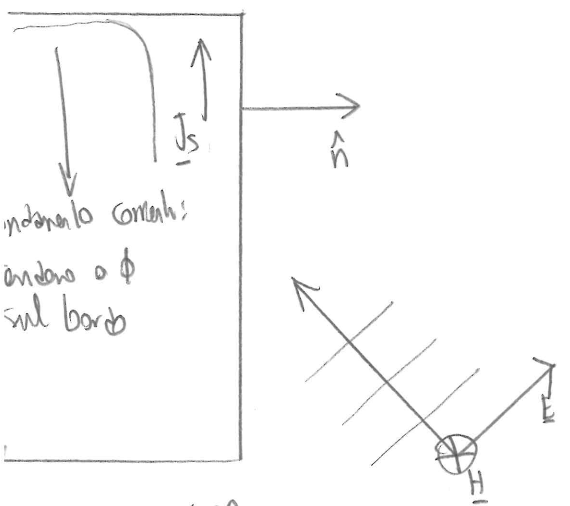
formula valida per entrambi:

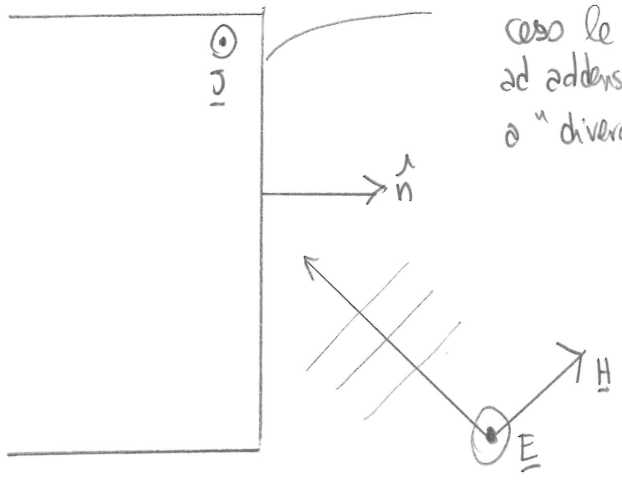
$$\underline{H}_{totale} = 2\,\hat{n} \times \underline{H}_{incidente}$$

Limite del modello: non funziona sui bordi, dal momento che l'ottica geometrica è alla base di questi conti, e, per essa, uscendo dai bordi di illuminazione si vedrebbe una discontinuità spaziale di corrente.

Perché? Ottica geometrica richiede raggi di curvatura e sugli spigoli non sono definiti: non ha senso usare l'OG

Altro effetto: le correnti indotte sono loro stesse sorgenti, e "irradiano anche dietro".





$\underline{J} \parallel \underline{E}$, e in questo caso le correnti tendono ad addensarsi, quindi a "divergere blandamente".

Metodo delle aperture

Il terzo metodo usato consiste nell'applicare il teorema di equivalenza a un piano,

posto in prossimità della superficie del riflettore.

Si sa che:

$\underline{J_s} = \hat{n} \times \underline{H}$

$\underline{M_s} = \underline{E} \times \hat{n}$

Il campo di illuminazione sarà quello su questo piano, e così l'integrale di irradiazione è riconducibile a una trasformata di Fourier.

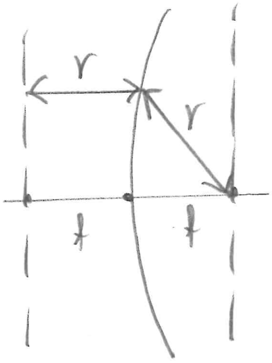
Il campo di illuminazione si ricava col modello di ottica geometrica.

Noto il campo incidente studio quello riflesso mediante l'applicazione delle condizioni al contorno TE/TM, quindi integro ($\mathcal{F}$), per avere il campo che si propaga.

Nota: prima, bastava calcolare il campo incidente e integrare, ma era un integrale di superficie, non su un piano! Molto più complicato!

Antenne a paraboloide

In coordinate sferiche, una parabola ha equazione:



$$r = 2f - r\cos\vartheta \Rightarrow r = \frac{2f}{1+\cos\vartheta}$$

detta ρ la distanza di un punto della parabola dall'asse,

$$\rho = r\sin\vartheta = \frac{2f\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}$$

Recupero la trigonometria: $\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}$; $\sin(\vartheta) = 2\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$

$$\hookrightarrow \frac{2f\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}}{\cos^{2}\left(\frac{\vartheta}{2}\right)} = 2f\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \rho$$

Applicazione del metodo delle aperture

Nota: mentre il campo va dall'illuminatore al riflettore lo fa sotto forma di onde sferiche, onde che, come noto, si attenua come $\frac{1}{R}$; dopo essere "uscito" dal riflettore, è piano: no attenuazione.

Supponiamo, per ottenere ciò, che la sorgente di raggi sia sul fuoco; il campo incidente sulla superficie sarà: (solita formula):

$$E_{incidente} = \frac{5{,}5\sqrt{G_T P_T}}{r}$$

dove "r" è il punto della parabola considerato (NON ρ); il campo non muta nello stesso punto, alla stessa distanza, essendo una parabola!

$$\hookrightarrow r = \frac{2f}{1+\cos\vartheta} \Rightarrow E_{incidente} = \underbrace{5{,}5\,\frac{\sqrt{G_T P_T}}{2f}}_{\text{attenuazione di feed}}\;\underbrace{(1+\cos\vartheta)}_{\text{attenuazione spaziale}}$$

A seconda del ϑ, si ha un'attenuazione diversa perché il "campo sferico" fa più strada!

Una volta riflesso, il campo ha fase costante su ogni punto esterno al paraboloide (fronte d'onda piano: come uno specchio parabolico!)

Nota: spill-over: in realtà parte della potenza del feed va fuori: questa è potenza persa, e riduce la ν.

Mai mettere al riflettore lobi secondari: se no vengono integrati e, quindi, partecipano, con la loro fase (negativa) al guadagno, riducendolo.

Cerchiamo ora un'espressione per le attenuazioni: il campo sull'apertura ha una forma del tipo:

$$\underline{E}_{apertura} = \frac{V_0\ \underline{F}(\vartheta)}{2f}\,|1+\cos\vartheta|$$

$\underline{F}$ funzione lineare, collegata al guadagno.

$[V_0] = V.$ (una costante).

$$F \propto \sqrt{G}$$

Il guadagno finale va come il quadrato di $|\underline{E}_{apertura}|$, quindi l'attenuazione spaziale, per un $\vartheta = 90°$ (mai si va oltre), è: $|1+\cos(90)|^2 = 1$, mentre $|1+\cos(0)|^2 = 4$: si perdono, aumentando ϑ, 6 dB.

Studiamo l'espressione appena vista: rapportiamo il campo dell'apertura in un generico P (a un certo ϑ) con quello in Φ:

$$\frac{E_{apertura}(P)}{E_{apertura}(\Phi)} = \left|\begin{matrix}\text{recuperando la}\\ \text{formula iniziale}\end{matrix}\right| \quad \frac{\frac{V_0\,F(\vartheta)}{r'}}{\frac{V_0\,F(\Phi)}{f}} = \underbrace{\sqrt{\frac{G_f(\vartheta)}{G_f(\Phi)}}}_{\text{attenuazione di feed}}\ \underbrace{\frac{f}{r'}}_{\text{att. spaziale}} \xrightarrow{dB} \alpha_f + \alpha_{sp}$$

Nota su α_f:

$$\alpha_f = 20\log\left(\frac{f}{r'}\right) \quad \text{ma } r' = \frac{2f}{1+\cos\vartheta} = \frac{f}{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$\rightarrow \alpha_f|_{dB} = 40\log\sec\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

L'att. di feed si approssima con una funzione quadratica "a Ritardo".

Ricorda:

$$\vartheta_{max} = 2\arctan\left(\frac{D}{4f}\right)$$

; $\frac{f}{D}$: rapporto fuoco su diametro: fondamentale. $f/D \in [0{,}25 \div 0{,}5]$

- se f/D è troppo grande, serve un illuminatore a fascio stretto, quindi largo quanto le ibbraccagio; altrimenti, spillover.
- se f/D è troppo piccolo, servono feed con fascio principale troppo largo, e se non si fanno si mandano lobi secondari! Inoltre si ha più att. spaziale: sopra i 90°, essa crolla molto più rapidamente!

Efficienza di spillover:

$$\eta_s = \frac{\text{potenza nel cono del riflettore}}{\text{potenza totale}} = \frac{\int_0^{\vartheta_0} |F(\vartheta)|^2 \sin\vartheta\, d\vartheta}{\int_0^{\pi} |F(\vartheta)|^2 \sin\vartheta\, d\vartheta}$$

ϑ_0: massimo angolo del riflettore.

Nota: aumentando ϑ_0, aumenta η_s, si riduce η_{ap}. $\eta_{eq} = \eta_s\,\eta_{ap}$

Dalle Fig(2.58), $t \simeq 10dB$ per avere la ν_{eq} massima. In realtà bisogna anche guardare i lobi secondari! Ovviamente, bisogna ridurli, ma non esagerare manco qui: al di sotto di una certa potenza non si può andare, a causa del bloccaggio.

$t = 14$ dB è per esempio un buon valore.

Si hanno, spesso, delle maschere, dei profili.

Di solito comunque, queste antenne sono grosse, dunque con G elevati.

Esempio: campo uniforme $\rightarrow$ porta!

$$F(\vartheta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta} \longrightarrow G = G_{max}|F(\vartheta)|^2 = \frac{4\pi}{\lambda^2}a^2 \left|\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta}\right|^2$$

l'inviluppo è solo il denominatore; a noi interessa l'inviluppo, cioè la maschera:

$$G_{inviluppo} = \frac{4\pi}{\lambda^2}a^2 \left|\frac{1}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta}\right|^2 \quad \text{ma, per } \vartheta < 30^\circ, \sin\vartheta \simeq \vartheta$$

$$\Rightarrow G(\vartheta) \sim \frac{4}{\pi\, \vartheta_{radianti}^2} \quad \text{e poi si passa in dB.}$$

Tipi di illuminatori

- Comunemente trombe, magari corrugate
- Basse frequenze: dipolo-disk (dipolo su piano di massa a $\lambda/4$) o dipoli + direttore (Yagi-Uda)
- Guida d'onda troncata, rastremata in altezza, ripiegata "gooseneck".

Bloccaggio

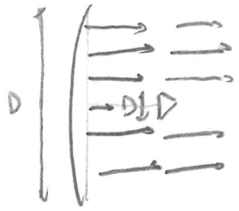
Il fatto di dover mettere degli illuminatori, porta a avere zone in cui il campo viene "bloccato": la presenza fisica del feed "blocca" dei raggi.

2 contributi:

- bloccaggio centrale: quello del feed
- bloccaggio dovuto ai supporti del feed: molto importante anche esso. (gli stralli sono infatti dei diffrangenti).

Bloccaggio centrale

Dato paraboloide di diametro D, c'è un feed di dimensione "d" che blocca dei raggi.

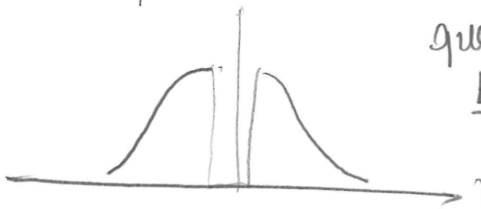


Uso la seguente idea: i campi sull'apertura sono:

$$\underline{E}_a = \underline{E}_{a0} - \underline{E}_{ab}$$

$\underline{E}_a$: campo totale all'apertura; $\underline{E}_{a0}$: campo che si avrebbe all'ap. senza bloccaggio; $\underline{E}_{ab}$: campo all'ap. di bloccaggio

Questo è solo quello sull'apertura; per avere quello irradiato, devo trasformare secondo Fourier: questa è la trasformata del totale $\underline{E}$; si vede che, a ess., manca un termine stretto in mezzo



$$\Longrightarrow \underline{E}(\vartheta) = \underline{E}_0(\vartheta) - \underline{E}_b$$

Essendo il termine in mezzo "stretto", quello dell'apertura, dunque l'"illuminazione di bloccaggio", sarà molto larga, e bassa.

Essendo E_0 a segni alterni, essendo quello di bloccaggio positivo (troppo largo per diventare negativo), andrà a sommarsi ai lobi dispari, sottrarsi a quelli pari! Dopo un po', poi, ci sarà solo più esso: per questo non ha senso ridurre troppo i lobi.

Facciamo conti: il paraboloide è un'apertura circolare, immaginiamo di avere come feed una tromba circolare: il formalismo è quello della FBT (Fourier-Bessel Transform)

$$\underline{E} = -\frac{j2\pi}{2\lambda R}\exp(jkR)\int_0^a E_a J_0(ur)\, r\, dr \cdot \exp(-j2kf)$$

Usando le proprietà delle funzioni di Bessel, si ha:

$$= jkE_0 \frac{\exp(-jkR)}{R}\exp(-j2kf)\, a^2 \frac{J_1(u)}{u} \qquad \boxed{u = \frac{\pi D}{\lambda}\sin\theta}$$

Il campo "a partire dalla fine del bloccaggio" è:

ponendo $\beta \triangleq \frac{d}{D}$, $r' = \frac{r}{\beta}$,

$$E = jkE_0 \frac{\exp(-jkR)}{R}\exp(-j2kf)\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} J_0(kr\sin\vartheta)\, r\, dr =$$

$r = \beta r'$, $dr = \beta dr'$

$$\hookrightarrow \beta^2\int_0^1 J_0(\beta u r')\, r'\, dr' = \beta^2 \frac{J_1(\beta u)}{\beta u}$$

$$= jkE_0 \frac{\exp(-jkR)}{R}\exp(-j2kf)\left(\frac{D}{2}\right)^2\left[\frac{J_1(u)}{u} - \left(\frac{d}{D}\right)^2\frac{J_1(\beta u)}{\beta u}\right] \qquad \boxed{\beta = \frac{d}{D}: \text{rapporto di bloccaggio}}$$

mettendo $\vartheta = 0$, si ottiene: $E = E_0 - E_b = E_0\left[1 - \frac{E_b}{E_0}\right]$

$$\Delta G\big|_{dB} = 20\,\mathrm{Log}\left[1 - \frac{E_b}{E_0}\right] \simeq -8{,}7\frac{E_b}{E_0} = -8{,}7\left(\frac{d}{D}\right)^2\gamma$$

$\gamma = 2$, per ill. non uniforme. (di solito)

Nota: tanto più son bassi i lobi secondari, tanto più si alzeranno!
Il primo lobo secondario è una cosa del tipo:

$$L_L = s E_0 + E_b, \quad E_b = \beta^2 E_0$$

$$\hookrightarrow L_L = s E_0 + \beta^2 E_0;$$

$$\delta L_L = \frac{L_L(\text{con bloc})}{L_L(\text{no bloc})} = \frac{E_0[s+\beta^2]}{E_0 s} = 1 + \frac{\beta^2}{s}; \quad \text{in dB:}$$

$$\hookrightarrow \delta L_L|_{dB} = 8{,}68 \frac{\beta^2}{s}$$

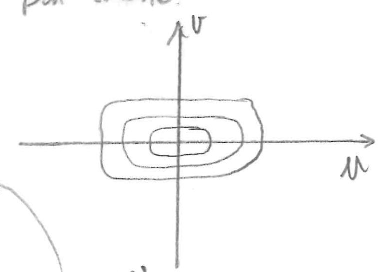
ovvio: meno lobi abbiamo, maggiore è il "contributo relativo" del campo bloccato!

Per la tromba rettangolare, basta fare un'analogia: dal momento che contano solo le aree, basta fare:

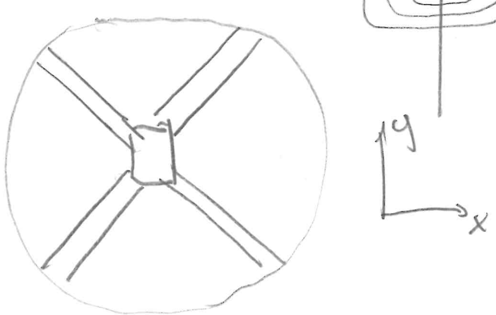
$$\frac{d}{2} = \sqrt{\frac{ab}{\pi}}$$ (infatti, se le aree son uguali, $\underbrace{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2}_{\text{a cerchio}} = \underbrace{a \times b}_{\text{area rettangolo}}$!

Bloccaggio dei supporti

La zona d'ombra è molto più estesa di quella del bloccaggio centrale; quello che si può fare è vedere il campo d'ombra come rettangolare, di spessore w e altezza $(D-d)/2$; quindi usare il formalismo dell'apertura rettangolare: la sinc $(D-d)/2$ molto più stretto.
Sul piano di "w" il fascio sarà larghissimo, su quello di $(d-D)/2$ molto più stretto.
Nella fattispecie, le curve di livello sono qualcosa di questo tipo:
(per gli stralli).

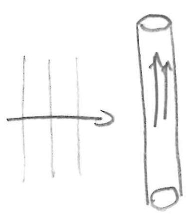


Ciascun supporto genera un campo non trascurabile prevalentemente nel piano ortogonale a esso, ciò che si può dunque fare è ciò:
in questo modo si evita di toccare i piani principali col campo "fastidioso".

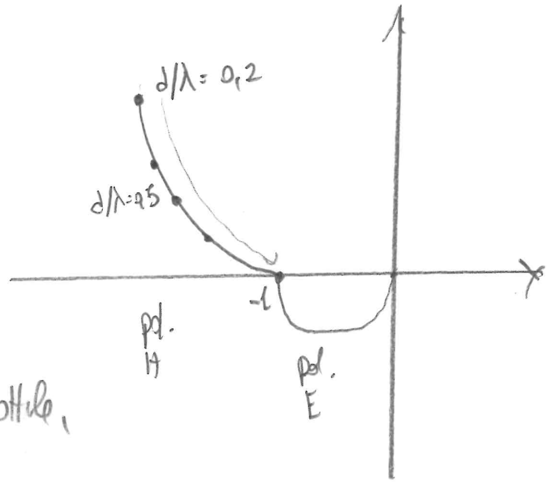


Scattering da cilindro metallico

Un'analisi più esatta è quella che studia la diffrazione del cilindro. Data un'onda piana che incide sul cilindro metallico, la si può espandere in onde cilindriche rappresentandola mediante una somma di funzioni di Bessel.
Fatto ciò, si applicano le condizioni al contorno, si hanno delle correnti indotte dalle onde cilindriche e queste "generano il campo scattarato".



e correnti tendono a concentrarsi sulla parte più illuminata, dunque il campo scatterato dipende anche dal diametro; se $d \ll \lambda$, le correnti sono circa uniformi.
Si definisca il IFR (Induced Field Ratio) come il rapporto tra il campo diffratto dal cilindro e il campo irradiato da un'apertura con le stesse dimensioni e illuminata dalla stessa onda piana.



Per $w \gg \lambda$, IFR tende a -1; per $w \ll \lambda$, i due valori di campo (apertura e scatterato) van in direzioni opposte: uno a 0, uno a ∞.

Nota: questo modello dipende dalla polarizzazione dell'onda piana incidente: immaginando che il cilindro sia sottile,

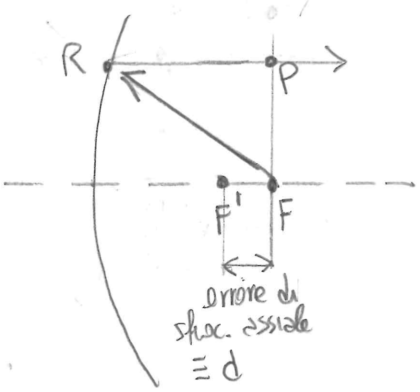
- se il campo è parallelo al filo le correnti vanno "nel verso del filo", quindi si possono "muovere"; (si parla di $\underline{E}$)
- se il campo è perpendicolare al filo, essendo "direzionato lungo la direzione dello spessore del filo", esse non possono muoversi, dunque non si ha interazione del cilindro.

IFR quantifica ciò: con $\frac{d}{\lambda}$ piccolo e pol. H, più è corto il filo, più addensate le correnti, maggiore è il campo; nell'altro caso, le correnti comunque non riescono a "scorrere".

RIASCOLTA L'ULTIMISSIMA PARTE

Spostamento assiale

L'illuminatore, o meglio il suo centro di fase, deve essere esattamente sul fuoco del paraboloide; per vari motivi (dilatazioni/compressioni termiche, cattiva determinazione del centro di fase...). Proviamo a studiarlo:



determiniamo il cammino ottico da F' a P': se d è piccola, i raggi RF' e RF sono circa paralleli, quindi l'errore da F' e R è: $\simeq d\cos\vartheta$, ϑ angolo tra piano tangente a R e raggio.

$$\overline{F'P'} - \overline{FP} \simeq d\cos\vartheta \simeq d\left[1-\frac{\vartheta^2}{2}\right]$$

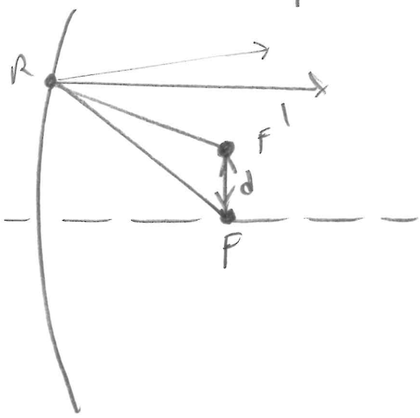
Si possono fare conti più precisi e trovare che:

$$\Delta G_{dB} = 9{,}1 \frac{(d/\lambda)^2}{1+(4f/D)^2}$$

questo per un dipolo.

Spostamento trasversale

Si tratta di un errore nel posizionamento dell'illuminatore, spostato trasversalmente all'asse. Si ha qualcosa di questo genere:

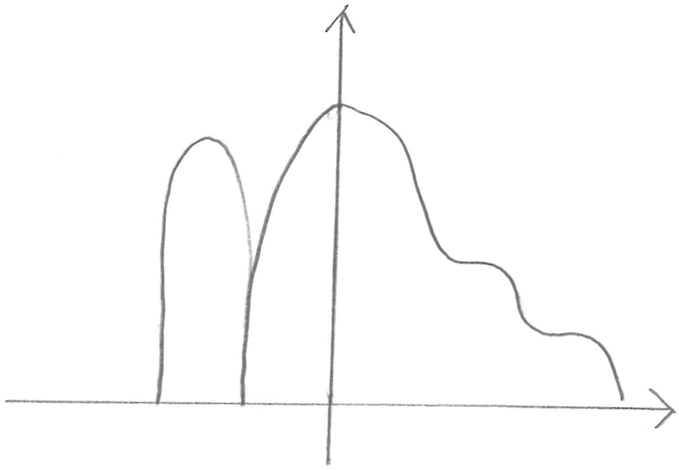


Ora la differenza di cammino sarà:

$$\Delta\phi = kd\sin\theta$$

↳ non più coseno ma seno!

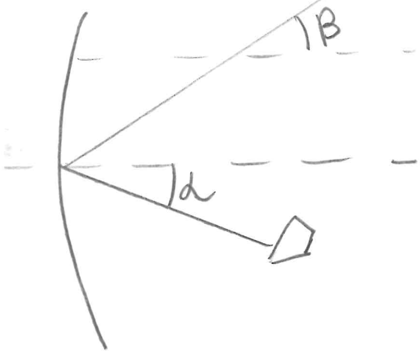
$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3}$$



Purtroppo ora si ha a che fare con un errore di fase cubico: il termine lineare trasla in θ il d. di irradiazione, quello cubico è molto peggio: si ha una distorsione asimmetrica del diagramma di irradiazione.

Coma Lobe: si tratta di un'aberrazione

Si definisce il BDF (Beam Deviation Factor) come il rapporto tra angolo di spostamento del feed rispetto all'asse α, e β: $BDF \triangleq \beta/\alpha$



dato l'asse del feed, esso sta con un certo α dal vertice del paraboloide; β è l'angolo che il massimo del d. di irradiazione forma rispetto all'asse.

BDF varia con f/D e τ ($\beta \in [0{,}6 \div 0{,}8]\alpha$)

Se ho τ (tapering) alto, vuol dire che il feed illumina prevalentemente il bordo, che è la zona più piatta; se f/D diminuisce, il paraboloide è più piatto.

Reazione sull'illuminatore

Il fatto che il feed sia sulla strada dei raggi, porta ad avere un'illuminazione sul feed; questo vuol dire che, anche se il feed è adattato, si ha della "potenza regressiva":

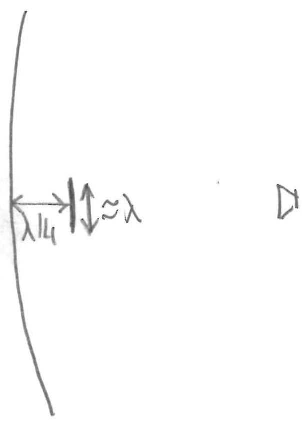
$$\left|\frac{P_{ritorno}}{P_{trasmessa}}\right| = |\Delta\Gamma|^2$$

Determiniamo ciò con l'ottica geometrica:

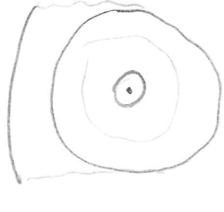
$$\left.\frac{dP}{dS}\right|_{incidente} = \frac{G_{feed}\, P_t}{4\pi \underbrace{f}_{\text{distanza focale}}^2} = \left.\frac{dP}{dS}\right|_{riflessa} ; \quad P_{ricevuta} = A_{eq} \left.\frac{dP}{dS}\right|_{riflessa} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{feed}^2 \frac{P_{trasmessa}}{4\pi f^2}$$

$$\hookrightarrow |\Delta\Gamma|^2 = \frac{P_{ricevuta}}{P_{trasmessa}} = \left(\frac{\lambda G_{feed}}{4\pi f}\right)^2$$

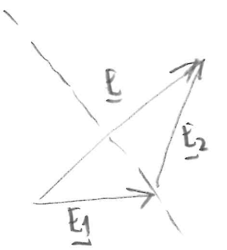
Ciò si può migliorare con la tecnica del matching plate: si mette a $\lambda/4$ dal vertice, al centro, una piastra che rifletta il campo, ma in controfase, in modo che vada al feed e si annulli con quello già presente, "adattando", ossia non facendo tornare indietro della potenza.



Nota: essendo il piattello $\approx\lambda$, l'ottica geometrica non vale molto.



Il modello esatto sarebbe basato sul dividere l'apertura in anelli, in modo da "dividere l'integrale sui vari anelli"; ogni anello ha un contributo con una fase diversa. Dato $\underline{E}$ vettore che collega 2 punti, $\underline{E_1}$ e $\underline{E_2}$ due vettori che collegano il punto di partenza all'uno e l'altro al punto di arrivo, $\underline{E} = \underline{E_1} + \underline{E_2}$; dato $\underline{E_1}'$ il particolare $\underline{E_1}$ con modulo $|E_1|$, fase opposta a $\underline{E_2}$,



$$\underline{E_1}' + \underline{E_2} = 0$$

Ciò si ottiene introducendo un ritardo dei raggi che provengono dalla zona centrale.

Tolleranza superficiale

La presenza di errori nella realizzazione del riflettore riduce il guadagno:

$$\Delta G_{dB} \approx 686 \left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)^2 \quad \text{o} \quad \frac{G}{G_0} = \exp\left(-\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\lambda}\right)^2\right)$$

dove ε è l'errore quadratico medio.

Un buon valore è $\varepsilon = \frac{\lambda}{50}$.

Per misurare ε:

- o si usa un profilo piatto che va poi a ruotare, e con degli estensimetri si fa la misura
- o si fan misure con markers e laser.

Paraboloide offset: pregi

- vantaggio: riduce il blocaggio
- svantaggi: difficile posizionare bene il feed, molto ingombrante a parità di dimensione apertura con un paraboloide (Huygens-Steiner: aumenta il momento di inerzia J, quindi offset grandi son faticosamente da gestire).
- struttura asimmetrica: si avrà maggiore X-polarizzazione: un piano presenta simmetria (quello orizzontale), l'altro no. Si han nel par. normale (simmetrico), correnti disposte in modo tale da cancellare contributi spurii. Qua no. (simmetrico) (offset)

Nota di progetto: il feed va puntato, per compensare l'att. spaziale, a:

$$\vartheta_0 = 2\arctan\left(\frac{d + \frac{D}{2}}{2f}\right)$$

[proiezione del centro sull'asse verticale] {questa è una regola empirica}

I valori standard, dato D, sono $f/D \approx [0.5 \div 1]$ [D è la dimensione diametro del cilindro che taglia l'offset]

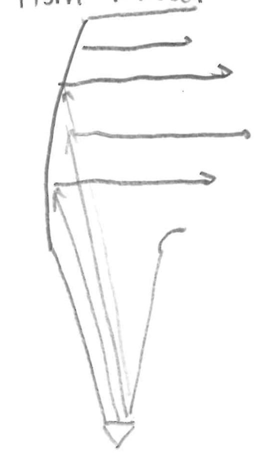
Per il piano orizzontale, dato "D'" il diametro del paraboloide padre, si ha: (cono angolo max. orizzontale)

$$\vartheta_e = 2\arctan\left(\frac{\rho_e}{2f}\right), \quad \rho_e = \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(d + \frac{D}{2}\right)^2}$$

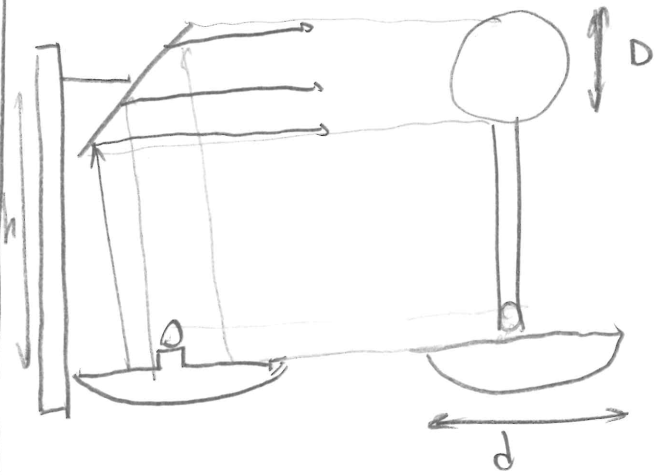
Pitagora

Altre antenne a riflettore

Horn collector: tromba + parabola: trombe non troppo grosse per errore di fase, paraboloide "molto affettato" troppo grosse



Antenne a periscopio:



vantaggio e a periscopio: se si ha un riflettore nella zona di Fresnel, campo vicino, si evita di portare il cabinet a quota elevata! Si alimenta a terra! Il riflettore piano è a 45°, è ellittico in modo da apparire, visto di fronte, come un cerchio. È ellisse con rapporto di ellitticità $\sqrt{2}$.

Di solito, $D = 1{,}25\, d$! con $D = d$ si perde circa $1\, dB$. $h < \frac{D^2}{\lambda}$

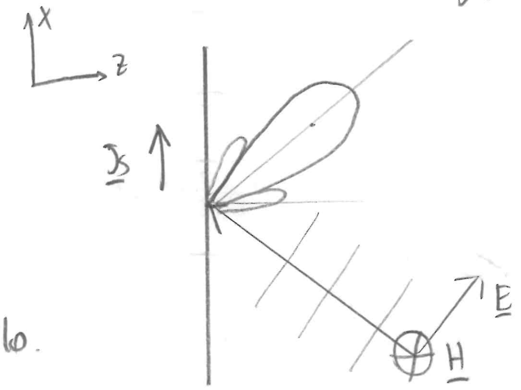
Riflettore passivo

È un ripetitore in campo lontano.

Per il modello di ottica fisica,

$\underline{J_s} = 2\hat{n} \times \underline{H}$

Si ha ciò: $\underline{J_s}$ è diretta verso l'alto.



Visto che il fronte d'onda incide obliquamente, cambia la fase!

Facciamo 2 conti: date 2 antenne, una delle quali è un riflettore passivo, che riflette verso l'altra, determinare P_r (ricevuta).

$P_{tx} = S_i A_s \quad G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_s$

$$P_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r S_r \quad , \quad S_r = \frac{P_{Tx} G_s}{4\pi R^2} = \frac{S_i A_s}{\cancel{4\pi} R^2} \frac{\cancel{4\pi}}{\lambda^2} \Rightarrow P_r = \frac{\cancel{\lambda^2}}{\cancel{\lambda^2}} G_r \frac{S_i A_s}{R^2} =$$

$$\hookrightarrow P_r = G_r \frac{S_i A_s}{R^2}$$

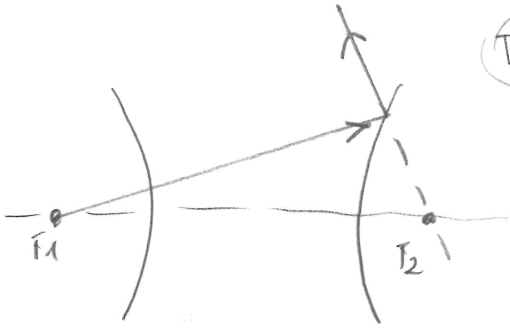
volendo riportare nella formula $P_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{eq} S_i \Rightarrow \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r \frac{A_s}{\lambda^2 R^2} \rightarrow G_{eq} = G_r \left(\frac{A_s}{\lambda R}\right)^2$

Altro caso: se si ha solo l'antenna ricevente, senza ripetitore:

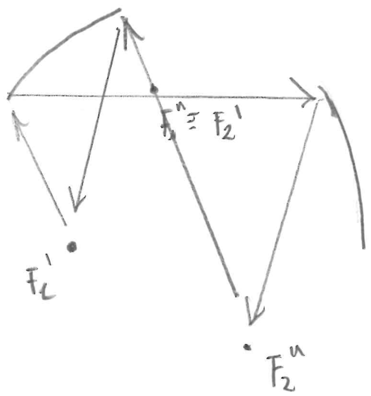
$P_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_r S_i$ — (più l'attenuazione del cavo)

Antenne a doppio riflettore

Idea di base: sfruttare la proprietà per cui, se un raggio parte da un fuoco e incide sull'altra falda, il prolungamento del raggio riflesso parte dal fuoco: posso fare in modo da far ciò!



se faccio coincidere i 2 fuochi, il raggio fa questo giro



Cassegrain

Idea: come riflettore "finale" uso il solito paraboloide, e faccio coincidere uno dei fuochi di un iperboloide con quello del paraboloide; un raggio uscente da un fuoco F_1 da una sorgente puntiforme è riflesso come se venisse da F_2: io faccio coincidere F_2 e $F_{parabola}$.

Vantaggio: così f/D aumenta molto: $f/D \in [1 \div 3]$. Ciò riduce molto l'att. spaziale.

Si può dimostrare che: data "e" l'eccentricità, $e = \frac{c}{a}$, $\pm c$ i fuochi dell'iperbole,

$$M \triangleq \frac{\tan\left(\frac{\vartheta_r}{2}\right)}{\tan\left(\frac{\vartheta_i}{2}\right)} = \frac{e+1}{e-1}$$

ϑ_i: massimo angolo di incidenza (ϑ_{feed})

ϑ_r: massimo angolo di riflessione ($\vartheta_{parabola}$)

M è "di quanto il fascio viene allargato dall'iperboloide".

↳ $\tan\left(\frac{\vartheta_r}{2}\right) = M \tan\left(\frac{\vartheta_i}{2}\right)$; ma, dalla parabola, $\rho = 2f \tan\frac{\vartheta}{2} \Big|_{\vartheta=\vartheta_r}$

$= 2f \tan\frac{\vartheta_r}{2} = 2fM \tan\frac{\vartheta_i}{2} \longrightarrow f_{eq} = M f$: {distanza focale equivalente!}

Note:

- il feed sta sul vertice: portare l'alimentazione è più semplice
- come già detto, L_{sp} è minore (f_{eq}/D è grande)
- taper minore ai bordi $\longrightarrow \nu$ maggiore
- maggior ingombro subriflettore: più bloccaggio.

Di solito si fanno grandi: $(50 \div 100)\lambda$ almeno! (per ridurre il bloccaggio).

↳ essendo il subriflettore $(5 \div 10)\lambda$

Nota: il vincolo è dovuto anche al fatto che il progetto è basato sull'uso dell'ottica geometrica; altrimenti, la diffrazione ai bordi introduce ripple molto importanti.

Equazione del radar

$$S_{inc,target} = \frac{P_T G_T}{4\pi R^2}$$

L'oggetto intercetta solo su una certa sezione efficace σ, detta "sezione radar";

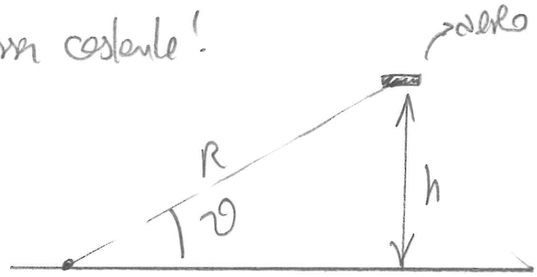
$$P_S = \sigma S_{inc,target} = \sigma S_i$$

$$\hookrightarrow P_R = \frac{A_{eq} P_S}{4\pi R^2}$$ P_S potenza scatterata dal solo "target" da trovare

$$= \frac{A_{eq}\,\sigma P_i}{4\pi R^2} = \frac{A_{eq}\,\sigma P_T G_T}{(4\pi R^2)^2}$$ ma $A_{eq} = \frac{4\pi}{\lambda^2} G$

$$\hookrightarrow P_R = \frac{\lambda^2 \sigma G_T G_R}{(4\pi)^3 R^4} = \frac{\lambda^2 \sigma G^2}{(4\pi)^3 R^4} P_T$$

se un aereo vola a quota costante, $\frac{G}{R^2}$ deve essere costante!



Si ha:

$h = R\sin\vartheta \Rightarrow R = h\,\mathrm{cosec}(\vartheta)$

$$\hookrightarrow \frac{G(\vartheta)}{\mathrm{cosec}^2(\vartheta)} = \text{costante}$$

Si fa ciò chiedendo guadagno elevato all'inizio, farlo poi tendere a 1 verso $\vartheta = 60°$.

ALTRE ANTENNE!

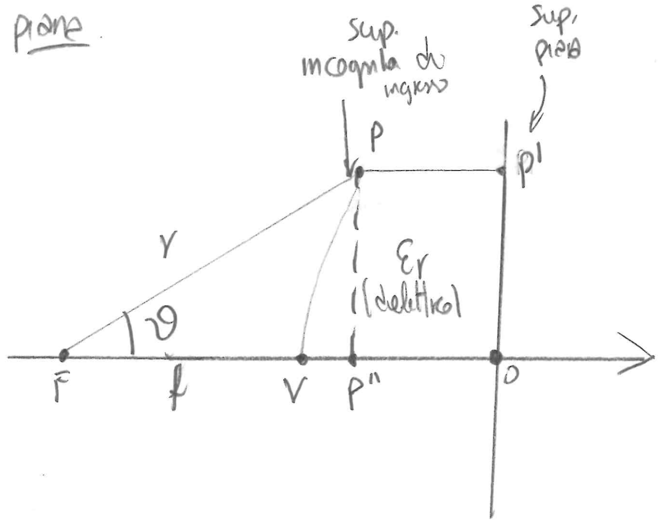
Antenne a lente

Invece che riflessione, rifrazione!

Soluzione presentata: abbiamo bisogno, per le lenti, di 2 superfici: "di ingresso" e "di uscita".

NOSTRA (non unica) soluzione: superficie di uscita piana.

Dobbiamo determinare quella di ingresso.



Obiettivo: data per ipotesi una superficie piana di uscita, serve che, per il principio di Fermat,

$$FP + PP' = FV + VO$$

ossia che i cammini ottici siano uguali tra loro, in modo da avere, all'uscita, cammini con la stessa fase. In realtà "dentro" la lente si ha un $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ a "rallentare" i raggi, quindi:

$$\overline{FP} + n\overline{PP'} = \overline{FV} + n\overline{VO}$$

Nota: nel dielettrico, tutti i raggi sono rallentati uguali; è la differenza tra parte di raggio nel e fuori dal dielettrico che fa rallentare! Posso togliere $n\overline{PP'}$:

$$\overline{FP} = \overline{FV} + n\overline{VP''}$$

ma $\overline{VP''} = r\cos\vartheta - f$

$\Rightarrow r = f + n(r\cos\vartheta - f) \rightarrow r(1-\cos\vartheta) = f(1-n)$

$\Rightarrow r = f\,\dfrac{n-1}{n\cos\vartheta - 1}$ questa è l'equazione del profilo necessario! Ed è un'iperbole

Interpretazione:

- la superficie piana di uscita "adatta" l'onda piana all'apertura; l'iperbole adatta il fronte d'onda sferico al piano
- al contrario è adattare la forma d'onda di ingresso, ossia una sfera, con una sup. di ingresso sferica; in uscita si dimostra che si ha un ellissoide.

Vantaggi: no bloccaggio, banda larghissima

svantaggi: peso, risolubile con zonizzazione, la quale però riduce drasticamente la banda.
(devo togliere da $\lambda/4$); si ha inoltre riflessioni (disadattamento), e adattando perdiamo di nuovo banda.

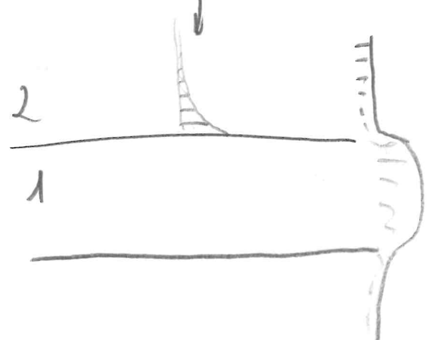
$$\Delta\varphi = n\frac{2\pi}{\lambda}h - \frac{2\pi}{\lambda}h = 2\pi(n-1)\frac{h}{\lambda} = 2m\pi \Longrightarrow \frac{h}{\lambda} = \frac{m}{n-1}$$

Lenti particolari: TL2

- materiali artificiali: (NL1) questi si formano per esempio con fogli di polistirolo espanso, con $\varepsilon_r \simeq 1$ (certo: son vuoti); se $a > 0{,}7\lambda$, c'è come avere guide sopra taglio, quindi
$$k_g = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\ \text{LK} \rightarrow n = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}\ \text{LL}$$
- bootlace lens: microstriscia o antenne, e sfasatori.

Antenne a onde progressive - cenni

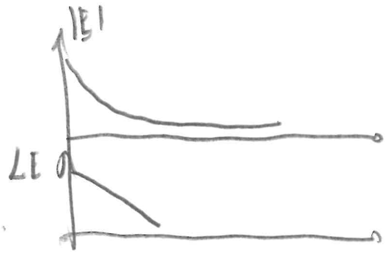
- A onda superficiale: data guida in aria, da un certo punto la si riempie di dielettrico! Studiando il problema, si vede che si ha un'onda evanescente per le c. al contorno: (superficie di separazione):
$$\underline{E}_{t1} = \underline{E}_{t2} \Longleftrightarrow \underline{k}_{t1} = \underline{k}_{t2} \qquad \text{dove } k_1^2 = k_{t1}^2 + k_{z1}^2, \quad k_2^2 = k_{t2}^2 + k_{z2}^2$$
$$\rightarrow \begin{cases} \varepsilon_r k_0^2 = k_{t2}^2 + k_{z2}^2 \\ k_0^2 = k_{t1}^2 + k_{z1}^2 \end{cases} \longrightarrow k_{z1}^2\ \text{L}\emptyset \text{: no propagazione ma attenuazione lungo } z$$

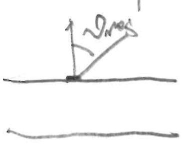


- A onda leaky: data guida, si fa ciò:

Invece di avere il modo TE_{10} la topografia di campo è perturbata; usando il th. di equivalenza con $\underline{M}$, si ha un campo elettrico che, per la fessura, ha una variazione di fase: l'onda progressiva ha un andamento tipo $\exp(-jk_z z)$, $k_z = k_0\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$

Questa fessura è come un elemento irradiante, e "irradiare" è sinonimo di "perdere": per questo si ha un leakage. Si ha, sull'apertura, un campo con modulo che decresce esponenzialmente, la fase linearmente; trasformando si trova qualcosa di moderatamente direttivo.





$$\vartheta_{max} = \arcsin\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}\right)$$

Antenne a filo

A differenza di quelle ad apertura, esse si usano a basse frequenze.

Cenni della resistenza di irradiazione

$$\underline{S} = \frac{1}{2}\underline{E}\times\underline{H}^* = \frac{1}{2}\left[E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\vartheta}\right]\times\left[H_\varphi\hat{\varphi}\right]^* = \frac{1}{2}\left[E_\theta H_\varphi^*\hat{r} - E_r H_\varphi^*\hat{\vartheta}\right]$$

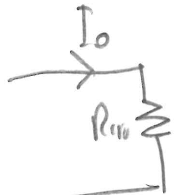
$$P = \oiint_S \underline{S}\,d\underline{s} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[S_r\hat{r} + S_\theta\hat{\vartheta}\right]\cdot r^2\hat{r}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$\ldots = \eta\frac{\pi}{3}\left|\frac{I_0 l}{\lambda}\right|^2\left[1 - j\frac{1}{(kr)^3}\right]$$

Di questa, la potenza attiva è quella irradiata:

$$P_{irr} = \eta\frac{\pi}{3}\left|\frac{I_0 l}{\lambda}\right|^2$$

Usando un equivalente circuitale dell'antenna,



$\approx> P_{irr}\ \{\eta \equiv Z_0 = 120\pi\ \Omega\}$

$$P_{irr} = \frac{1}{2}|\cancel{I_0}|^2 R_{irr} = \eta\frac{\pi}{3}\left|\frac{\cancel{I_0} l}{\lambda}\right|^2 \rightarrow R_{irr} = \eta\left(\frac{2\pi}{3}\right)\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \approx 800\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

Un'antenna a filo è un insieme di sorgenti elementari finite: una sovrapposizione di elementi del tipo:

$$\underline{E} = \underline{M}\,\frac{Z_0\exp(-jkR)}{2\lambda R}\sin\vartheta, \quad \underline{M} = \underline{l}\,I$$

Questi sono "segmentini" che, se sommati, danno luogo a un'antenna a filo.
Il discorso è, però: per ciascun segmentino, serve conoscere I, la distribuzione di corrente.

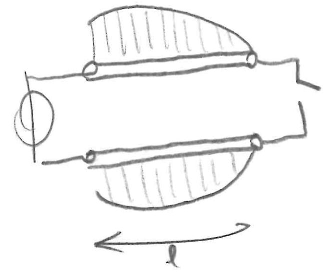
Per trovare la distribuzione di corrente la cosa più facile da fare è considerare un modello di un filo come una linea di trasmissione biconica a ϑ_0 variabile; una linea biconica (vedi Collin - Antenna and Radiowave ... o Kraus), è una linea di tx con 2 coni affacciati; supporta un modo TEM, e la sua Z_0 è:

$$Z_{0\infty} = \frac{Z_0}{\pi}\log\left(\coth\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)\right)$$ ϑ_0 angolo di apertura dei coni.

Si ricava, mediando, che per un dipolo,

$$Z_{0d} = 120\left[\ln\left(\frac{2l}{a}\right) - 1\right]\ \Omega$$

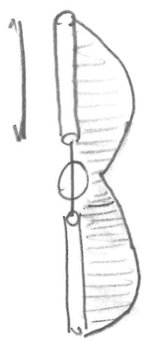
Ragionamento più brutale: una linea di tx chiusa su open bis:



(ricorda diagramma a onda stazionaria)

↳ ma "raddrizzo i bracci":

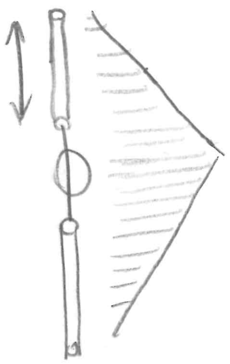
l: lunghezza di 1 braccio: metà del dipolo!



raddrizzando i bracci non varia K, ma l'alta costante primaria, Z_∞ che sappiamo come stimare.

Casi particolari:

- dipolo corto: l'andamento della corrente è sinusoidale; dal momento che però un seno, per $x \approx \phi$, è circa lineare, si può dire che, se il dipolo è corto, si ha qualcosa di questo tipo: (h_{eff} può servire, essendo collegata a A_{eq}, per stimare G)



Si ha che:

$$\underline{h}_{eff} = \frac{\underline{P}_\ell(\hat{r})}{I_{alimentazione}}$$

dal circuito:

Per un dipolo, vale (vedi pag. T46)

$$\underline{E} = -j\frac{Z}{2R\lambda}\exp(-jkR)\, I_{AL}\, \underline{h}_{eff}(\hat{r})$$

onda sferica — I_{AL} — ↳ proprietà di direttività

dove per un dipolo: (T46)

$$\underline{h}_{eff}(\hat{r}) = -\frac{\hat{\vartheta}\sin\vartheta}{I_{ANT}}\int_0^{l} I(z)\exp(jk_0\cos\vartheta)\,dz$$

Dipolo corto: considero I_{AL} costante sull'intervallo:

$$I(z) = I_{AL}\,\mathrm{rect}(z)$$

$$\to \underline{h}_{eff} = -\hat{\vartheta}\frac{\sin\vartheta}{I_{AL}}\int I_{AL}\,\mathrm{rect}(z)\exp(jk_0\cos\vartheta)\,dz$$

dato $\xi = k_0\cos\vartheta$

$$\to = -\hat{\vartheta}\sin\vartheta\, L\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\xi L}{2\pi}\right)\Bigg|_0^{\frac{L}{2}} = -\hat{\vartheta}\sin\vartheta\, L\,\mathrm{sinc}\left(\frac{k_0 L\cos\vartheta}{2\pi}\right)$$

↳ se uso η, $\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin\pi x}{\pi x}$, o abbiamo do

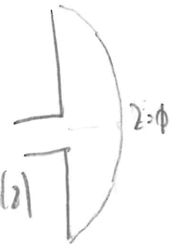
$$F_E(\eta) = \frac{\sin\eta}{\eta} = \mathrm{sinc}\left(\frac{\eta}{\pi}\right) \to \underline{h}_{eff} = -\hat{\vartheta}\sin\vartheta\, L\, F_E\left(\frac{k_0 L\cos\vartheta}{2}\right)$$

Per $L \ll \frac{\lambda}{10}$ ho: $F_E\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{L\cos\vartheta}{2}\right) = F_E\left(\pi\frac{L}{\lambda}\cos\vartheta\right) \approx 1$

$$\to \underline{h}_{eff}(\hat{r}) = -\hat{\vartheta}\sin\vartheta\, L$$

F_E, F_H le funzioni "radici del quadrupolo", η "variabile provvisoria"!

Dipolo mezz'onda: si ha



$L = \lambda/2$; $\quad I(z) \approx I_{AL}\cos\left(\frac{\pi}{L}z\right)\mathrm{rect}(z)$

$$\to \underline{h}_{eff} = -\hat{\vartheta}\sin\vartheta\int\cos\frac{\pi z}{L}\,\mathrm{rect}(z)\exp(jk_0\cos\vartheta)\,dz =$$

$$= -\hat{\vartheta}\sin\vartheta\, L\frac{2}{\pi}F_H\Big(\underbrace{\frac{k_0 L\cos\vartheta}{2}}_{\eta}\Big), \text{ dove}$$

$$F_H(\eta) = \frac{\cos\eta}{1-\left(\frac{2\eta}{\pi}\right)^2}$$

↳ {trasformata di Fourier del coseno su porta}

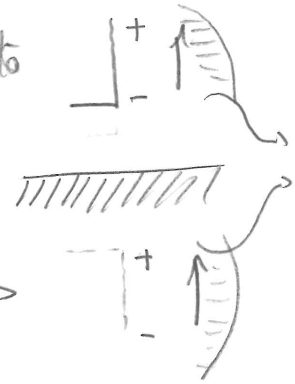
dunque:

$$F_H(\eta)\Big|_{L=\frac{\lambda}{2}} = F_H\left(\frac{\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2}\cos\vartheta\right) = F_H\left(\frac{\pi\cos\vartheta}{2}\right)$$

$$\to \underline{h}_{eff} = -\hat{\vartheta}\sin\vartheta\,\frac{2L}{\pi}\,F_H\left(\frac{\pi\cos\vartheta}{2}\right)$$

I dipoli si possono classificare mediante:
- lunghezza
- alimentazione: bilanciata (simmetrica) / sbilanciata

↳ al posto del dipolo, si può fare ciò: mettere, al posto del II° braccio, un piano di massa. Dall'applicazione del principio delle immagini, si ha ciò: stessa distribuzione di corrente.



l'immagine del "−" è il "+", quindi le correnti sono tutte "verso l'alto".

Differenza: l'impedenza di antenna! Per avere la stessa corrente in un monopolo o in un dipolo, nel monopolo basta metà della tensione; si può infatti alimentare non tra V_0 e $-V_0$ ma tra V_0 e ϕ: metà della tensione, stessa corrente, metà impedenza di ingresso!

NOTA: questa impedenza di cui stiamo parlando ora è la Z_{in}, che non è la Z_{∞} della linea, per quanto collegata a essa (vedi Orefice, 3.12 p. 208)

Il parametro $\frac{2l}{a}$ è detto "snellezza"; maggiore è la snellezza, maggiore è Z_{∞}.

Si ha:

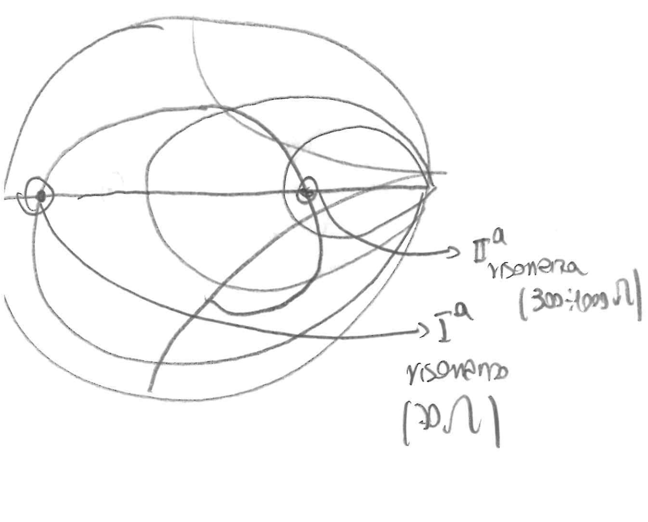
$$\begin{cases} R_{in} \simeq 800 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \\ jX_{in} = -j Z_{\infty} \cot g(kl) \end{cases}$$

→ comportamento capacitivo per $l < \lambda/4$

NOTA! la resistenza modellante le perdite ohmiche può essere non trascurabile: potrebbero avere valori confrontabili; ciò riduce molto η.

Per $2l = \lambda/2$ si ha una condizione di risonanza: "dipolo a mezz'onda".
Aumentando ancora l, dopo un po' si arriva a $2l = \lambda$: una seconda condizione di risonanza.

più lunghi di λ è difficile che se ne facciano, se non i dipoli "a $3\lambda/4$";



Nota: 3 casi di Z_{in}

dipolo corto ($l < \lambda$): $\begin{cases} R \simeq \phi \\ X \ll \phi \text{ (molto capacitivo)} \end{cases}$

dipolo $\lambda/2$ ($l = \lambda/4$): $\begin{cases} R \simeq 70\,\Omega \\ X \simeq \phi \end{cases}$

dipolo full-wave ($l = \lambda/2$): $\begin{cases} R \simeq 300 \div 1000\,\Omega \\ X \simeq \phi \end{cases}$ più è snello, maggiore è R.

Nota: in realtà, la l per la risonanza non è $\lambda/4$, ma è un po' inferiore! La seconda, per molto meno.

(T46)

Nota: fino a circa 80° le resistenze son uguali tra loro, poi si han le differenze.

Parliam ora di diagramma di irradiazione; considerando un elemento di campo fondamentale, derivante dalla sorgente dipolo:

$\underline{J}_e(x,y,z) = \delta(x)\,\delta(y)\,I(z)$ [Vecchi, 2.172 | 2.160]

le δ fan annullare i termini in x e y

Si ha che:

$\underline{M}_0 = \int \underline{J}_e(\underline{r})\,dx\,dy\,dz = \int \delta(x)\,\delta(y)\,I(z)\exp(jk\,\underline{r}'\cdot\hat{R})\,dx\,dy\,dz$

$= \int I(z)\exp(jkz\cos\theta)\,dz$

Da Vecchi, 2.253, si ha:

$\underline{E} = +j\omega\mu M_0 \frac{\exp(-jk_0 r)}{4\pi r}\sin\theta\,\hat{\theta} = j\omega\mu \frac{\exp(-jk_0 r)}{4\pi r}\int_0^l I(z)\exp(jk\cos\theta\, z)\,dz$ [Come da 9-1]

Si può determinare D_{max}; si nota che:

$$D_{max} = \frac{4\pi}{\int_0^\pi\int_0^{2\pi} d(\theta,\varphi)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}$$

dove la nostra "d" è; da Orefice, 1.21,

$\underline{E} = V_0\, F(\theta,\varphi)\frac{\exp(-jkr)}{r}\hat{p}$

$\hookrightarrow d \propto \sin^2(\theta) \Rightarrow$ si trova $\frac{4\pi}{\int \sin^3\theta}$, che si fa in forma chiusa!

$G_0 \approx 1,5$.

Caricamento dipoli corti

Nota: per frequenze molto basse, servirebbero dipoli lunghissimi (a onde lunghe); ci piacerebbero dipoli corti, ma con una distribuzione di corrente uniforme, in modo da alzare il guadagno (la h_{eff}).

Idea: se il "seno" parte da 0 ho un triangolo; se parte "dopo", quando sarà "sul massimo", è $\approx$ costante

Idea: invece di far vedere l'open, metto un "simulatore di tratto di linea", ma concentrato: una capacità di carico! Si ha, data una "polelca" lunghezza "h" della "linea simulata",

$\omega C Z_0 = \tan(kh) \longrightarrow$ posso progettare C!

$\approx$ costante! molto più h_{eff}!

Ciò si fa con qualcosa che crei capacità rispetto a massa: una barra di ferro, una piastra di metallo.

NOTA: si parla di massa ma l'antenna deve essere isolata, in modo che se c'è dell'elettrostatica essa non vada verso l'antenna, distruggendola. Si usano induttori.

Si hanno poi anche bobine d'accordo, per eliminare i contributi capacitivi, ed eventualmente ingegnerizzare la frequenza di risonanza.

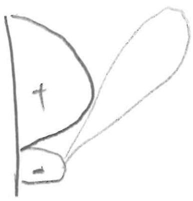
Risultati:

- il dipolo corto ha $G \approx 1{,}5$;
- il dipolo $\lambda/2$ ha $G \approx 1{,}64$ (corrente maggiore, meno accentrata di quella triangolare, dunque la ξ si stringe e G sale)

$\hookrightarrow \vartheta_{3dB} \approx 76°$ (da 90°)

No "2λ": si ha sfasamento della corrente, quindi contributi fuori fase, anche se teorica maggior direttività.

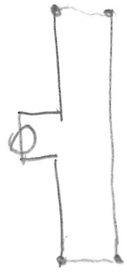
$3/2\ \lambda$: "a margherita": lobone positivo e lobo negativo!



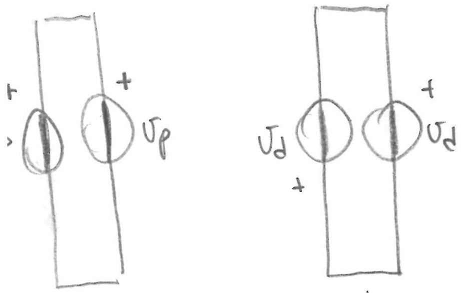
$\hookrightarrow$ la ξ sarà "ruotata", utile per Canyon urbani.

Dipolo ripiegato

Idea: 2 dipoli cilindrici, uno alimentato, congiunti alle estremità.



Analisi: scomposizione alimentazione in modo pari e modo dispari:



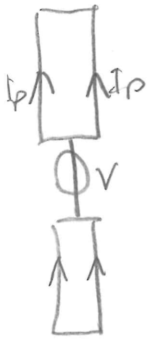
modo pari

modo dispari

dove:

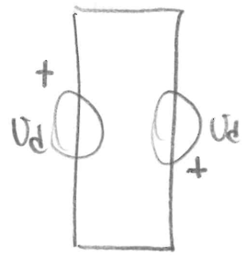
$$\begin{cases} V_p - V_d = 0 \\ V_p + V_d = V \end{cases} \longrightarrow \boxed{V_p = V_d = \frac{V}{2}}$$

Per il modo pari, il fatto di avere 2 dipoli lunghi uguale e con la stessa tensione, implica il non avere una ΔV sui collegamenti tra i 2; questo è come avere ciò:



un dipolo "tozzo", dove $I_{totale} = 2I_p$:

$$Z_{pari} = \frac{\frac{V}{2}}{2I_p} = \frac{V}{4I_p} = 4\,Z_{dipolo}$$



Per il modo dispari, si han 2 fili paralleli in cui una corrente è entrante e una è uscente; se $l = \lambda/4$ (lunghezza del braccio), dato un corto circuito in fondo, il $\lambda/4$ "inverte l'impedenza", e lo troverei un aperto: $I_d = 0$

Ora:

$I = I_d + I_p = I_p$; V si sa, $\Longrightarrow Z_{\substack{dipolo \\ ripiegato}} = 4\,Z_{dipolo}$

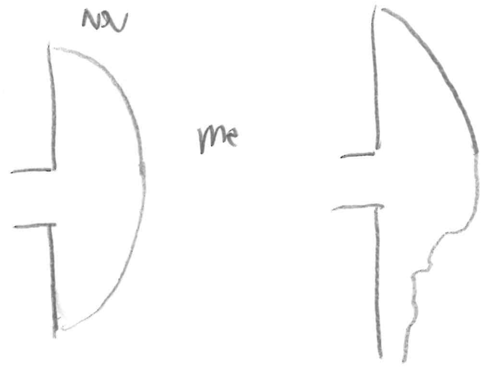
L'analisi fatta presuppone $2l = \lambda/2$; per un dipolo a mezz'onda $Z_a \approx 70\,\Omega$

$\hookrightarrow Z_{folded\ \lambda/2} \simeq 4 \times 70\,\Omega \simeq 300\,\Omega$

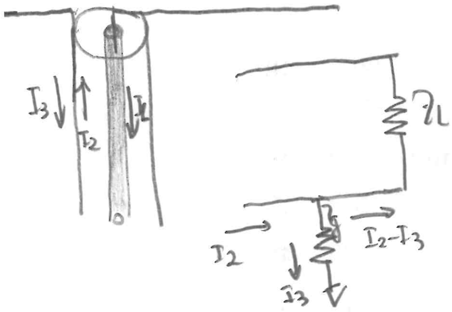
Il fatto che sia $250\,\Omega$ piuttosto che $300\,\Omega$ dipende dalla snellezza.

Note sull'alimentazione: un dipolo deve essere alimentato con una linea simmetrica: una bifilare! Ma essa, a frequenze sulle centinaia di MHz, dissipa: non va ⟹ devo usare il coassiale, che però è sbilanciato: la calza è a GND.

Problema: se collegassimo il dipolo a un coassiale, un morsetto all'anima uno alla calza, la linea sarebbe alimentata in maniera scorretta: non si avrebbe infatti una distribuzione come quella desiderata:

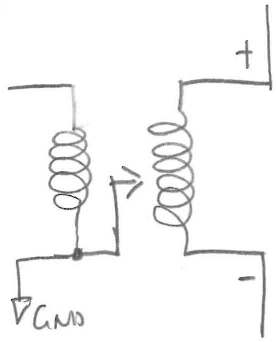


visto che il d. di irradiazione dipende fortemente dalla corrente è necessario aver la corrente giusta.
Non è tutto: il fatto di alimentare in coassiale farebbe avere delle correnti di ritorno sulla superficie esterna del coassiale, che diventerebbe un'antenna non intenzionale, disturbando ulteriormente l'irradiazione. Da Balanis Antenna theory, p. 540, capita ciò!

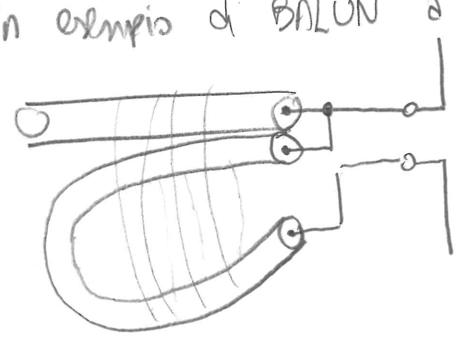


Z_g è la resistenza tra la parte esterna della calza e GND; I_3 è la corrente di sbilanciamento: è quella che rovina tutto.
Obiettivo: ridurre I_3.

BALUN: BALanced-UNbalanced
Ci serve qualcosa per passare da alimentazione sbilanciata a bilanciata: questo può essere un trasformatore a presa centrale.



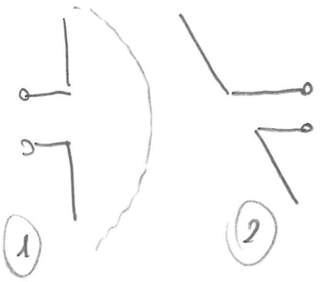
Il problema di questa struttura è che lavora a qualche centinaio di MHz, ma non sopra!
Un esempio di BALUN a coassiale è il "BALUN a trombone": dato un coassiale di alimentazione, più uno $\lambda/2$ "ripiegato", si collega uno dei morsetti al punto caldo, l'altro al morsetto; le masse (calze) son tutte collegate tra loro mediante fili metallici. Il $\lambda/2$ sfasa V di 180°; questa configurazione fa anche uno step-up:



quando la corrente esce, dati i vari adattamenti simmetrici, si "smezza", e la tensione "raddoppia" (da $(V-0)$ del sbilanciato si ha $(V-(-V))$ del BAL):
$\frac{2V}{I/2} = 4Z$ → l'impedenza è quadruplicata!

Dipoli accoppiati

Per aumentare la direttività, un'idea è quella di mettere dei dipoli vicini tra loro.



il campo di 1 interagisce con 2, genera delle correnti indotte che re-irradiano.

Questo sistema di 2 dipoli (caso base) può essere visto come un 2-porte caratterizzabile con la sua $\underline{\underline{Z}}$:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

Z_{11} e Z_{22} son le impedenze proprie delle antenne: le Z_{irr} di ciascun dipolo (nota: la Z_{irr} del sistema finale "array di dipoli" sarà anche diversa, eh).

Z_{21} e Z_{12} sono le "impedenze mutue": termini che derivano dalla presenza di dipoli vicini.

Vale la relazione $Z_m \triangleq Z_{21} = Z_{12}$

Se i dipoli son vicini, si avrà una mutua, dunque alimentando 1 dipolo, per la mutua, ne avrò 2 "irradianti". Quello non alimentato da generatore è detto "antenna parassita".

Nota: Z_m si può calcolare ricavandola da grafici, o con Friis, facendo considerazioni sui moduli dei campi.

I grafici ci sono sia per dipoli affiancati sia allineati (stesso asse).

Esempio di calcolo: 1 dipolo alimentato e 1 parassita (questo, con morsetti in corto).

$$\underline{\underline{Z}} \begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \Longrightarrow$$

se cortocircuito, $V_2 = 0$

$$\boxed{I_2 = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} I_1}$$

$$\frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - Z_{12}\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = Z_{11} - \frac{Z_m^2}{Z_{22}}$$

NMO!

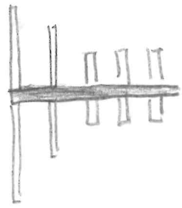
Antenne Yagi-Uda

Idea: fare una schiera endfire di dipoli, ma in cui 1 è alimentato gli altri NO. Scegliendo opportunamente le lunghezze degli elementi e le distanze, si può ottenere un d. di irradiazione direttivo.

I dipoli spesso sono ripiegati, in modo da alzare la Z_{in}: ciò è importante perché Z_m abbassa l'impedenza di un dipolo.

2 tipi di elementi, oltre al dipolo principale (2 tipi di parassiti):

- riflettore: elemento più lungo, posto nella direzione backfire, per riflettere il campo verso la endfire
- direttore: elemento che "fa andare dritto" il segnale, un po' più corto



Si usa 1 riflettore, e non più di 20 direttori.
La differenza sta nella lunghezza, dunque nella Z_{22}!

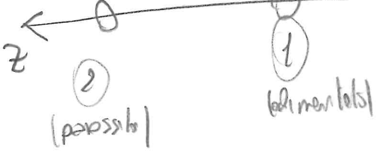
Nota: il punto centrale su cui si attaccano i dipoli, può sia esser isolante, sia conduttore: in un dipolo parassita, il punto centrale è a tensione nulla; la cosa vale soprattutto per il dipolo ripiegato il quale è un corto circuito a frequenze basse; un dipolo ordinario va scaricato elettrostaticamente prima di essere collegato a un ricevitore, essendo composto da "2 pezzi"; uno ripiegato non ha questi problemi.

Ciò deriva dalla teoria delle linee di tx: data linea $\lambda/4$, dato campo alimentante, V e I son duali; se il dipolo è risonante, al centro si ha il massimo di I, e lo zero di V.

Esempio: dati 2 dipoli a distanza $d = 0,15\lambda$, fare considerazioni sul campo (direttore)

@ $0,15\lambda$, $\begin{cases} X \simeq 0 \\ R \simeq 60\Omega \end{cases}$ ho: $Z_{11} \simeq 70\Omega$, $Z_{22} \simeq 80 + j80$ (poco più lungo di $\lambda/2$)

$\hookrightarrow I_2 = -\frac{Z_m}{Z_{22}} = 0,53\exp(j135°)$; dalla th. delle schiere:



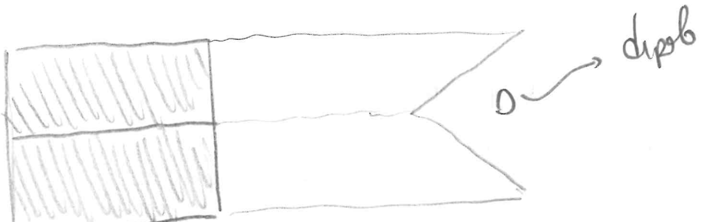
$E_1 \propto I_1$

$E_2 \propto I_2\exp(jkd\cos\theta)$ $I \propto I_1 + I_2\exp(jkd\cos\theta)$ $kd = \frac{2\pi}{\lambda}d = 0,15 \times 2\pi = 54°$

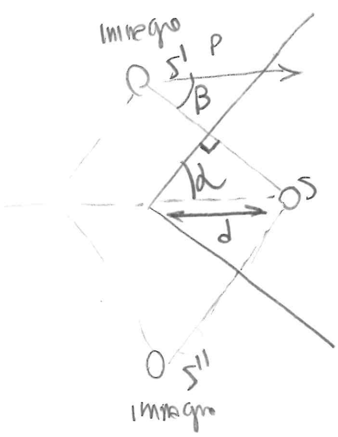
Ora: $I_2 \propto \exp(j\,135°)$; se ci aggiungo 56°, vado a 190°: praticamente il campo è in controfase e si ha $E \propto I_1 - I_2 \approx \phi$.
Se $\theta = 180°$, i due vettori sono circa in quadratura, e si ha il massimo di campo: il campo "torna indietro".

Corner reflector

L'idea del corner reflector è la seguente:



Si realizza anche qui un effetto schiera usando dei piani di massa messi "a diedro".



Come si fa il progetto? Il cammino ottico deve essere tale per cui tutti i contributi siano in fase. Vedendo che:

$$\overline{SS'} = 2\times(d\sin\alpha)$$

e che:

$$p = SS'\cos\beta \qquad \text{dove } \beta = 90° - \alpha$$

per gli archi associati,

$$p = 2d\sin^2\alpha$$

Questo deve essere $\lambda/2$: infatti, metà dell'inversione la fa il piano metallico: l'immagine è sfasata di 180°; p deve sfasare di altri 180°:

$$\frac{\lambda}{2} = 2d\sin^2\alpha \implies \frac{d}{\lambda} = \frac{1}{4\sin^2\alpha}$$

Nota: se $\alpha = 45°$, le immagini delle immagini coincidono; questo fa ottenere una schiera quadrata equivalente.

Antenna biconica - discone

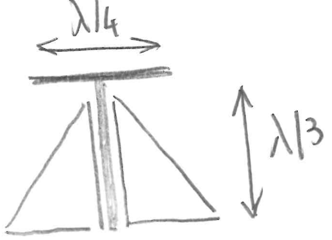
Biconica:

2 coni affacciati per il vertice, alimentati per il punto di contatto.

Simmetria assiale → irradiazione multidirezionale.

È simile al dipolo ma a banda più larga: larghissima.

Discone: disk + cono: evoluzione della precedente:



Antenna bilanciata, presa dal "tagliare a metà" una biconica, e mettendovi al posto un piano di massa.

Si alimenta in coassiale dove il coassiale arriva da sotto, si salda il cono alla calza e l'anima al piattello.

Antenna Log-periodica

Antenne indipendenti dalla frequenza

Il principio di Babinet dice che le irradiazioni di un'antenna e della sua complementare sono identiche: scambiando i "vuoti" col "metallo", l'antenna è uguale, per il metodo delle aperture.

Si ha un corollario:

$$Z_{antenna}\, Z_{complementare} = \left|\frac{Z_0}{2}\right|^2 \implies$$ se $Z_{ant} = Z_{complementare}$, le impedenze sono uguali a ogni frequenza!

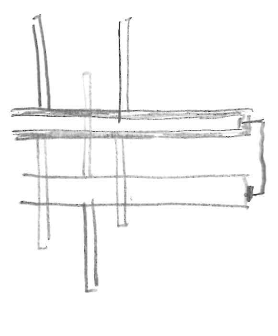
$Z_0 = 377\,\Omega$

Ciò è ideale: servirebbero antenne di dim. infinita e con alimentazione infinitesima.

Log-periodica (LPDA: Log-Periodic Dipole Array)

Data una bifilare che distribuisca la potenza, si fa una schiera con periodicità logaritmiche: man mano che si va avanti, gli elementi diventano progressivamente più piccoli e le spaziature inferiori, secondo un rapporto costante.

Così è fatta: coassiale saldato con la calza a un filo, con l'anima all'altro: ad generare punto caldo e punto freddo.



Per la spaziatura, per esempio (per la lunghezza vale lo stesso),

$d_n = d_{n+1}\,\tau$ $\quad\tau$ rapporto di periodicità.

Idea: se invece dello stesso λ_0 associato a f_0 ho tanto $\tau^i f_0$,

$\lambda_i = \dfrac{\lambda_0}{\tau^i}$: un po' come un insieme di radiatori, dei quali solo 2 o 3 risuonano per volta!

Data f_{min} e f_{max}:

- f_{min}: $l_1 = \frac{\lambda_{max}}{4}$;

- f_{max}: essendo il dipolo più corto vicino all'alimentazione, il c. di irradiazione è distorto, serve un fattore correttivo $B \simeq 1,5$ (grafico):

$$f_{max}: \quad l_n = \frac{\lambda_{min}}{4 B_a} \qquad B_a: \text{fattore di banda attiva}$$

Trovati l_1 e l_n, si trova N:

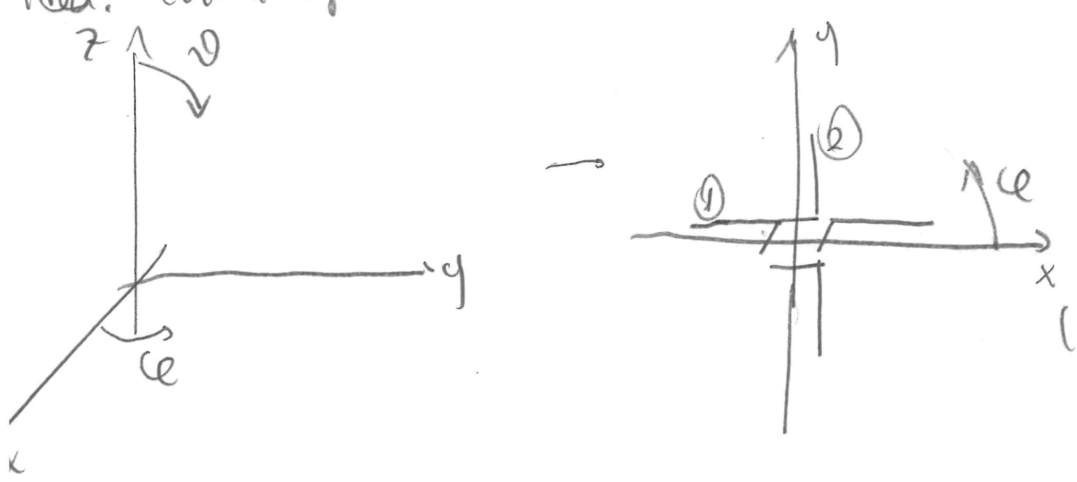
$$N = 1 + \frac{\log_{10}\left(\frac{f_{min}}{B_a f_{max}}\right)}{\log_{10}(\tau)}$$

Nota: come disegnato, la struttura deve esser tale da esser alimentata in modo da avere dipoli alimentati alternativamente: una volta il + sopra, una volta sotto...
Ciò deriva dalla desiderata autocomplementarietà.
Grazie a questa inversione, inoltre la struttura è endfire.

Antenna turnstile

Esigenza: avere un'antenna omnidirezionale a polarizzazione orizzontale

Idea: dato il seguente sistema di riferimento:



ho 2 dipoli: (1) e (2).

Si vede che:

$$\underline{E_2} \approx \frac{N_2}{2\lambda R} \sin\varphi$$

$$\underline{E_1} \approx \frac{N_1}{2\lambda R} \cos\varphi$$

("ribaltando" i riferimenti dei dipoli, usualmente con l'asse su z)

Si suppongo di avere correnti in quadratura e uguali in modulo:

$I_2 = j I_1 \longrightarrow M_2 = j M_1$

$$\hookrightarrow \underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 = \frac{M}{2\lambda} \frac{\exp(-jkR)}{R} \underbrace{|\cos\varphi + j\sin\varphi|}_{\text{da Eulero, ciò è il cerchio di raggio unitario!}}$$

Nota: in ampiezza non si ha dipendenza da φ! Ciò vale se i campi van come seno e coseno (dipoli elementari), ma la realtà non cambia troppo.

Nella direzione ortogonale $(\hat{z})$, che si ha? Su un piano una pol. orizzontale, sull'altro una verticale! $\longrightarrow$ pol. circolare risultante!

E questa è la "direzione più direttiva": su questo piano il campo è dato dalla somma dei moduli quadri dei dipoli, dunque doppio!

Sull'asse orizzontale agisce solo 1 dipolo per volta, 2 su quello $\hat{z}$!

Data l'ortogonalità, non c'è nulla mutua.

Antenne a elica

Un'elica (intesa come curva) è descrivibile come:

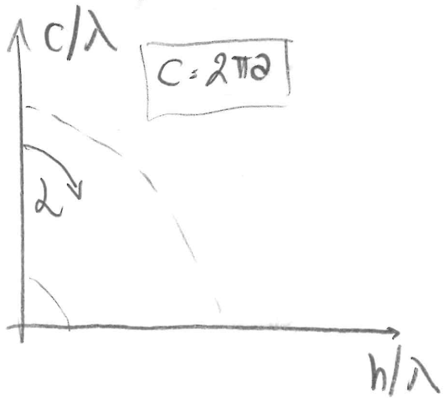
$$\begin{cases} \rho = a \\ z = \frac{h}{2\pi}\varphi \end{cases}$$

dove "a" è una costante, detta "raggio dell'elica", h il "passo" dell'elica! } Come φ varia di 2π (circonferenza) z aumenta di h

$h \to 0 \Rightarrow$ spire

$C \to 0 \Rightarrow$ linea

Per progettare l'elica si parte da qua:



l'angolo di inclinazione α è:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{h}{\pi D}$$

$$L_{spira} = \sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}$$

2 tipi di eliche:

- in modo normale: molto piccole
- per cui $L/\lambda \approx 1$

La propagazione è simile a quella di una guida circolare metallica/dielettrica, ma, a causa della cond. al contorno, la corrente scorre solo con angolo di α:

- modo assiale: la potenza è principalmente lungo l'asse;
- modo normale: la potenza è diretta perpendicolarmente all'asse.

Il fatto che la corrente fluisca solo con angolo α (la cond. al contorno), ricavata, dall'applicazione di ciò, l'equazione di dispersione, si ha $k_z > k_0$, quindi

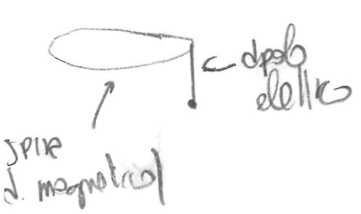
$v_f < \frac{\omega}{k_0}$ $\Rightarrow$ onda lenta

Modo normale

L'elica in modo normale ha un comportamento non troppo dissimile da quello di un dipolo, con un enorme vantaggio: esso è molto più corto! Il fatto che nella struttura le onde son lente, fa avere un $\lambda/4$ (monopolo + piano di massa) molto inferiore a quello del braccio del dipolo fisico.

La polarizzazione, per questo modo, può essere circolare o verticale: come detta un'elica può (al variare di α) degenerare in una spira o in un filo; se:

- $\pi D = \sqrt{2h\lambda}$ allora la pol. è circolare: è come avere un dipolo elettrico e un dipolo magnetico con campi di entità uguali
- se $\pi D \ll \sqrt{2h\lambda}$, prevale il comportamento del dipolo elettrico: pol. verticale



Questo vale per $L \ll \lambda$: condizione di modo normale

Si può ricavare che:

$$\left(\frac{c}{v_z}\right)^2 = 1 + \left(\frac{M\lambda}{\pi D}\right)^2$$ M da grafico.

$\frac{v_z}{c}$ è "di quanto si vuole ridurre la lunghezza della struttura rispetto al dipolo".

Modo assiale

In questo caso si ha a che fare con potenza prevalentemente sull'asse; in questo caso si chiede che c/λ sia circa unitario ($D \approx \lambda/\pi$), e si usa un angolo $\alpha \approx 12,5°$; anche h è circa pari a $\lambda/3$ (regola generale empirica)

↳ ciò permette un'irradiazione di tipo endfire, e polarizzazione circolare.

Un metodo per studiare ciò è considerare l'elica come una schiera di spire, distanziate h, con alimentazione di tipo progressivo.
L'impedenza di ingresso è abbastanza elevata, quindi (150Ω circa) bisogna "adattare"; ciò si fa modificando la prima spira, avvicinandola al piano di massa, aumentando il diametro equivalente ergo la capacità. Al più, 20 spire.
Il fattore di schiera può essere:

$$A = \sin\frac{\pi}{2n} \frac{\sin\left(\frac{n\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \quad , \quad \psi = 2\pi\left(\frac{h}{\lambda}\cos\vartheta - \frac{L}{\lambda p}\right)$$

???

da Kraus: laddove che si ha, al posto di $\frac{1}{n}$, essendo una "endfire con direttività aumentata" (Hansen & Woodyard)

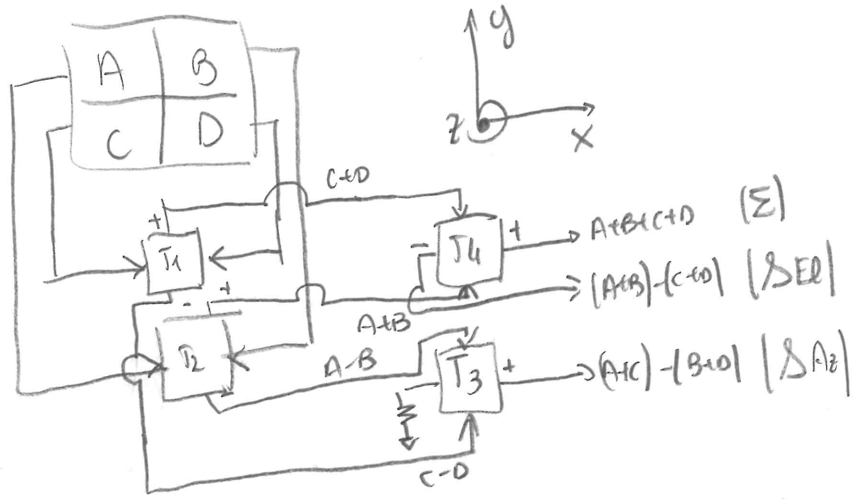
Si ricava che:

$$R \approx 140\frac{C}{\lambda} \approx 140\Omega .$$

(come detto prima).

Quadri helix

Arrangement di antenne, per realizzare sistemi di tracking. Un poco direttive (15 ÷ 20 dB)
Topologia: è una schiera planare 2x2:



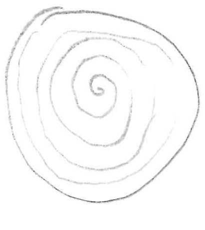
Si hanno 4 ibridi che fanno le combinazioni lineari dei segnali.

Modo Σ (somma): diagramma di irradiazione frontale, lungo z. Come normale schiera

Modo ΔEl: (A+B)-(C+D): i diagrammi di irradiazione di (A+B) e (C+D) si eliminano sul piano xz (quello che separa A+B da C+D); quando si localizza la sorgente in elevazione si mantiene essa sullo 0, provocato dalla cancellazione

Modo ΔAz: analogo a prima, (A+C) - (B+D).

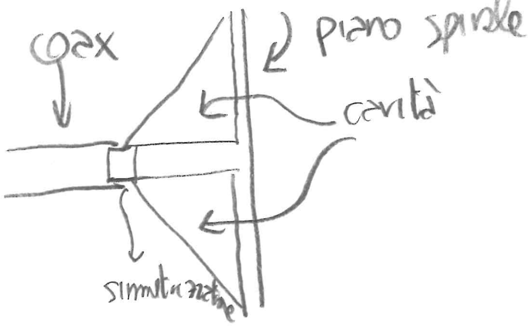
Antenna a spirale



Si tratta di un altro tipo di antenna idealmente indipendente dalla frequenza; se si prende una spirale, un'altra e si mettono a 90°, si trova una struttura autocomplementare.

Vi son diversi tipi di spirale: di Archimede, Logaritmica ...

Se la spirale è piana, si ha simmetria, ma in 2 direzioni: entrante e uscente dal foglio. Si fa ciò:



In questo modo, la cavità fa tornare il segnale "verso destra", oltretutto con una banda comunque larga.

Schiere di antenne

Le schiere sono degli insiemi di radiatori, disposti nello spazio in modo opportuno.
Sono possibili disposizioni di ogni tipo, ma noi considereremo in particolare il caso di radiatori tutti uguali tra loro, egualmente orientati.
Supponendo che i radiatori siano modellabili con sorgenti di tipo "correnti elettriche", si ha:

$$\underline{J}_e(\underline{r}) = \sum_{n=0}^{N-1} I_0 \underline{J}_{en}(\underline{r}) \qquad \text{dove } \underline{J}_{en}(\underline{r}) = \frac{I_n}{I_0} \underline{J}_{e0}(\underline{r} - \underline{r}_{0n})$$

I_n: fattore di alimentazione

$\underline{r}_{0n}$: termine di traslazione del n-esimo elemento

In far-field, il MEG di questa struttura è:

$$\underline{P}_e(\hat{r}) = \underline{\underline{\Xi}}_{tr} \int_{\underline{r}'} \underline{J}_0(\underline{r}') \exp(j k_0 \hat{r} \cdot \underline{r}') d\underline{r}' = \underline{\underline{\Xi}}_{tr} \int_{\underline{r}'} I_0 \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{\frac{I_n}{I_0}}_{a_n} \underline{J}_{e0}(\underline{r} - \underline{r}_{0n}) \exp(j k_0 \underline{r}' \cdot \hat{R}) d\underline{r}' =$$

$$= \underline{\underline{\Xi}}_{tr} I_0 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\underline{r}'} a_n \underline{J}_{e0}(\underline{r}') * \delta(\underline{r}' - \underline{r}_{0n}) \exp(j k_0 \underline{r}' \cdot \hat{R}) d\underline{r}' =$$

$$= \underline{\underline{\Xi}}_{tr} I_0 \sum_{n=0}^{N-1} \int_{\underline{r}'} \int_{\underline{r}''} \delta(\underline{r}'' - \underline{r}_{0n}) \underline{J}_{e0}(\underline{r}' - \underline{r}'') \exp(j k_0 \hat{R} \cdot \underline{r}') \exp(j k_0 \hat{R} \cdot \underline{r}'') \exp(-j k_0 \hat{R} \cdot \underline{r}'') d\underline{r}' d\underline{r}'' =$$

$$= \underline{\underline{\Xi}}_{tr} I_0 \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_{\underline{r}''} \delta(\underline{r}'' - \underline{r}_{0n}) \exp(j k_0 \hat{R} \cdot \underline{r}'') \int \underline{J}_{e0}(\underline{r}' - \underline{r}'') \exp(j k_0 (\underline{r}' - \underline{r}'') \cdot \hat{R}) d\underline{r}' d\underline{r}'' =$$

$$= \underline{\underline{\Xi}}_{tr} I_0 \sum_{n=0}^{N-1} a_n \exp(j k_0 \hat{R} \cdot \underline{r}_{0n}) \int_{\underline{r}'} \underline{J}_{e0}(\underline{r}' - \underline{r}'') \exp(j k_0 \hat{R} (\underline{r}' - \underline{r}_{0n})) d\underline{r}'$$

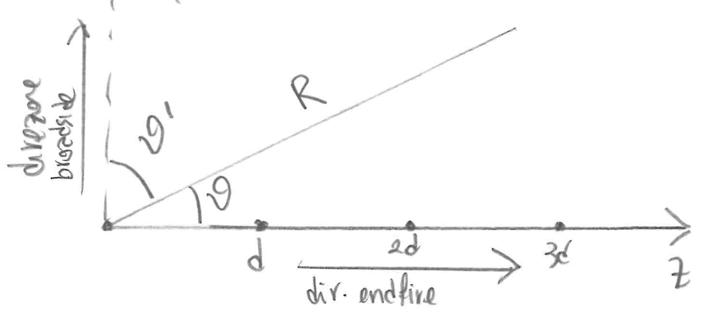
pongo $\underline{r}''' \triangleq \underline{r}' - \underline{r}_{0n}$

$$\hookrightarrow \underline{P}_e(\hat{r}) = \underline{P}_{e0}(\hat{r}) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \exp(j k_0 \hat{R} \cdot \underline{r}_{0n}) \triangleq \underline{P}_{e0}(\hat{r}) A(\hat{r})$$

$A(\hat{r})$ ↳ fattore di schiera

$\underline{P}_{e0}(\hat{r})$ ↳ momento elettrico generalizzato di uno dei radiatori (tutti uguali)

Questo è il "teorema fondamentale delle schiere":
il campo totale è dato dal prodotto del campo di uno dei radiatori, moltiplicato per il fattore di schiera.



Schiere lineari equispaziate

Ulteriore semplificazione: si supponga che gli elementi stiano su una retta e siano tra loro equispaziati.
Dato R il vettore del punto potenziato è evidente che:

se $\underline{r}' = n d \hat{z} \longrightarrow \underline{r}' \cdot \hat{R} = n d \cos\theta$

$$\hookrightarrow A = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \exp(j k n d \cos\theta)$$

Ciò che a noi interessa determinare, per controllare la schiera, sono gli a_n; essi sono, in generale, numeri complessi:

$a_n = |a_n| \exp(j \angle a_n)$ dove poi definisco $\varphi_n \triangleq \angle a_n$

Di solito, $\varphi_n = n\Phi$: valore di φ_n che cresce progressivamente con n;
Φ: valore di sfasamento progressivo

$\hookrightarrow A = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| \exp(jn(kd\cos\theta + \Phi))$ definisco $\psi \triangleq kd\cos\theta + \Phi$

$\hookrightarrow A = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| \exp(jn\psi)$ se ora, infine, definisco un $z \triangleq \exp(j\psi)$, ho:

$\hookrightarrow A = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| z^n$, $z \in \mathbb{C}$

Questa è la "formulazione polinomiale del fattore di schiera": il fattore di schiera è a tutti gli effetti un polinomio in campo complesso

Nel sistema di riferimento, ϑ varia da 0 a $180°$: $\cos(0) = 1$; $\cos(180°) = -1$

$\hookrightarrow -kd + \Phi < \psi < kd + \Phi$ Φ e kd sono angoli; ψ può variare di $360°$.

Ora: dati Φ e kd noti, è detto "campo di visibilità" l'insieme di angoli assumibili da ψ; se per esempio (il valore più importante) $kd = \pi$, ciò che si fa è coprire il "cerchio" intero una volta sola: attorno a Φ, ψ varia di $\pm \pi$.

3 possibilità:
- $kd < \pi$: "copro" meno del cerchio di raggio unitario
- $kd > \pi$: "copro" più di una volta (un giro e qualcosa) il cerchio di raggio unitario
- $kd = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d = \pi \rightarrow \frac{d}{\lambda} = 0{,}5$: copro una sola volta il cerchio di raggio unitario.

$A(\psi)$ è una funzione periodica di ψ: dopo che ψ fa il suo giro, riparte uguale a prima.

Se $d > \lambda/2$, si ha la "ripetizione parziale o totale" del fattore di schiera: il rischio è quello di avere "più di un lobo principale", cosa che riduce enormemente il guadagno (grating lobes)

Schiere uniformi

Ulteriore semplificazione: $a_n = 1 \; \forall n$.

$\rightarrow A(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp(jn\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = \frac{z^N - 1}{z - 1}$

Questa espressione è interessante: determiniamone gli zeri!

Trick: si ha: $\frac{z^N - 1}{z - 1} = \frac{\exp(jN\psi) - 1}{\exp(j\psi) - 1} = \frac{\exp(j\frac{N}{2}\psi)}{\exp(j\frac{\psi}{2})} \frac{\exp(j\frac{N}{2}\psi) - \exp(-j\frac{N}{2}\psi)}{\exp(j\frac{\psi}{2}) - \exp(-j\frac{\psi}{2})} =$

$$= \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)} \frac{\exp(\ldots)}{\exp(\ldots)} \Rightarrow |A(\psi)| = \left|\frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}\right|$$

il secondo termine è di sola fase, dunque con il modulo si annulla

Normalizziamo:

$$\lim_{\psi\to 0} A(\psi) = \frac{N\frac{\psi}{2}}{\frac{\psi}{2}} = N \longrightarrow \text{per avere } \max\{A(\psi)\} = \lim_{\psi\to 0} A(\psi) = 1,$$

$$\hookrightarrow A(\psi) = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}\right|$$

Caso particolare: $N = 2$

Ripartiamo dalla sommatoria:

$$A(\psi) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = 1 + z \Rightarrow 1+z = 1+\exp(j\psi) = \exp\left(j\frac{\psi}{2}\right)\left[\exp\left(j\frac{\psi}{2}\right)+\exp\left(-j\frac{\psi}{2}\right)\right] \frac{2}{2}$$

$$|A(\psi)|_{N=2} = \left|\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\right|$$

Calcolo ora il livello dei lobi secondari: considero il cambio di variabile $X = N\frac{\psi}{2}$

$$\hookrightarrow A(x) = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin(x)}{\sin\left(\frac{1}{N}x\right)}\right|$$

valuto ciò per N molto grande: $\frac{X}{N} \to 0$, $\sin\left(\frac{X}{N}\right) \approx \frac{X}{N}$

$$\hookrightarrow A(x) \approx \frac{\cancel{N}}{\cancel{N}} \frac{\sin(x)}{X} \longrightarrow$$

come noto dalla teoria delle aperture, $\frac{\sin(x)}{x}$ ha il SLL a -13 dB.

Con una schiera uniforme i lobi secondari son alti. L'ipotesi dietro all'approssimazione dell'array factor con una $\text{sinc}(x)$ è "N grande"; a questa condizione, la schiera si comporta come un'apertura. A questa ipotesi, dunque, ho:

$$\theta_{3dB} \approx 0.88\frac{\lambda}{L} = 0.88\frac{\lambda}{Nd} \quad \text{(schiera Broadside)}.$$

Per una schiera broadside, si può dimostrare (Balanis - Antenna Theory - 6.4.1 p. 313) che

$$D_{max} \cong 2\frac{L}{\lambda}$$ (data ipotesi di spaziatura piccola tra gli elementi) ($L >> d$)

Per una endfire (Balanis - 6.4.2)

$$D_{max} \cong 4\left(\frac{L}{\lambda}\right) \qquad L >> d$$

Abbiamo parlato di schiere broadside e endfire; che significa?

- endfire: il massimo è diretto lungo l'asse della schiera
- broadside: i massimi (2) son diretti normalmente alla schiera.

Sappiamo che il massimo del d. di irradiazione è per $\psi = \phi$; qual è il ϑ corrispondente al massimo del d. di irradiazione?

$$\psi = kd\cos\vartheta + \Phi \longrightarrow kd\cos\vartheta + \Phi = \phi \longrightarrow \cos\vartheta = -\frac{\Phi}{kd} \longrightarrow \boxed{\vartheta = \arccos\left(-\frac{\Phi}{kd}\right)}$$

Dipende dallo sfasamento progressivo che imposto!

Volendo una endfire, $\vartheta = \phi \Rightarrow \cos(0) = -\frac{\Phi}{kd} \longrightarrow \boxed{\Phi = -kd}$

Volendo una broadside, $\vartheta = 90°$

$\hookrightarrow \cos 90° = -\frac{\Phi}{kd}$ essendo $kd \neq \phi$ per ipotesi, $\boxed{\Phi = \phi}$!!

Spaziatura ottimale

G dipende da L, dalla lunghezza della schiera; NON solo dal numero di elementi!

Più lunga è la schiera, meglio è la sua direttività, ma non si può strafare, altrimenti si includono grating lobes nel visibile

Come si può determinare il d più grande per cui non si abbian grating lobes? Beh, sappiamo che:

$\Phi - kd < \psi < \Phi + kd$

Il massimo kd è la posizione dell'ultimo zero, meno Φ!

Gli zeri sono equispaziati: essendo $\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)$, $\sin(x) = \phi$ per $x = n\pi$,

$N\frac{\psi}{2} = n\pi \longrightarrow \boxed{\psi = \frac{2\pi}{N}} \rightarrow$ spaziatura di ψ tra due zeri

Partendo da ϕ, l'ultimo zero prima del grating lobe è a $\frac{2\pi(N-1)}{N}$

$\hookrightarrow kd_{max} = 2\pi\frac{N-1}{N} - \Phi$

$\Phi = kd|\sin\vartheta_s|$: ϑ_s angolo preso su direzione broadside (ϑ') [il cos. per questo diventa sin]

$\hookrightarrow kd_{max} = 2\pi\frac{N-1}{N} - kd|\sin(\vartheta_s)| \longrightarrow kd\left(1 + |\sin\vartheta_s|\right) = 2\pi\frac{N-1}{N}$

$\hookrightarrow \frac{\cancel{2\pi}}{\lambda} d = \cancel{2\pi}\frac{N-1}{N}\frac{1}{|\sin\vartheta_s| + 1}$

Nel caso broadside, $\vartheta_s = 0$, $\sin\vartheta_s = 0$, $\boxed{d_{max} = \lambda\frac{N-1}{N}}$

Nel caso endfire, $\vartheta_s = 90°$, $\sin\vartheta_s = 1$, $d_{max} = \lambda\frac{N-1}{2N}$

Schiere non uniformi

Problema schiere uniformi: lobi alti

↳ si introduce un concetto simile a quello del tapering, al fine di ridurre o eliminare i lobi.

Schiere binomiale

Una funzione che NON ha lobi secondari è il coseno: $N=2$!

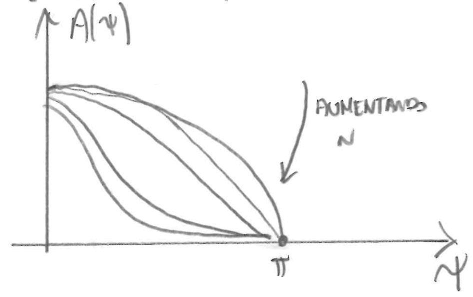
↳ $N=2 \longrightarrow |A(\psi)| = |1+z| = \left|\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\right|$

Consideriamo ciò: data questa, si elevi alla $N-1$ il suddetto binomio:

$$\cos^{N-1}\left(\frac{\psi}{2}\right) = |1+z|^{N-1}$$

si han $N-1$ zeri, ma tutti in $z=-1$! $\psi=\pi$, ma non si han zeri!

Si ha qualcosa di questo tipo:



aumentando N, $A(\psi)$ diventa più direttiva ma senza aggiungere lobi secondari

ALIMENTAZIONE: triangolo di Tartaglia!

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Il vantaggio è evidente: no lobi secondari. A parità di numero di elementi, il fascio è più largo quindi meno direttivo.

I coeff. di alimentazione si ricavano mediante il sopra riportato triangolo di Tartaglia.

Schiere triangolare

Si parte da una schiera uniforme di N radiatori: (coeff. di alimentazione unitari)

$$A(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{N-1}$$

Dato questo polinomio, lo si elevi a quadrato; si avrà, come risultato, un polinomio di grado $2N-1$, con coefficienti

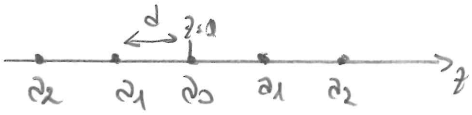
$1, 2, 3, \dots, N, N-1, \dots, 2, 1 \longrightarrow$ "taper" con inviluppo triangolare.

Risultato:
- raddoppia il numero degli zeri
- dai -13 dB di prima, si ne han ora -26 (il quadrato) [SLL]
- si ha il doppio degli elementi.
- il fascio è circa $\theta_{3dB} \simeq 73 \frac{\lambda}{L}$; $G \simeq 1{,}5 \frac{L}{\lambda}$.

Distribuzioni simmetriche

Tutto ciò che abbiamo visto riguarda numeri complessi. Introdotto però un vincolo sulla SIMMETRIA del "taper", si ottiene qualcosa di interessante.

Caso N dispari: dato a_0 l'elemento centrale, si ha ciò ($N=5$):



quello che si ha, volta per volta, è:

$a_0 + a_1 \exp(j\Psi) + a_1 \exp(-j\Psi)$ essendo una volta "d" e una "-d"; $\rightarrow = a_0 + a_1 \cos(\Psi)$

↳ si trova, per N dispari:

$$A(\Psi) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \cos\left(2n \frac{\Psi}{2}\right)$$

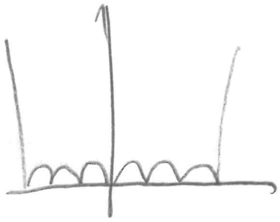
per N pari, a_0 non c'è:

$$A(\Psi) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} a_n \cos\left[(2n-1)\frac{\Psi}{2}\right]$$

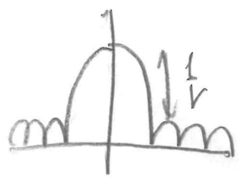
nota: si usa poi normalizzare ciò all'elemento maggiore, o meglio fare in modo che $\max\{A(\Psi)\} = 1$

Schiera alla Chebyshev (Dolph-Chebyshev)

Obiettivo: usare la proprietà del ripple per avere lobi secondari uguali.



I polinomi di Chebyshev hanno questo andamento:



vogliamo una trasformazione per ottenere:

La trasformazione è: ricavianda "intuitivamente"

$\Psi = kd\cos\theta + \Phi$;

Per un certo x_0, ho $T_m(x_0) = r$; r è "di quanto voglio il lobo principale sui secondari"

$T_m(x_0) = r$

Voglio che il $\Psi = \Phi$ (il massimo) sia per $x = x_0$:

$$\frac{\Psi}{2} = \arccos\left(\frac{x}{x_0}\right) \longrightarrow x = x_0 \cos\left(\frac{\Psi}{2}\right)$$

IDEA: si è visto che: (per esempio per N dispari)

$$A(\Psi) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos\left[2n \frac{\Psi}{2}\right]$$

↳ sostituisco, qui, $\frac{\Psi}{2} = \arccos\left(\frac{x}{x_0}\right)$:

$$A(\Psi) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} a_n \underbrace{\cos\left[2n \arccos\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]}_{T_{2n}(x)} = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} a_n T_{2n}(x)$$

per il N pari,

$$A(\Psi) = 2 \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} a_n T_{2n-1}(x)$$

Come si progetta la schiera Chebyshev? Dato il numero di elementi, voglio: (N)

$$\sum_{n=1}^{N'} a_n T_m\left(\frac{x}{x_0}\right) = T_{N-1}(x)$$ ed eguaglio!

es: con 6 elementi,

$$\sum_{n=1}^{3} a_n T_{2n-1}(x) = T_5(x)$$

dove: $T_0(x) = 1$; $T_1(x) = x$; $\boxed{T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}}$

dove x_0 è:

$$x_0 = \cosh\left[\frac{1}{N}\,\mathrm{settcosh}(r)\right]$$ $r = -20$ dB per esempio!

Schiera continua

$I(x)$ è la funzione inviluppo delle alimentazioni; un'idea della schiera, se N i elevato, è:

$A(\psi') \approx \mathcal{F}\{I(x)\}$, $\psi' = \psi\frac{N-1}{2}$

Di solito, per far conti alla buona, si può fare ciò.

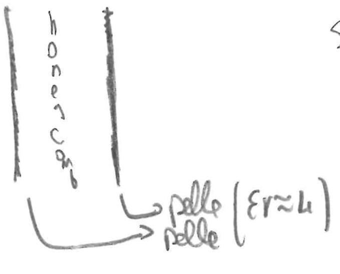
$\sum a_n \exp(jn\psi)$ somma di tante trasf. di Fourier traslate di 2π in ψ'; solo 1 termine in realtà è non trascurabile.

↳ Ciò si può fare se $d \le 0{,}6\lambda$. circa

Nota: talvolta si usano "dipoli a strisce", in modo da aumentare l'area per la dissipazione del calore.

- RADOME: protezione (spesso o multiplo di $\lambda/2$)
- sandwich: due materiali molto sottili, e qualcosa a ε_r bassa in mezzo (honeycomb)

si considera, qui, riflessione unica



Nota: fattore di schiera e diagramma di radiazione dell'elemento devono avere i massimi più o meno nella stessa zona, se no si "alternano a vicenda"!

Piano di masse (Balanis, Antenna Theory, sec. 4.7 da p. 184)

Nel caso della presenza di un piano di massa si ha sostanzialmente a che fare con un array di 2 elementi: in questo caso, gli elementi sono però alimentati in opposto (principio delle immagini):

$$A(\psi) = 1 - z = 1 - \exp(j\psi) = -\exp\left(j\frac{\psi}{2}\right)\left[\exp\left(j\frac{\psi}{2}\right) - \exp\left(-j\frac{\psi}{2}\right)\right] = -\exp\left(j\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

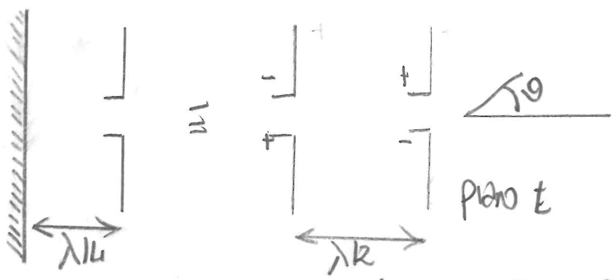
$\hookrightarrow |A(\psi)| = \left|\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\right|$ $\quad \psi = kd\cos\vartheta$, ϑ rispetto endfire (ossia, sulla normale al piano)


piano H

Si usi $h = \frac{\lambda}{4}$ (distanza dell'elemento dal piano): $d = 2\frac{\lambda}{4} = \frac{\lambda}{2}$

$$\rightarrow kd\cos\vartheta = \frac{2\pi f}{c}\frac{c}{2f_0} = \pi\frac{f}{f_0}$$

$$\hookrightarrow |A(\psi)| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\cos\vartheta\right)\right|$$



piano E

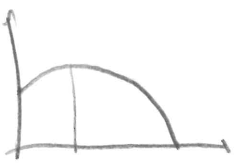
Qual è, per questo, ϑ_{-3dB}? boh:

$$\vartheta_{-3dB} = \vartheta : \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\cos\vartheta\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\cos\vartheta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \vartheta : \cos\vartheta = \frac{1}{2} \rightarrow \vartheta = 60°$$

Quindi, rispetto a un $\sin\vartheta$, l'antenna (la schiera) è meno direttiva.
Nota: per il piano H, a posto così; per il piano E, c'è da tenere anche in conto la presenza del diagramma del dipolo!

Nota: si ha una funzione della frequenza f; che capita a $f \neq f_0$?

- se $f > f_0$, $\frac{f}{f_0} > 1$: per $\cos\vartheta = 1$, si ha più di $\frac{\pi}{2}$ come argomento. Per $x > \frac{\pi}{2}$, si è "oltre il massimo": il massimo sarà circa a $\arccos\left(\frac{f_0}{f}\right)$ $\leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\cos\vartheta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\vartheta = \frac{f_0}{f}\right)$

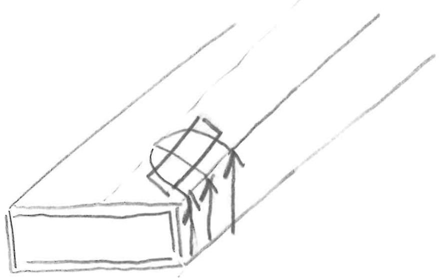


- se $f < f_0$, si parte da un massimo, ma "dopo" $\frac{\pi}{2}$: il valore iniziale sarà un massimo, ma "più basso".

$\hookrightarrow$ meglio, nota: NON si mette il dipolo troppo vicino, altrimenti si ha un cortocircuito al piano di massa!

Antenne a fessura

Un modo per realizzare schiere è basato sulle fessure su guide d'onda.



Fare una fessura tale per cui essa concateni un certo numero di linee di corrente, in modo tale da avere del campo in essa.
Se si fa quanto appena detto le correnti "girano attorno" alla fessura, inducendo sulla medesima un campo, che sarà, essendo le correnti disposte in modo simile a quello della guida "principale" rispetto alla sua bocca, simile al campo della guida stessa: un TE_{10} circa.

Applico il teorema di equivalenza:

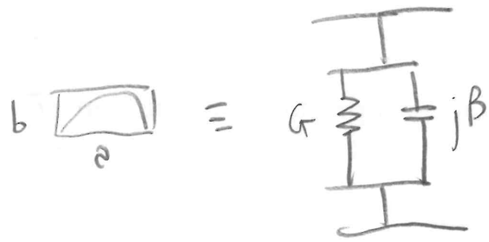
$\underline{M}_s = 2\underline{E}_s \times \hat{n}$ $\longrightarrow$ $\underline{E}$ è non nullo solo nell'apertura!

Possiamo preoccuparci della sola fessura:

Questo è equivalente a un dipolo magnetico che irradia verticalmente.

(regola della mano destra).

Vogliamo progettare una schiera di questi elementi. Per farlo, ricorriamo a un equivalente circuitale a p. distribuiti / concentrati: la fessura avrà una conduttanza di radiazione G_{irr}, si ha:



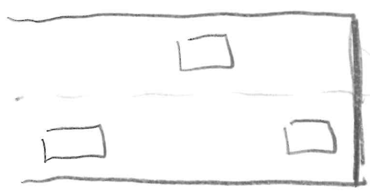
$P_{irr} = V G_{irr}$

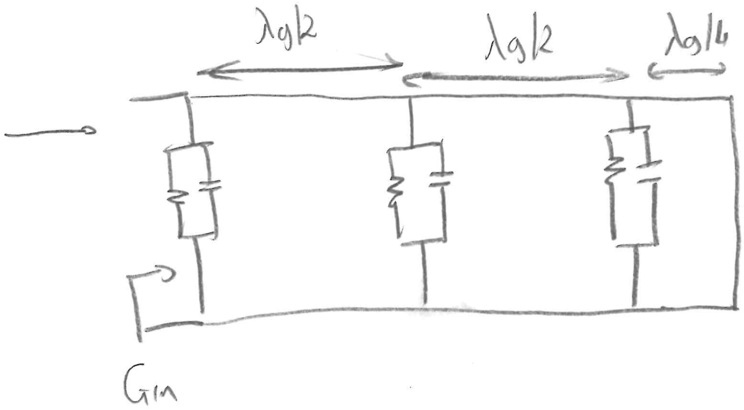
ma si sa, dal TE_{10}, che:

$$P_{irr} \propto \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) \implies G_{irr} \equiv G = G_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

"x" è la posizione della fessura sulla guida. G_0 è la conduttanza della prima fessura.

Come si fa la schiera? Così:





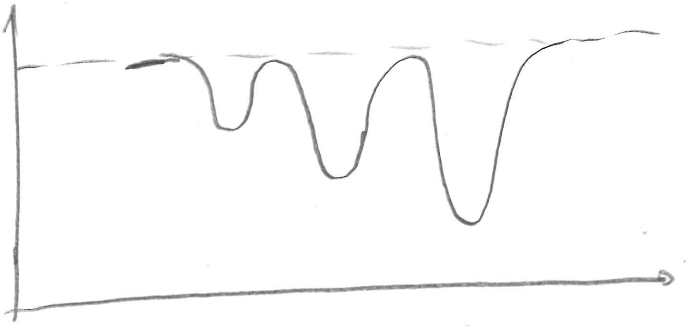
Volendo G_{in},

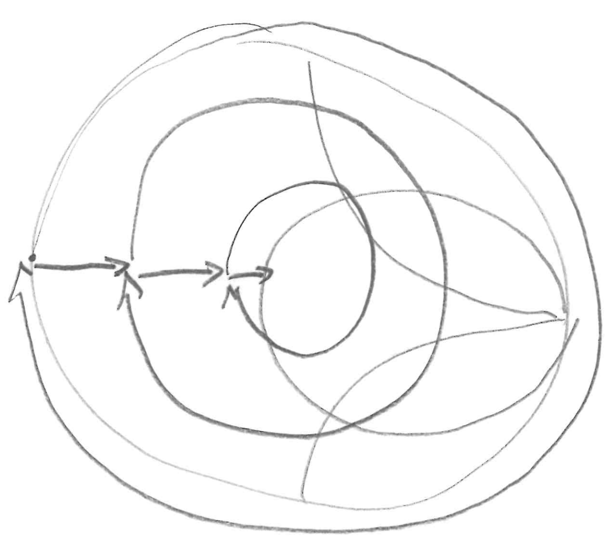
$G_{in} = \sum_i G_i$ avendo N fessure uguali, basta chiedere $\boxed{G_i = \frac{1}{N}}$!

Ragioniamo sulla tensione:

$$V(z) = V^+ \left[1 - \Gamma_I(z)\right]$$

Capita ciò:





la tensione si preserva, sul massimo, poiché la discontinuità di impedenza non è una discontinuità che modifica la tensione; il ROS invece si riduce, volta per volta.

Si ricordi però che:

$V^+ = V_0^+ \exp(-jkz)$ ⟿ con $z = \frac{\lambda}{2}$, $\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \pi = 180°$: la fase, a ogni $\lambda_g/2$, si inverte e basta!

↳ si "scambiano i morsetti", mettendo una fessura da una parte, una nell'altra, e così via.

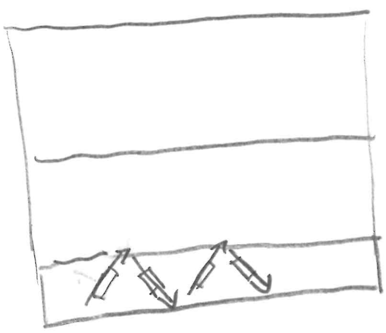
NOTA: si potrebbero distanziare gli elementi λ_g, ed evitare lo scambio di polarità; ma, essendo $\lambda_0 < \lambda_g$, si avrebbero grating lobes.

Soluzione: "rallentare λ_g", riempiendo la struttura di dielettrico.

Ciò ha vantaggi: un migliore allineamento evita di provocare distorsioni al d. di irradiazione.

$a \approx \lambda_0/2$ (struttura a banda stretta); $b \approx \frac{a}{10}$;

Struttura a pol. orizzontale:



In questa, fare le aperture verticali non taglierebbe corrente, quelle orizzontali ne taglierebbero troppe; così si han ogni volta 2 dipoli orientati all'opposto, e le componenti di polarizzazione verticale si elidono;

Antenne stampate

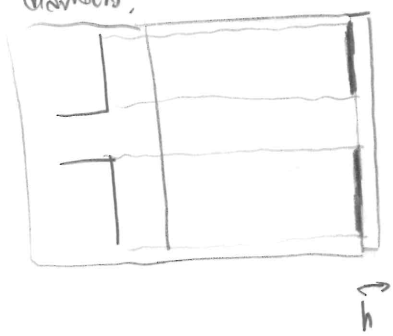
3 tipi di "antenne stampate".

Antenne a supporto dielettrico

Si tratta di antenne in cui il dielettrico fa solo da supporto fisico alla metallizzazione; il supporto è di spessore h; se $h \ll \lambda$ ($h \approx \frac{1}{10}\lambda$ per es.), è come se la struttura fosse in aria.

Si possono fare dipoli stampati: invece di avere un cilindro, si stampa sul piano. Ciò non ha un piano di massa. Si può dimostrare che ciò coincide a un dipolo di diametro:

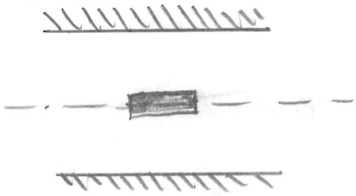
$d_{eq} = \frac{w}{2}$; e si progetta come il dipolo al solito.



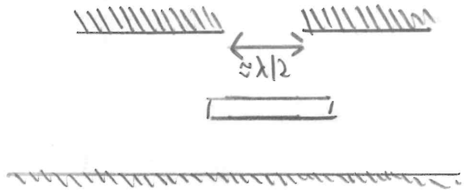
Vantaggio: facile da realizzare

Svantaggio: l'alimentazione è problematica; si recupera la microstriscia, mettendo un piano di massa sotto, dunque facendo un "monopolo stampato su piano di massa": si alimenta in simmetria tramite accoppiamento elettromagnetico.

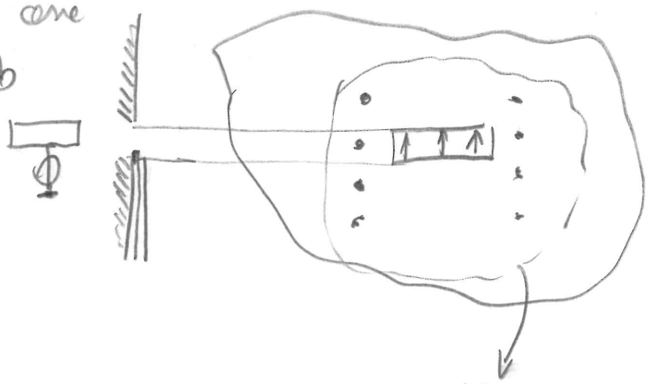
Antenne stripline



La stripline è una siffatta struttura: 2 piani di masse, e in mezzo una pista. Possono essere dielettrici, per esempio per "tenere su la pista" (suspended stripline), e si dovrà calcolare una ε_{media}.



Per farla irradiare si pratica una fessura su uno dei piani di massa; il campo elettrico tangenziale è non nullo sulla fessura, perpendicolare alla dim. massima; ciò è come un'apertura. Ciò si può alimentare in coassiale, saldando la calza con la parte inferiore, l'anima con quella superiore: come un generatore.



regione di confinamento

Per non perturbare il resto della struttura si mettono dei shorting pin: essi fanno in modo che la perturbazione rimanga confinata nella regione segnata.

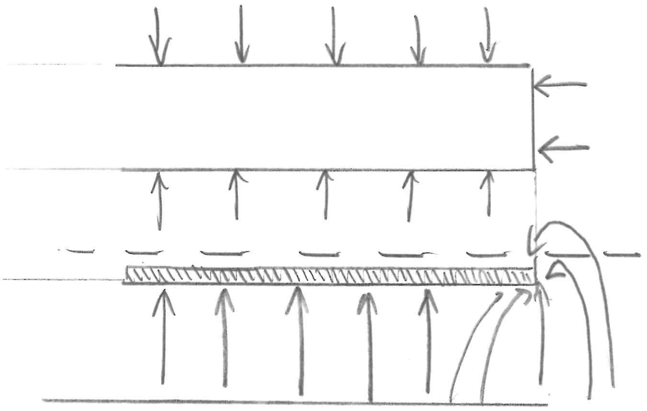
Si cortocircuita il campo rendendolo monodirezionale.

Se i pin son vicini: come una sorta di cavità risonante!

"Low profile": utili per esempio negli aerei!

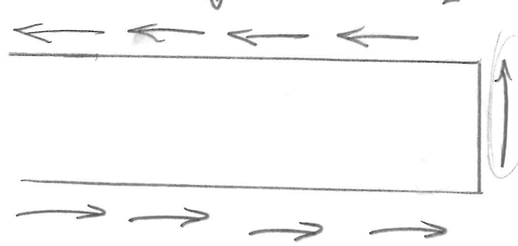
Antenne in microstriscia

La microstriscia è una struttura che supporta un modo quasi-TEM, usando una ε_{effi} "media" tra aria e dielettrico (essendo le linee di campo un po' in uno un po' nell'altro).
Si ha un piano di massa o $0V$; alimentazione <u>sbilanciata</u>.
Il comportamento elettromagnetico di una linea in microstriscia è:



applicando il teorema di equivalenza a questo piano, si vede ciò:

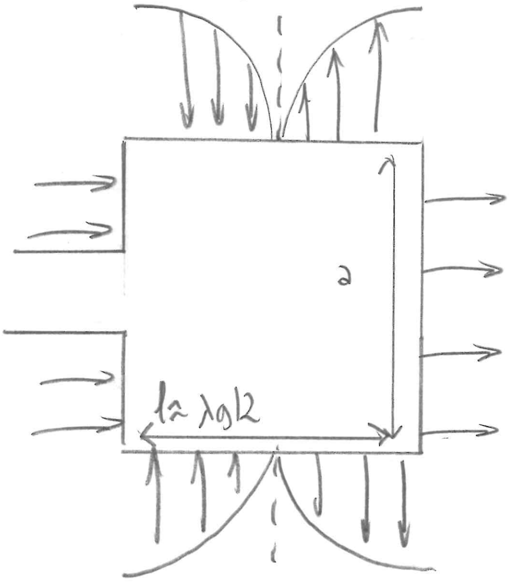
$\underline{M} = 2\underline{E} \times \hat{n}$



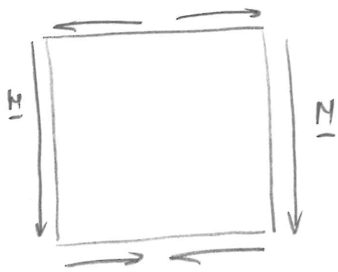
|regola della mano destra|

Dal momento che una linea in microstriscia è piuttosto sottile, l'unico contributo di corrente che non si "annulla", quello "verticale", è ridotto. La struttura è leggermente irradiante: la troncatura lo è.

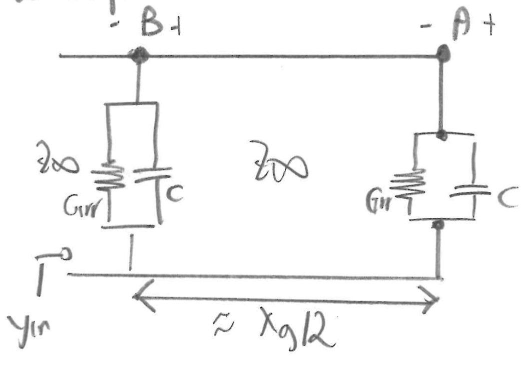
↳ Antenne patch



Si ha qualcosa del genere: lungo l <u>circa</u> lungo $\lambda g/2$, si ha un comportamento da "linea di trasmissione": dopo $\lambda g/4$ da open si vede uno short, poi tensione e campo hanno inversione di segno.

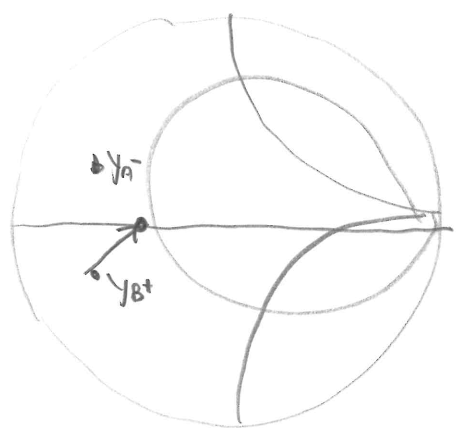


Applicando il th. di eq., si ricava un comportamento di questo tipo: le correnti ai lati orizzontali si elidono, e rimangono le 2 di lato verticali, che si comportano come una schiera di 2 elementi "dipoli magnetici". I due lati orizzontali sono detti "non-radiating edges".
La polarizzazione qui è orizzontale; regola di massima è: il campo elettrico sta nel verso dell'alimentazione.
Il modello circuitale è il seguente:



Si continua a scrivere che la linea è <u>circa</u> $\lambda g/2$, $\lambda g = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_{eff}}$; perché? Beh, volendo avere una struttura risonante, Y_{in} deve essere <u>reale</u>; $Y_B^- \in \mathbb{R}$.

All'ingresso si vede il parallelo dei due blocchi; su y_{A^-} ci sarà qualcosa di capacitivo; essendo i due bipoli (e i relativi modelli circuitali) uguali, devo fare in modo da vedere $y_{B^+} = y_{A^-}^*$, in modo che, sommando il circuito concentrato in B, in B^- si veda qualcosa di puramente reale.



$\Delta l \approx 0{,}412\ h$, circa sempre (esiste una formula esatta);

↳ devo fare in modo che $l + \underbrace{\Delta l + \Delta l}_{\text{2 capacità di Fringe}} = \lambda_g/2$: così si "eliminano le reattanze".

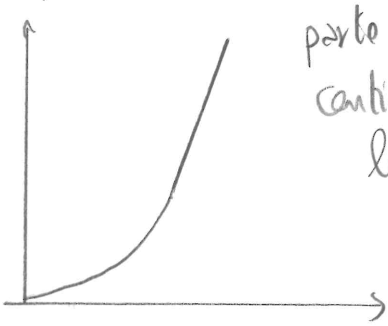
nota: $2\Delta l \approx h$.

Si può calcolare C come:

$$C = \frac{\sqrt{\varepsilon_{eff}}\ \Delta l}{c\ Z_{00}} \qquad c = 3E8\ m/s.$$

e G:

$$G \approx 90 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2.$$



parte quadratica, continua circa lineare.

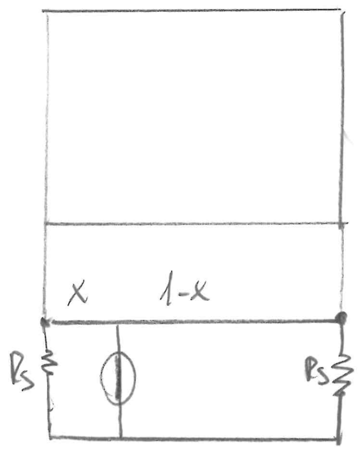
Si vede che $P_{irr} = G V^2$, P_{irr} calcolabile con l'integrale del dipolo. Si vede che:

Facciamo due conti: se $w/\lambda \simeq 1/3$, $G \approx 900\Omega$, per all'ingresso $900\Omega // 900\Omega \approx 400\Omega$: molto elevata. Come si fa a entrare con una linea regionevole?

Beh, nessuno ci vieta di "entrare a metà"; se $x = 1-x = \lambda_g/4$, il generatore vede: (suppongo $Z_0 = 10\Omega$)

$$R_{sx} = R_{dx} = \frac{(10\Omega)^2}{900\Omega} = 0{,}1\Omega$$

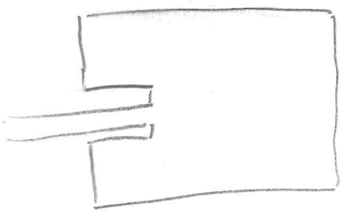
ma, con un certo x e $\lambda/2 - x$, si mette a posto!



↳ empiricamente, la soluzione per entrare con 50Ω è alimentare a 1/4 del patch.

Per realizzare ciò, 2 tecniche:

- monolitica: si fa una "recessione": tagli nella microstriscia

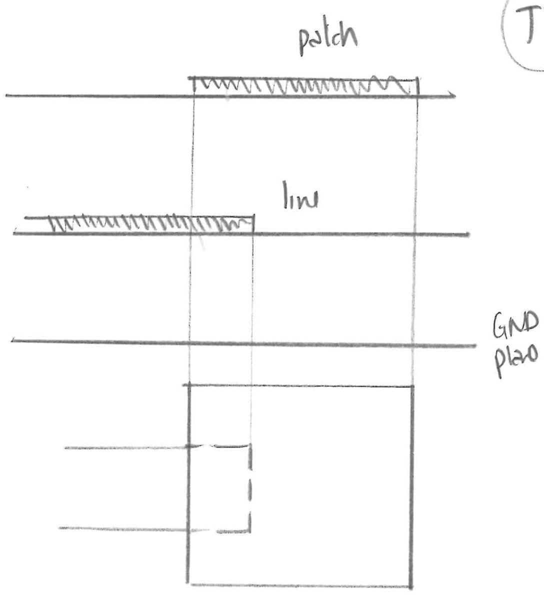


- alimentare in coax, facendolo passare attraverso il substrato.

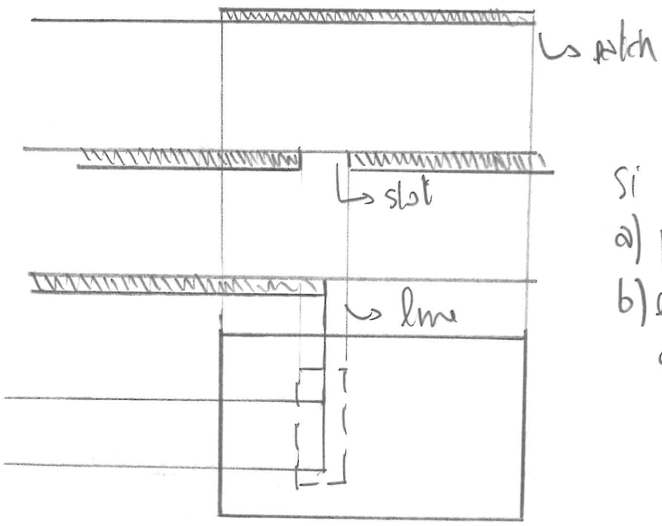
Altre configurazioni

Accoppiamento elettromagnetico: si tronca la linea di alimentazione; il troncamento genera un campo di frangia, che eccita il patch.

Nota: il patch è un po' come una cavità, con sopra e sotto del PEC, attorno del PMC.



Accoppiamento a fessure: si fa qualcosa di questo tipo:



si ha una slot, che

a) permette l'accoppiamento

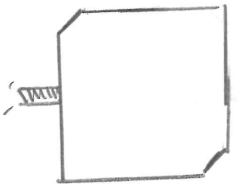
b) evita perturbazioni del d. di irradiazione dovute alle correnti della linea.

Altri patch:

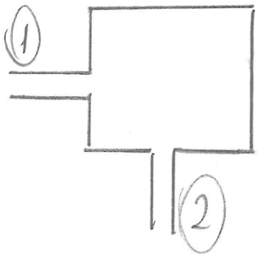
- circolare: simile al rettangolare
- anulare: dimensioni più ridotte! $\simeq \lambda/3$ (vantaggio se si han problemi di spazio)

Per la pol circolare:

- Rettangolo "smussato" a 45°



- si sfrutta il fatto che il diagramma di onda stazionaria al centro è nullo per dire che $S_{12} = S_{21} = 0$; le due "porte" non parlano, quindi si può "alimentare in quadratura e far" il patch, per dargli la pol. circolare.



Ciò si usa sui SAR, per capire, a seconda della polarizzazione che torna indietro, il tipo di materiale.

Volendo allargare la banda, si può mettere un patch parassita di dimensioni lievemente diverse, per avere un'impedenza più costante con f.

Schiera a scansione elettronica

Partendo per esempio da una schiera con fase relativa $\Phi = \phi$ di alimentazione, dunque broadside (per esempio). Si introduce uno sfasamento, $\varphi = (n-1)\Phi$; quando φ o Φ che sia variano si ha:

$\vartheta_s = \arcsin\left(-\frac{\Phi}{Kd}\right)$ → varia l'angolo di scansione.

Si ha una relazione tra Φ e Kd; questa equazione va "accoppiata" con la ben nota:

$Kd_{max} = \frac{N-1}{N} \frac{1}{1+|\sin(\vartheta_s)|}$ → dato ϑ_s l'angolo di scansione

Chiarro!

Vogliamo capire dunque come fare per effettuare variazioni di fase; la prima idea è uno sfasatore digitale, ossia uno sfasatore che introduce un Φ del tipo:

$\Phi = m\,\Phi'$ Φ' è un certo sfasamento, "m" un numero intero.

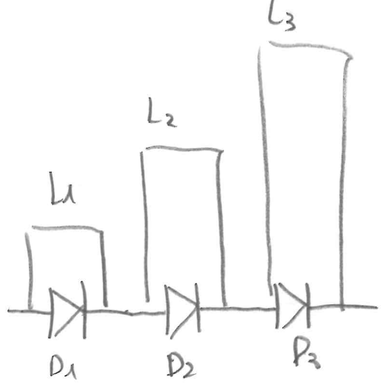
Il caso più comune è quello di avere:

$\Phi' = \frac{2\pi}{2^B}$: B è il "numero di bit dello sfasatore". Qui prendo 2π (range $[0; 2\pi]$), e lo divido in intervalli equispaziati di questo tipo.

Studiamo ora 2 implementazioni di ciò

Sfasatore a diodi

Un'idea per realizzare uno sfasatore è la seguente: a seconda del bias point del diodo (acceso/spento), si fa passare il segnale o per esso o per la microstriscia; si possono così ottenere sfasamenti multipli di $\lambda/4$.



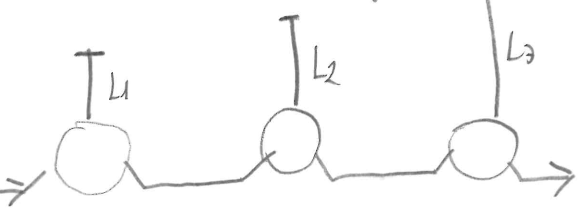
$L_1: \lambda/8$
$L_2: \lambda/2$
$L_3: \lambda/4$

Limiti: potenze/frequenze troppo elevate non si possono usare, a causa di diodi/microstriscia

Sfasatori a circolatori

Idea simile, implementazione diversa: a seconda della corrente sulla ferrite, i circolatori sono in verso orario o antiorario; in verso orario finiscono nelle guide (qua tutto è in guida per tollerare potenze/frequenze elevate), quindi vanno "avanti e indietro" (si trovano uno short), sfasandosi 2 volte.

$L_1 = \lambda/16$
$L_2 = \lambda/8$
$L_3 = \lambda/4$



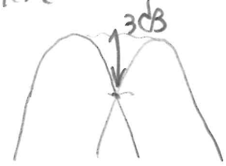
Questo sistema si può usare, ma a causa delle ferriti, consuma molto più di prima

Determinazione del numero di bit

Come si determina il numero di bit? Boh!

- se ho pochi scatti, da un lato ho sfasatori economici, dall'altro pochi fasci, dunque una copertura meno "costante"
- se ne ho troppi, gli sfasatori costano molto.

Idea: un parametro ottimale è un livello di intersezione tra i fasci di 3 dB: come un lobo scende di 3 dB, ho un altro fascio.



Dalle formule approssimate,

$$\vartheta_{3dB} \approx 0{,}88 \frac{\lambda}{L};$$

Come noto:

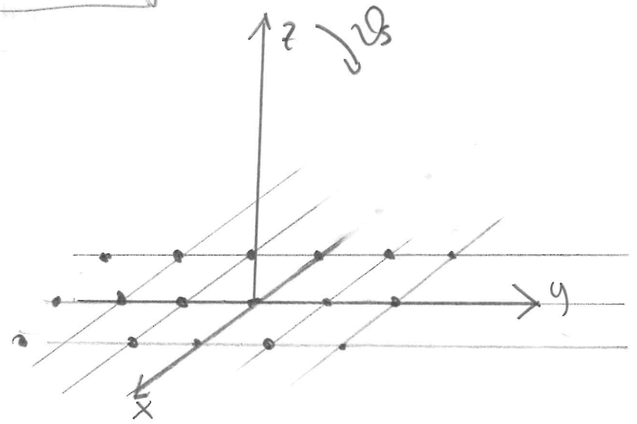
$$\sin\vartheta_s = -\frac{\Phi}{Kd}$$ un incremento di questo è: $\delta\vartheta_s \cdot \frac{\Delta\Phi}{Kd}$; $Kd = \frac{2\pi}{\lambda} d$

dove $\Delta\Phi = \frac{2\pi}{2^B}$; $|\Delta\vartheta_s| = \frac{\cancel{2\pi}}{2^B}\frac{\lambda}{\cancel{2\pi} d} = \frac{\lambda}{L}$

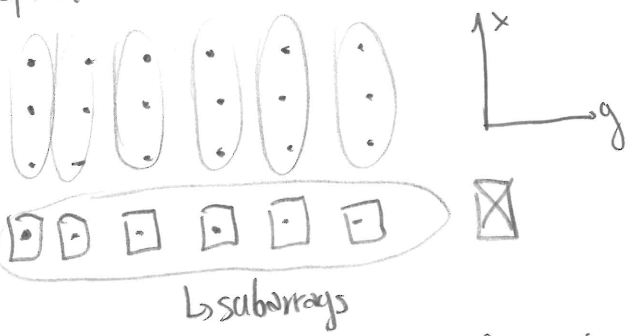
$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2^B d} = \frac{\lambda}{L} \Rightarrow L = Nd \Rightarrow \boxed{N = 2^B}$$

Schiere di schiere

Si consideri un sistema come questo:



questo si può vedere come:



Come una schiera di 6 elementi in verticale e 3 in orizzontale.

Ragionando in modo simile alla schiera normale, l'integrale di radiazione si discretizza, diventando:

$$A = \sum_{m,n} A_{mn} \exp\left[jK\underline{r}' \cdot \hat{R}\right]$$ ma qua siamo, rispetto al nostro riferimento, sul piano $z = 0$!

$$\underline{r}' = (m-1)\, d_x\, \hat{x} + (n-1)\, d_y\, \hat{y}$$ dove d_x è la distanza "orizzontale" tra 2 elementi, d_y quella verticale;

$$\hat{R} = \hat{x}\sin\vartheta\cos\varphi + \hat{y}\sin\vartheta\sin\varphi + \hat{z}\cos\vartheta \Rightarrow \underline{r}'\cdot\hat{R} = (m-1)\, d_x \sin\vartheta\cos\varphi + (n-1)\, d_y \sin\vartheta\sin\varphi$$

Come visto nelle aperture:

$u = \sin\vartheta \cos\varphi$;
$v = \sin\vartheta \sin\varphi$; $\Longrightarrow$ $\psi_1 \triangleq k d_x u$, $\psi_2 \triangleq k d_y v$

$$\hookrightarrow A(\psi_1,\psi_2) = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_{mn} \exp[j(m-1)\psi_1] \exp[j(n-1)\psi_2]$$

se $a_{mn}=1$ o comunque se son disaccoppiabili:

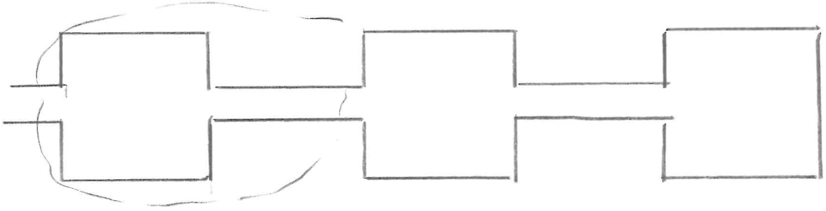
$$\hookrightarrow A(\psi_1,\psi_2) = \left[\sum_{m=1}^{M} \exp[j(m-1)\psi_1]\right]\left[\sum_{n=1}^{N} \exp(j(n-1)\psi_2)\right] = \frac{1}{MN} \frac{\sin\left(M\frac{\psi_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_1}{2}\right)} \frac{\sin\left(N\frac{\psi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_2}{2}\right)}$$

$\Longrightarrow$ qualcosa di simile all'apertura rettangolare.

Nota: volendo garantire l'assenza di grating lobes, si può lavorare sulle singole.

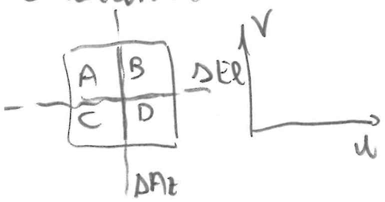
Le schiere di schiere non servono solo per studiare schiere planari: un'altra configurazione è:

Ciò si può per esempio usare su una schiera di patch di questo tipo:



questo schema è interessante perché abbassa anche l'impedenza!

Quadrihelix



ora si può determinare il d. di irradiazione!

Σ: tutti alimentati uguali! $\cos\left(\frac{\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2}{2}\right)$!

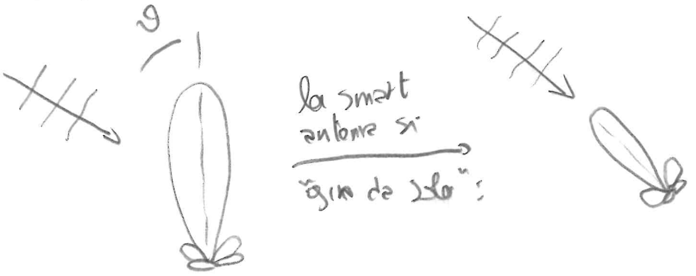
ΔEl: A e B uguali (+), C e D idem (−): $\cos\left(\frac{\psi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_2}{2}\right)$

ΔAz: il duale: A e C, B e D: $\cos\left(\frac{\psi_2}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_1}{2}\right)$

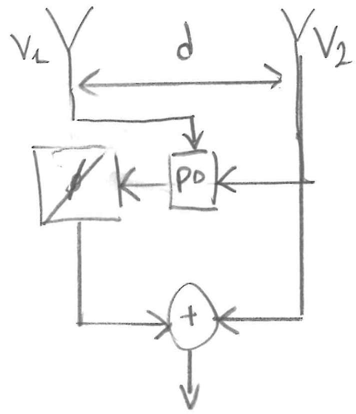
Questa è un'analisi dei d. di irradiazione nei vari modi.

Antenne adattative | smart antennas

Schiere adattative: "sentono" il fascio e autoscansionano il proprio d. di irra-diazione in tal senso, in tal direzione:



lo schema "ideale" è questo:



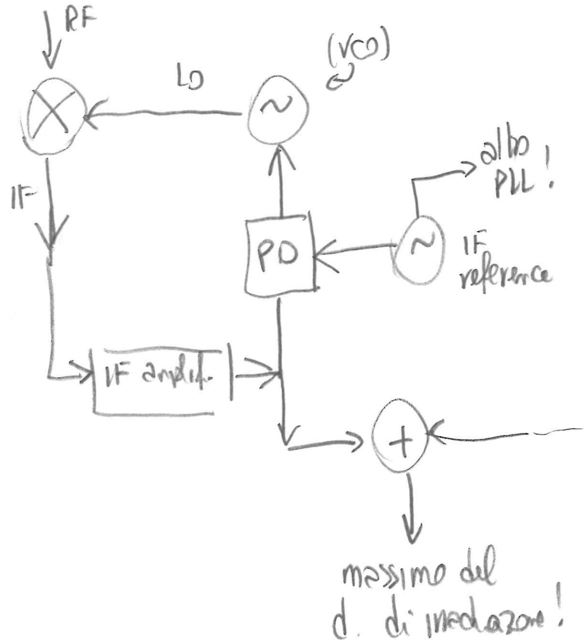
si ha che:

$V_2 = V_1 \exp(-j\varphi)$, $\varphi = Kd\sin\vartheta$

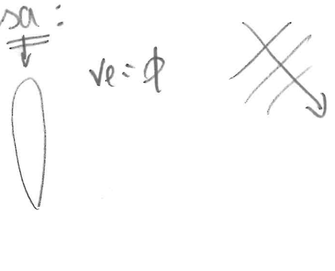
i segnali sono sostanzialmente uguali in modulo, non in fase; in questo modo, con uno sfasatore comandato, da un Phase Detector, si mette a posto in automatico.

Problema: questo schema lavora a RF, quindi il segnale a RF non è condizionato, e dà molto rumore. Uno schema più avanzato e utilizzabile è basato sull'eterodina: si down converte il segnale, e così si fa la sincronizzazione di fase con un PLL, ma alla IF, non a RF!

Questo si fa su ciascuno degli elementi.



Il segnale correttivo fa in modo da portare in fase i 2 radiatori, o meglio V_1 e V_2, ruotando i fasci:



uno riceve più dell'altro! se annullo φ, allora ruoto il fascio!

Misure su antenne

Per caratterizzare un'antenna, è fondamentale conoscere 5 cose:
- guadagno massimo
- polarizzazione
- $|d(\vartheta, \varphi)|$
- fase
- adattamento

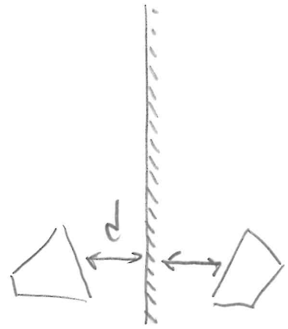
Le varie misure devono essere tali da avere/emulare le condizioni:

$$\begin{cases} R > \dfrac{2D^2}{\lambda} \\ R \gg \lambda \quad (\text{p. es. } 10\lambda) \end{cases}$$

L'ambiente deve essere privo di riflessioni.

Misure di adattamento

2 tipi di effetti: quello "da modello circuitale", che si risolve con un adattatore, ma anche gli effetti del campo di misura: se "torna indietro" della potenza, ho disadattamento. Se si hanno pareti, si applica il th. dell'immagine, ed è come avere 2 antenne. La potenza ricevuta su quella vera è:



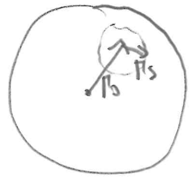
$$\frac{P_R}{P_T} = \frac{\lambda^2 G^2(\vartheta)}{\left[4\pi(2d)\right]^2} = |\Gamma_s|^2.$$

$$\hookrightarrow \boxed{|\Gamma_s| = \frac{\lambda G(\vartheta)}{8\pi d}}$$

HO 2 CONTRIBUTI DI DISADATTAMENTO:

$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_s$ ⤳ la cui fase NON È NOTA!

$\hookrightarrow$ disadattamento "circuitale".



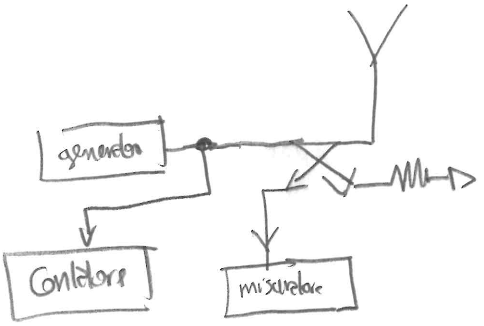
Per desensibilizzare la misura da Γ_s:
- uso h molto grande (non sempre possibile)
- uso $g(\vartheta)$ piccolo: punto i rigolo (?) alla parete
- Caratterizzo Γ_s: facendo 3 misure, identifico il "cerchio", quindi il suo centro Γ_0; Γ_s sarà l'altro.
- filtraggio time domain: prendo la misura di Γ (che sarà un fasore $\Gamma(\omega)$), la antitrasformo, e prendo solo i primi picchi: quelli più avanti nel tempo sono arrivati dopo, perché vengono dalla parete; ritrasformo solo la parte "buona" e ottengo $\tilde{\Gamma} \approx \Gamma_0$

Ci sono normative: da 30 a 1000 MHz, si devono soddisfare:

$$\begin{cases} d > C_1 G(\vartheta, \varphi)\lambda \\ d > C_2 W \rightarrow \text{max. dim. antenna} \end{cases}$$

C_1, C_2 da norma.

Schema di misura:

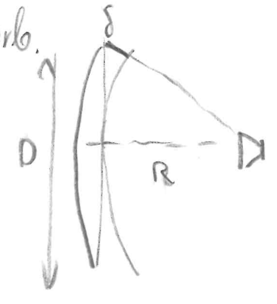


Calibro prima cortocircuitando i morsetti, e misuro; collego poi la AUT, e misuro il rapporto tra il segnale ricevuto e quello di rif.

Misure del d. di radiazione.

Serve una seconda antenna, "sonda"; servono ipotesi:
- campo lontano
- no riflessioni
- campo uniforme

Il campo uniforme serve perché noi misuriamo il rapporto tra campo ricevuto e incidente, quindi quello incidente dobbiamo conoscerlo.



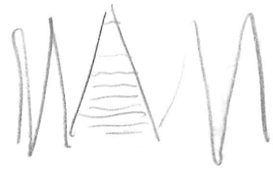
Errore di fase: se $\delta < \lambda/16$, c'è poca distorsione.

$$R^2 + \frac{D^2}{4} = (R+\delta)^2 = R^2 + 2R\delta + \cancel{\delta^2} \to R = \frac{D^2}{8\delta} > \frac{D^2}{8\lambda/16} = \frac{2D^2}{\lambda}$$

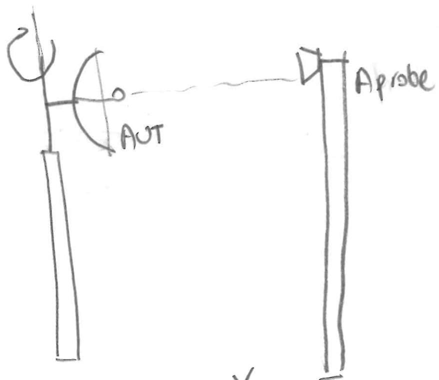
Altezza a cui si posizionano le antenne: angolo θ rispetto all'asse tale per cui $\theta \geq \theta_0$, θ dello zero del d. di irr.

$$\theta_0 \approx \frac{\lambda}{D} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{h}{\frac{R}{2}}\right) = \arctan\left(\frac{2h}{R}\right) \to \frac{2h}{R} \gg \frac{\lambda}{D} \to h \gg \frac{\lambda R}{2D}$$

Se ho un'antenna non direttiva (AUT) e interferenza da terreno,
- o metto la probe sul massimo di interferenza (int. costruttiva)
- o uso degli assorbitori di campo sul terreno: elementi sfrangiati con dissipazione. La punta si adatta all'aria e man mano che l'onda procede si attenua



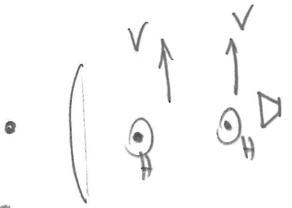
Come si fa la misura? Si fa ruotare la AUT attorno all'asse del sostegno, ottenendo $G(\theta)$; ruotando poi attorno all'asse del "paraboloide" si varia φ, e, rifacendo la misura da θ, si ottengono vari tagli.



NOTA: quando si ruota φ, lo si deve fare per entrambe le antenne: altrimenti, ho disadattamento di polarizzazione!

Nota: si possono far misure di copolarizzazione e di crosspolarizzazione!

Se entrambe le antenne sono Verticali, quando faccio ruotare il θ della AUT, misuro con copol. H.



Ver	Ver	copol H
Ver	Horiz.	crosspol H
Hor	Ver	Xpol E
Hor	Hor	copol E

$$\Longrightarrow F(\theta, \varphi) = F_H(\theta)\cos\varphi\,\hat{\varphi} + F_E(\theta)\sin\varphi\,\hat{\theta}$$

???

Slant range: invece che il "elevated range", una soluzione è lo slant range: range obliquo.

Il grande vantaggio di ciò è che la misura sul terreno è trascurabile, perché il sistema antenna + immagine è molto vicino, quindi la "schiera" troppo poco direttiva.

Questo si fa soprattutto per motivi economici / edilizi: meglio costruire 1 torre che 2.

Misure di guadagno

L'equazione di Friis ha una forma del tipo:

$P_r = P_t + G_T + G_r - \alpha_s \qquad G_T = G_T(\vartheta)$

Si ha:

$G_T = g_T(\vartheta) - G_0$ e a noi serve misurare G_0.

proponiamo alcuni metodi per farlo.

Metodo di sostituzione

Posizionata l'antenna sul massimo si ha: (situazione 1)

$P_{r1} = P_T + G_{max} + G_S - \alpha_S$

Sit. 2: sostituisco la AUT con un'antenna nota

$\hookrightarrow P_{r2} = P_T + G_S + G_R - \alpha_S \implies P_{T1} = P_{T2}$

$\rightarrow P_{r1} - G_{max} - \cancel{G_S} + \cancel{\alpha_S} = P_{r2} - \cancel{G_S} - G_R + \cancel{\alpha_S} \rightarrow G_{max} = (P_{r1} - P_{r2}) + G_R$

Metodo delle 2 antenne

Se non si avesse una terza antenna a disposizione, si considerano 2 antenne uguali:

$P_{r1} = P_T + 2G - \alpha_S - \alpha_c \rightarrow$ att. dei cavi. (Sit 1)

Si collegano (Sit. 2) i cavi tra loro:

$P_{r2} = P_t - \alpha_c$

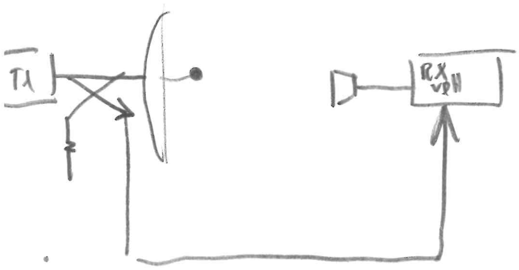
$\hookrightarrow P_{r1} - P_{r2} = 2G_S - \alpha_S \rightarrow G_S = \frac{1}{2}(P_{r1} - P_{r2}) + \alpha_S$ (deve esser >0)

Trucco: non avendo 2 antenne a disposizione, si usi un'antenna + la sua immagine!

$\Delta\Gamma = \frac{G\lambda}{8\pi h}$, tallo noto trame G, si filtra nel tempo.

Misure di fase

Per far le misure di fase si posson usare ricevitori vettoriali; serve però avere una fase di riferimento; questa si prende con un coupler; ciò è utile, per trovare il centro di fase.



Metodo alternativo: canale di riferimento con sfasatore e attenuatore; si fa la differenza tra i 2 segnali e, quando la si minimizza, la fase è quella misurata!

Misure di polarizzazione

Dato un voltmetro vettoriale, con 1 conde di riferimento e 2 ricevitori, si misurano in modulo e fase le 2, e questo porta all'ellisse di polarizzazione.

Alternativa: spinning dipole!
Un dipolo ha buona pol. lineare; si usa una sonda a dipolo rotante: il dipolo ha buona pol. lineare e così si misura il campo.
Questa è ellittica; se i semiassi coincidono, circolare; se un semiasse è 0, lineare.

Misure al chiuso

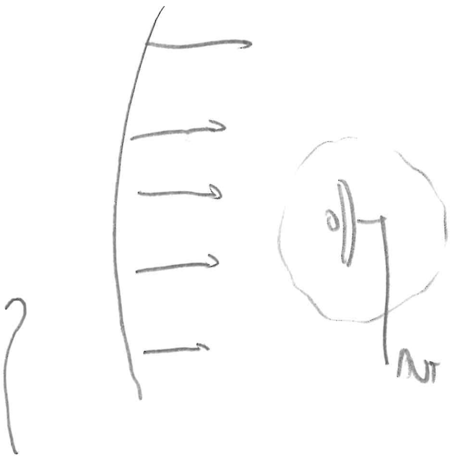
Camere anecoiche: piene di coni , di poliuretano espanso, con all'inizio (verso la punta) solo poliuretano, poi andando in giù sempre più grafite (per adattare, quindi evitare riflessioni).

$$\sqrt{\varepsilon_r} \approx 1-0{,}2 \longrightarrow \Gamma \approx -0{,}1 = -20\ dB$$

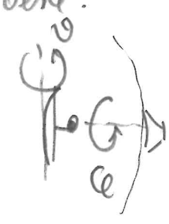
Ma, la camera anecoica può esser piccola: risolte le riflessioni, restano altri problemi!

Metodo del compact range

Idea: far field = onda piana: dobbiamo mostrare alla AUT un'onda piana!
Ciò si fa usando un paraboloide 3÷4 volte più grande della AUT: ciò evita di far avere distorsione ai bordi e errore di fase.
Per lo scattering dai bordi, si possono o fare delle serrations (zigzagature), o dei rolling edges; oggi si usano serrations FITTE.



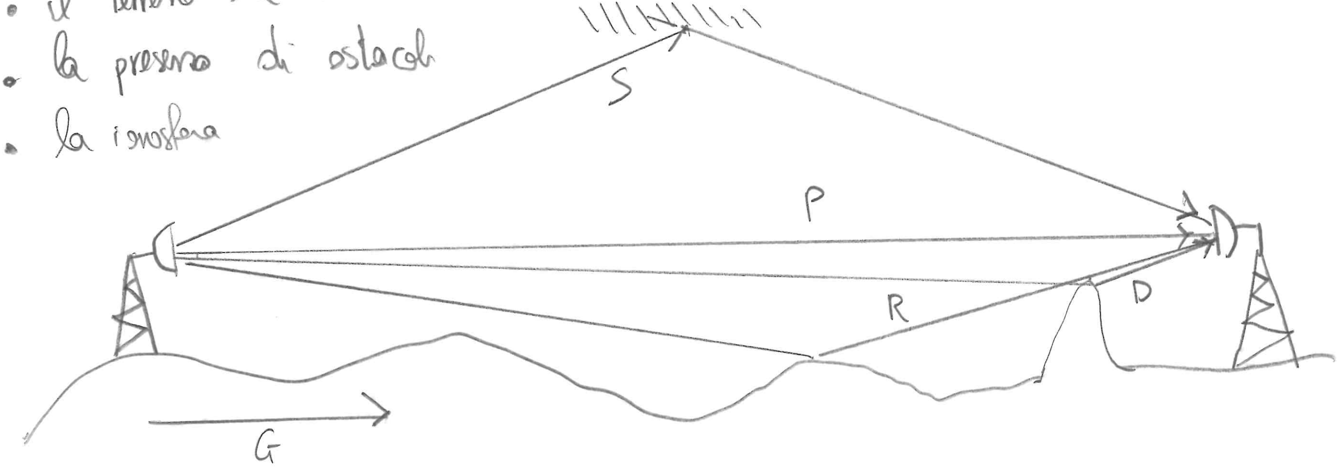
NFFF: Near Field Far Field
È un metodo basato sul th. di eq.: si consideri un piano e, invece di far ipotesi sul campo che vi è sopra, lo si misuri! Noto il campo sul piano si applica il th. di equivalenza, si fa insomma a 3 sorgenti. Si fa una griglia su questo piano, si determinano i valori del modulo del campo. Passi di $\lambda/4$ van bene.
Estensione: farlo anche "dietro", e usare coordinate polari.
La sonda ha pol. lineare: faccio 2 misure, e trovo pol. E e H. Centri di rotazione di sonda e AUT devon coincidere: regime delle sorgenti costante.



Propagazione delle onde elettromagnetiche

Quando del campo si propaga da un'antenna a un'altra, le condizioni sono estremamente variabili:

- l'indice di rifrazione n varia col clima
- il terreno ha conducibilità e ε_r che dipendono dalla stagione, dal clima...
- la presenza di ostacoli
- la ionosfera



Ci sono 5 contributi fondamentali:

- P: campo primario
- R: campo riflesso sul terreno
- D: campo diffratto (scatterato) da ostacoli
- G: onda di terra
- S: sky wave (onda di cielo): ionosfera

Analizziamo i contributi nel dettaglio.

Campo diretto

È il campo che vi sarebbe se le antenne fossero nello spazio libero. È il contributo principale, quando le antenne sono in vista ottica. È il contributo della formula di Friis:

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{\lambda^2 G_r G_T}{(4\pi D)^2} \quad \text{ricordando che} \quad G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A \implies \frac{P_r}{P_T} = \frac{\lambda^2 \left(\frac{4\pi}{\lambda^2}\right)^2 A_r A_T}{(4\pi D)^2} = \frac{A_r A_T}{(D\lambda)^2}$$

Si vede che, per $f \to$ aumenta, λ decresce, P_r aumenta!

Spesso questa si mostra in dB.

Altra formula FONDAMENTALE: come noto,

$$|\underline{S}| = \frac{|\underline{E}|^2}{Z_0}; \quad |\underline{S}| = \frac{P_T G_T}{4\pi R^2} \quad ; \ Z_0 = 120\pi$$

$$\hookrightarrow |\underline{E}| = \sqrt{Z_0 |\underline{S}|} = \sqrt{\frac{P_T G_T Z_0}{4\pi R^2}} \approx \boxed{5{,}5 \frac{\sqrt{P_T G_T}}{R}}$$

(formule che valgono in far field)

dove si definisce EIRP (Equivalent Isotropic Radiated Power) la:

$EIRP = P_T \times G_T$

la potenza che il radiatore isotropico dovrebbe avere per generare lo stesso campo nello spazio.

ERP: Effective Radiated Power: EIRP−2 dB: è la potenza irradiata da un dipolo a mezz'onda, per aver campo uguale (il dipolo mezz'onda ha $G \approx 2{,}1\,dB$).

Campo riflesso.

Come detto, i contributi di campo ricevuto sono molteplici: c'è l'onda riflessa, l'onda di terra, etc.. Si ha:

$$\frac{E}{E_0} \simeq \underbrace{1}_{\text{onda primaria}} + \underbrace{R\exp(j\Delta)}_{\text{onda riflessa}} + \underbrace{(1-R)\exp(j\Delta)A}_{\text{onda di terra}} + \dots$$

R = coeff. di riflessione (Γ)

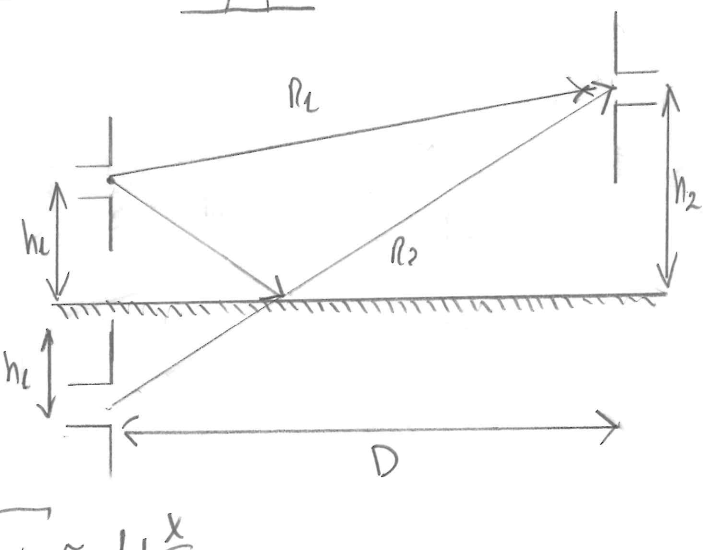
A: attenuazione dell'onda superficiale

Δ: differenza di fase tra i cammini di onda diretta e riflessa

R (o Γ che sia) è dipendente dai coefficienti di Fresnel: il problema è di incidenza obliqua, quindi, se l'incidenza è radente ($\vartheta \approx 90°$), $\Gamma \approx 1$.

Se $\Gamma \approx 1$, l'onda di terra è trascurabile.

Studiamo la geometria del problema:



si ha:

$$R_1 = \sqrt{D^2 + (h_2-h_1)^2} = D\sqrt{1+\frac{(h_2-h_1)^2}{D^2}}$$

$$R_2 = \sqrt{D^2 + (h_2+h_1)^2} = D\sqrt{1+\frac{(h_2+h_1)^2}{D^2}}$$

$$\hookrightarrow R_1 - R_2 = D\left[\sqrt{1+\left(\frac{h_2-h_1}{D}\right)^2} - \sqrt{1+\left(\frac{h_2+h_1}{D}\right)^2}\right] \qquad \sqrt{1+x} \approx 1+\frac{x}{2}$$

$$\hookrightarrow \approx D\left[\left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(\frac{h_2-h_1}{D}\right)^2\right) - \left(\cancel{1}+\frac{1}{2}\left(\frac{h_2+h_1}{D}\right)^2\right)\right] = \frac{1}{2}D\frac{4h_1h_2}{D^2} = \frac{2h_1h_2}{D} = \Delta$$

Il campo totale è:

$$E_{totale} = E_{primario} + E_{riflesso} = E_{primario}\left(1+\frac{E_{riflesso}}{E_{primario}}\right) \approx E_{primario}\left(1+\Gamma\exp(-jk\Delta)\right) =$$

dove, dai grafici, $\Gamma = -1$

$$\hookrightarrow = \exp\left(-jk\frac{\Delta}{2}\right)E_{primario}\left[\exp\left(jk\frac{\Delta}{2}\right) - \exp\left(-jk\frac{\Delta}{2}\right)\right] = 2E_{primario}\exp\left(-jk\frac{\Delta}{2}\right)\sin\left(k\frac{\Delta}{2}\right);$$

$K = \frac{2\pi}{\lambda}$; $E_{primario} = 5{,}5 \frac{\sqrt{P_T G_T}}{D}$

$\hookrightarrow E_{Totale} = 5{,}5 \frac{\sqrt{P_T G_T}}{D}\, 2 \sin\left(\frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda D}\right)$ dove talvolta il seno è approssimabile con l'argomento.

NOTA IMPORTANTE: se approssimo il seno, $\Rightarrow$ $\frac{P_R}{P_T} = \frac{G_T G_R \lambda^2}{(4\pi R)^2}$ di solito; ora:

$\frac{P_R}{P_T} \approx G_R G_T \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2 R^2}\left(\frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda R}\right)^2$ $\propto R^{-4}$ (modello pessimistico) che non conta lo scattering l'altro.

$E_{totale} \approx 5{,}5 \frac{\sqrt{P_T G_T}}{D^2}\frac{4 h_1 h_2 \pi}{\lambda}$ $\rightarrow$ 40 dB/dec di decresata!

Come mai? Colpa del seno: il campo varia di intensità a causa del valore dell'elevazione, che fa variare l'interferenza. Scegliendo un h idoneo, però, posso aumentare la potenza, scegliendo un punto in cui il campo ha interferenza costruttiva.

L'int. costruttiva c'è per il massimo del seno: $\sin(x) = 1$, $x = \frac{\pi}{2}$

$\hookrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{2 h_1 \pi h_2}{\lambda D} \rightarrow h_2 = \frac{\lambda R}{4 h_1}$

Nota: se un'antenna è vicina a terra, il modello funziona: si generano infatti delle correnti indotte che irradiano (interessante spec. per l'antenna in Tx). L'altezza dell'antenna varia: si ha una altezza effettiva (NON efficace!):

$h_{effettiva} = \sqrt{h_0^2 + h^2}$ h_0 ha una formula.

Cenni al ILS

ILS: Instrumental Landing System: si ha un'antenna (di solito dipolo) a 6 metri di altezza, $\lambda \approx 2 \div 3$ m. $h >> \lambda$, dunque il sistema dipolo + terreno è una schiera con molti grating

Lobes: $A = \sin\frac{\psi}{2}$ $\psi = k d \sin\vartheta$, $d = 12m$ $\lambda = 2m$ $\longrightarrow \sin\vartheta_0 \approx \frac{\lambda}{d} \Rightarrow \vartheta_0 \approx 10°$.

Questo è lo zero più basso; l'aereo deve far in modo tale da "stare nello zero", per atterrare.

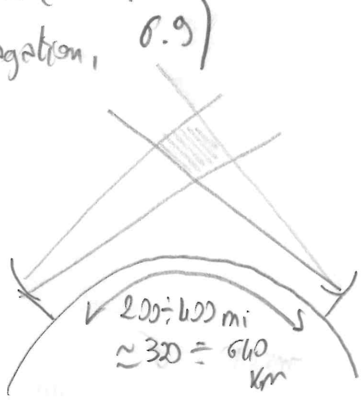
Propagazione troposferica

L'atmosfera terrestre è divisa in vari strati; di questi, la troposfera è quello più basso, dove però quindi l'atmosfera è ricca di gas; ciò nonostante, la propagazione in troposfera ha delle particolarità: a seconda dell'altezza, i gas sono più o meno rarefatti, quindi l'indice di rifrazione n è non omogeneo.

I fenomeni cui le onde elettromagnetiche sono soggette sono in sostanza 3:
- assorbimento
- diffusione da precipitazioni
- rifrazione

L'assorbimento è dovuto all'interazione tra gas e onde; è variabile con f anche se solo sopra i 10 GHz (assorbimento prima da vapore d'acqua, poi da ossigeno) vi sono dei picchi. Questi "picchi" sono tali da attenuare molto il campo: volendo propagare solo in regioni limitate, ciò si potrebbe pure sfruttare, anche se di solito ciò è svantaggioso.

La diffusione (scattering) ha vari contributi: uno può essere la pioggia (la quale assorbe anche l., 6.9) uno è il troposcatter (riferimento: Collin - Antennas and radiowave propagation,



Idea: propagare sopra l'orizzonte, mediante il seguente trucco: si han 2 antenne, non in vista, i cui fasci "overlappano" a una quota di 3÷8 km da terra; qui si ha un fenomeno di scattering dovuto a irregolarità/turbolenze, quali nuvole più dense. Avendo antenne con guadagni elevati, dunque molto grandi, si riesce a captare lo scattering con l'antenna in ricezione.

$f \in [200 \text{ MHz} \div 10 \text{ GHz}]$:
- 200 MHz: se no le antenne son troppo grandi
- 10 GHz: sopra, le perdite diventan troppo ingenti.

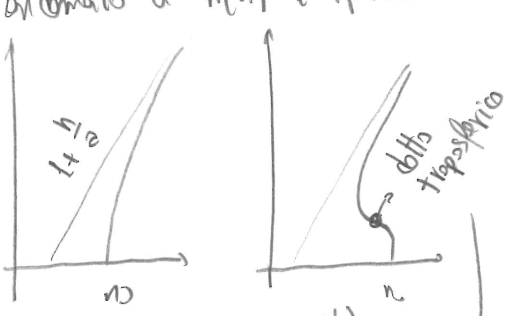
Sopra i 10 km, l'aria è troppo rarefatta per fare scattering non trascurabile.

Altro effetto: la rifrazione da atmosfera. Come accennato, la troposfera, ossia l'atmosfera fino a 10 km, è non omogenea: varia con l'altezza; a bassa altitudine si ha più umidità, quindi un n maggiore.

Ciò che si fa è usare un indice di rifrazione modificato con l'altezza: $n' = n + \frac{h}{a}$

vale la rel.: $\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{dn'}{dh} \rightarrow \frac{\vartheta_1^2 - \vartheta_2^2}{2} = n(h_1) - n(h_2) \longrightarrow$???

L'andamento di $n(h)$ è iperbolico:



(a) (b)

(a) è un caso di condizioni normali di atmosfera e bassa umidità. L'effetto è che, poiché (ott. geom.) il raggio tende ad abbassarsi verso la zona a n maggiore, si può considerare un raggio della Terra equivalente $R' = KR$, $K \approx \frac{4}{3}$, $R = 6380$ km

(b): superrifrazione: a causa di una forte umidità al suolo o di afflussi di masse d'aria fredda che sollevano dal suolo l'aria calda, $\nabla n'$ cambia di segno, e le normali al fronte d'onda sono molto incurvate.

→ onde VHF e UHF son propagate a lunghissima distanza: parte dell'onda diventa cilindrica e si attenua meno.

Propagazione ionosferica

La parte superiore della atmosfera, quella con molto gas rarefatto, ha più probabilità di essere ionizzata: meno particelle, meno "incontri", dunque meno possibilità di ricombinazione di elettrone e ione. Uno ione ha carica eguale e opposta all'elettrone, ma massa pari a quella del nucleo, quindi molto maggiore: nella nostra approssimazione, solo gli elettroni saran eccitati da una forza tale da farli partecipare alla conduzione!

Considero il bilanciamento delle forze:

$\underline{F} = m\underline{a} = \underline{J} - \underline{v}m\nu$ $\quad$ ν frequenza di collisione

$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt}$; $\underline{J} = -e\underline{\mathcal{E}}$; $\Rightarrow m\frac{d\underline{v}}{dt} = -e\underline{\mathcal{E}} - \underline{v}m\nu$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} jm\omega\underline{V}(\omega) = -e\underline{E} - \nu m\underline{V}(\omega) \rightarrow V(\omega)\left[jm\omega + \nu m\right] = -e\underline{E}$$

$$\hookrightarrow \underline{V} = \frac{-e\underline{E}}{m(j\omega+\nu)}$$

Si ha, per l'elettrone in moto, una corrente di convezione $\underline{J}$:

$\underline{J} = e\underline{v} \Rightarrow Ne\underline{v}$ $\quad$ (N elettroni)

Dall'eq. del rotore:

$$\nabla\times\underline{H} = j\omega\epsilon\underline{E} + \underline{J} = j\omega\epsilon\underline{E} + Ne\underline{v} = j\omega\epsilon\underline{E} + Ne\frac{-e\underline{E}}{m(j\omega+\nu)}$$

$$\rightarrow \nabla\times\underline{H} = \left[j\omega\varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(j\omega+\nu)}\right]\underline{E} = j\omega\tilde{\varepsilon}_r\varepsilon_0\underline{E}; \text{ dove!}$$

$$\tilde{\varepsilon}_r = \left[1 + \frac{Ne^2}{j\omega m\varepsilon_0(j\omega+\nu)}\right] = \left[1 + \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\omega(-\omega+j\nu)}\right] = \left[1 - \frac{Ne^2}{m\omega\varepsilon_0(\omega-j\nu)}\right]$$

se definisco $\omega_p^2 \triangleq \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$

$$\hookrightarrow \tilde{\varepsilon}_r = \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega-j\nu)}\right]$$

Ipotesi di plasma freddo: $|\omega| \ll |\nu|$ $\Rightarrow \tilde{\varepsilon}_r \approx \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right]$

A queste condizioni, ω_p è:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0} = \frac{f_p^2}{4\pi^2} \longrightarrow f_p = \sqrt{\frac{4\pi^2 e^2}{m\varepsilon_0}N} \approx 9\sqrt{N}$$

Cosa capita al plasma, al variare di ω?

- per ω molto grande, il plasma si comporta in pratica come lo spazio libero;
- per ω piccole (ma in cui valga ancora l'ipotesi di plasma freddo), ε_r diminuisce, fino a diventare negativo!

Poiché $K = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = K_0\sqrt{\varepsilon_r}$, si ha un termine puramente immaginario! Solo attenuativo: ONDA EVANESCENTE.

↳ quanto vale il coefficiente di riflessione?

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$ ma, se uno dei 2 è immaginario, si ha: $\frac{Z_2 - jZ}{Z_2 + jZ}$ => modulo unitario!

La ionosfera, a questa condizione, è uno specchio!

Nota: ciò non tiene in conto la presenza del campo magnetico terrestre! Se si tenesse in conto, la ε della ionosfera diventerebbe diadica, $\underline{\underline{\varepsilon}}$, introducendo anisotropie. Un'onda piana si scomporrebbe in 2 modi: "onda ordinaria" e "onda straordinaria", che generano interferenze, fading (onde a p. circolare, con rotazioni a v_f diverse (opposte)) => effetto Faraday

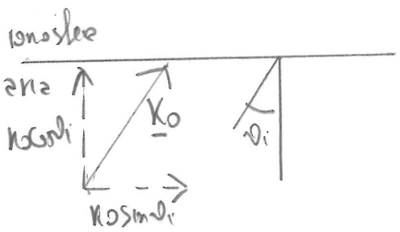
Nota! la ionosfera non è un "passaggio brusco", dunque ω_p non è costante! Esistono vari strati di ionosfera, che dipendono dall'altitudine z. A seconda dell'altitudine l'aria è più o meno rarefatta, quindi varian N e ν.

Ci son strati F, E, D; F è in F_1/F_2, e son quelli più alti; E è poco più basso; D è lo strato più basso, ed è quindi quello con minore interazione con la radiazione solare: qui inoltre le collisioni sono frequenti! $\nu \approx \omega$: D è uno strato di plasma caldo.

$$\tilde{\varepsilon}_{r,caldo} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - j\nu)}$$ e, se $\nu > \omega$, $\frac{\omega_p^2}{-j\omega\nu}$ sia attenuazione, sia propagazione! $K \in \mathbb{C}$!

L'incidenza sulla ionosfera sarà obliqua; si può approssimare a brusca la discontinuità, e dire che:

$$\begin{cases} K_{t0} = K_0 \sin\vartheta_i \\ K_{z0} = K_0 \cos\vartheta_i \end{cases}$$



Per le condizioni al contorno,
$$\boxed{K_{t0} = K_{t1}}$$

A noi non interessa propagare nel plasma, ma riflettere: $K_{z1} = 0$!

↳ $K_{z1} = 0 \Rightarrow K_{t1} = K_{t0} = \cancel{K_0}\sin\vartheta_i = \cancel{K_0}\sqrt{\varepsilon_{r1}}$

elevo al quadrato e ho:

$$\sin^2\vartheta_i = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \longrightarrow \boxed{\frac{\omega_p^2}{\omega^2} = \cos^2\vartheta_i} \Longrightarrow \boxed{\omega = \omega_p \sec(\vartheta_i)}$$
(MUF)

Questa è la max. freq. che posso usare per incidere obliquamente e riflettere! ≈ 30 MHz.
Nota: non posso "andar troppo basso", perché per incidenza normale buco la ionosfera!

Onda di terra

L'onda di terra nasce dalla situazione "antenne a un'altezza h dal suolo piccola rispetto λ". Dal momento che, inoltre, il terreno non è un PEC, parte dell'energia è trasmessa al terreno e vi si propaga. Si tratta di un'onda cilindrica $\left(\propto \frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$, e si mantiene per distanze brevi ("duale" alla ionosfera, solo per distanze lunghe).

Il fattore di attenuazione dipende da: frequenza, terreno, polarizzazione.

$\hookrightarrow R = \dfrac{\sin\theta - z}{\sin\theta + z}$ $\longrightarrow$ il Γ del terreno.

Per sfruttare questo, servono grafici di progetto (4.13): a seconda di f, si può con essi fare un link budget, con $P_{T0} = 1kW = 60\,dBm$. L'antenna è un monopolo (l'unica: se no le altezze/lunghezze son esagerate).

Formula "dell'orizzonte".

Come si può valutare la distanza dell'orizzonte? Si ha un triangolo di questo tipo:

Collegamento su terra sferica

Il problema della propagazione su terra sferica è non banale: si deve anche tener conto degli effetti di diffrazione da sfera. La diffrazione permette la propagazione del campo anche senza la condizione di vista ottica, a patto di conoscere l'attenuazione!

Quando le altezze sono sotto un certo limite, il grafico non si può più usare (4.15), e se ne deve usare un altro: (4.16). 4.16 è "indipendente" dall'altezza delle antenne, ma bisogna conoscere gli orizzonti! 3 distanze: da A_1 all'orizzonte, da A_2 all'orizzonte, e la distanza tra i 2 orizzonti.

$d_{horizon} = \sqrt{2 \times R_{terra}\, h_{antenna}}$

Diffrazione - Teoria di Fresnel

Si immagini di trovarsi in vista ottica, ma in una città: l'ambiente urbano è ricco di ostacoli. La vista ottica non è una condizione sufficiente per non avere perdite a causa della presenza di elementi diffrangenti.

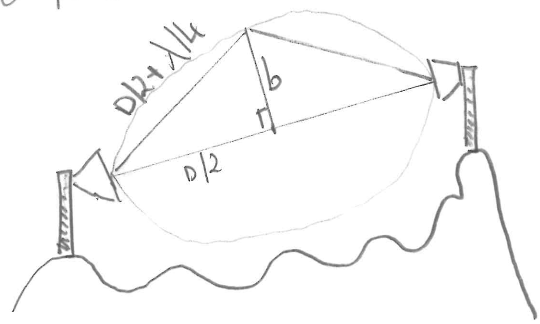
Il fatto che un ostacolo sia effettivamente "fastidioso", si determina studiando le zone di Fresnel.

Gli ellissoidi di Fresnel sono i luoghi dei punti per cui la somma delle distanze dai fuochi, più multipli di $\lambda/2$, sono costanti:

$$R_1 + R_2 = R + m\frac{\lambda}{2}$$

Se vi sono ostacoli nell'ellissoide con $m=1$, allora vi sono problemi.

Determiniamo il raggio di un ellissoide di Fresnel: b.



$$\left(\frac{D}{2}+\frac{\lambda}{4}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + b^2$$

$$\hookrightarrow \cancel{\left(\frac{D}{2}\right)^2} + \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 + \cancel{2}\frac{D}{\cancel{2}}\frac{\lambda}{4} = \cancel{\left(\frac{D}{2}\right)^2} + b^2$$

se $\lambda^2 \approx \phi$,

$$b^2 \approx \frac{D\lambda}{4} \rightarrow b \approx \frac{\sqrt{\lambda D}}{2}$$

Cosa capita?

- Se l'ostacolo è fuori dal I° ellissoide di Fresnel, tutto bene;
- se l'ostacolo è esattamente sulla congiungente, ho 6 dB di attenuazione: è (per il th. di equivalenza), mettere qualcosa (una sup. metallica) che "dimezza il campo", riduce di 6 dB la potenza, poiché l'intervallo di integrazione è di fatto dimezzato.

Considerando x_0 la posizione dell'ostacolo rispetto alla congiungente ($x_0 < 0$: ostacolo non in vista ottica), si ha ciò: si pensa di aver uno step, ma non è così.

Le oscillazioni sono dovute al contributo di diffrazione interferente: questo si ha se l'ostacolo è nella prima zona di Fresnel.

L'intervallo per cui la fase è stazionaria, si dimostra, è proprio la prima zona di Fresnel: modificando il campo qui, si modifica violentemente l'integrale.
Le oscillazioni sono interpretabili con la diffrazione ai bordi: gli effetti del II° ordine.

Diffrazione da spigolo vivo

Per $x \to x_0$, come si può vedere dai nomogrammi, $L \to 6$ dB (4.18)
d_1 è la distanza minore tra ostacolo e una delle 2 antenne.
"h": la clearance! "x_0" !
Data configurazione altimetrica, si deve tener conto di diffr. multiple.

Per studiare la copertura esistono in realtà grafici del CCIR (4.20), che permettono di determinare il campo a una certa distanza nel 50% dei casi.
Δh: ripple del terreno scartando il 10% di più alti e più bassi (dei "valori tabulati"). Maggiore è Δh, più ostacoli ha, peggio è.
Ci son grafici con correzioni.

Metodo di fase stazionaria

Prima di tutto, definiamo l'obiettivo: stimare integrali del tipo:

$$\int_a^b A(x)\exp(j\,\phi(x))\,dx$$

Nella fattispecie, si parla di "valutazione asintotica", dal momento che la forma è del tipo:

$$I(k)=\int_a^b A(x)\exp(j\,k\,\phi(x))\,dx\,,\quad k\in\mathbb{R}\,,\quad k\to\infty$$

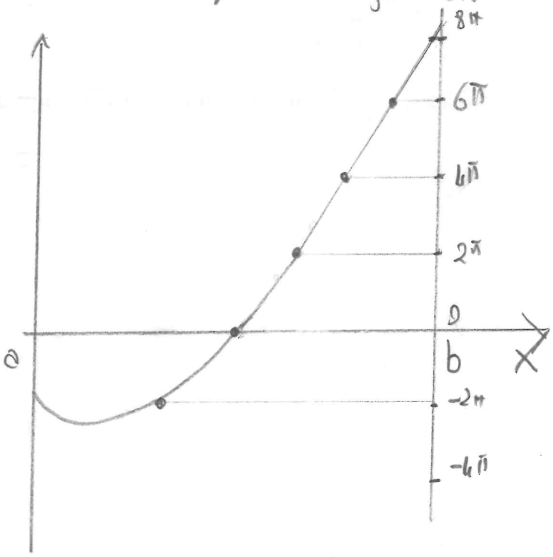
↳ questi sono i problemi che ci interessano. Ciò deriva, per esempio, dalle espressioni per il calcolo del campo irradiato.

Se $k\to\infty$, si ha la seguente situazione:

- $k\,\phi(x)$, dunque la fase, varia molto rapidamente
- $A(x)$ varia lentamente.

essendo $k=\frac{2\pi f}{c}$, queste ipotesi sono ragionevoli

Si consideri un andamento della fase in questo intervallo, di questo tipo: si hanno 2 tipi di andamenti: o punti stazionari per la fase (derivata nulla), o andamenti lineari.



Dalla linearità dell'integrale, posso suddividere l'intervallo di integrazione in diversi contributi, per esempio su multipli di 2π.

Per un certo sottointervallo $[x_1, x_2]$, si ha

$$\phi(x)\approx\alpha(x-x_1)\,,\quad \alpha=\frac{2\pi}{x_2-x_1}$$

Procediamo: introduciamo un cambio di variabile: $\psi=\alpha(x-x_1)$, così che poi:

$$dx=\frac{1}{\alpha}\,d\psi$$

↳ l'integrale diventa $\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi}\exp(j\psi)\,d\psi=0$

Dove la fase è lineare, si han tanti vettorini, che finiscono per tornare al punto di partenza: ove la fase è lineare, il contributo all'integrale è nullo.

Ora studiamo la seconda situazione: un punto a fase stazionaria.
Se la fase è stazionaria, per studiarne il comportamento approssimato dobbiamo fare uno sviluppo di Taylor al II° ordine (infatti la stazionarietà implica $f' = \phi$!)
Dato x_s il punto stazionario per la fase,

$$\phi(x) \sim \beta(x - x_s)^2$$

$$\hookrightarrow \int_{x_n}^{x_{n+1}} \exp(\beta(x-x_s)^2)\,dx \qquad \text{ponendo } x - x_s = \xi,\quad dx = d\xi,\ \text{e si ha:}$$

$$\hookrightarrow \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \exp(\beta\xi^2)\,d\xi \xrightarrow[\text{per bellezza}]{\text{Torno a } x} = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \exp(\beta x^2)\,dx$$

Ora, si immagini che l'approssimazione valga da $-\infty$ a $+\infty$: gli altri contributi di fase sono trascurabili. Si può estendere l'integrazione a:

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j\beta x^2)\,dx$$

Modifico la forma di questo:

$$= 2\int_0^{\infty} \exp(j\beta x^2)\,dx = 2\lim_{X\to\infty}\int_0^X \exp(j\beta t^2)\,dt = 2\lim_{X\to\infty}\int_0^X [\cos(\beta t^2) + j\sin(\beta t^2)]\,dt$$

Essendo X grande ciò si può approssimare con gli integrali di Fresnel; le funzioni integrali tendono comunque a raggiungere il regime con una certa rapidità.

Interpretiamo fisicamente tutto ciò: i contributi principale all'integrale sono quelli in cui la fase è stazionaria.
D'altra parte, si sa che l'integrale di irradiazione è interpretabile con il principio di Huygens-Fresnel: lavorando sull'integrale di irradiazione però si vede che il punto di stazionarietà è dove dà la normale della superficie, il punto da cui passa il raggio: il contributo di ottica geometrica.
Domanda: cosa accade in a e b? Si parla di "punti di stazionarietà del II° ordine": generano campo ma non come quello di ottica geometrica, bensì di scattering.

Metodo dei Momenti

Si consideri di dover risolvere il seguente problema:

$\mathcal{L} f = g$ dove g è un termine noto, f un'incognita, $\mathcal{L}$ un operatore lineare.

Per esempio:

$$\mathcal{L}: \underbrace{\nabla\times\nabla\times}_{\mathcal{L}} \underbrace{\underline{E}}_{f} - \underbrace{k^2}_{\mathcal{L}} \underbrace{\underline{E}}_{f} = \square \underbrace{\underline{J}}_{g}$$

Idea: data la funzione f incognita, la espando in una base di funzioni ad-hoc (a seconda del problema):

$$f \simeq \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \xrightarrow{\text{per la linearità}} \sum_{n=1}^{N} a_n \mathcal{L} f_n = g$$

Si introduce ora un altro set di funzioni, detto "funzioni peso", w_m, e si fa ciò: per ogni "m" (quanti m servono è da vedersi).

$$\langle w_m | \sum_{n=1}^{N} a_n f_n \rangle = \langle w_m | g \rangle \quad \forall m \in 1 \div M$$

Se $M = N$, ho tante equazioni quante bastano.

$$\begin{bmatrix} \langle w_1 | \mathcal{L} f_1 \rangle & \langle w_1 | \mathcal{L} f_2 \rangle & \\ \langle w_2 | \mathcal{L} f_1 \rangle & \ddots & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle w_1 | g \rangle \\ \langle w_2 | g \rangle \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Per i campi elettromagnetici, si ha per esempio la EFIE:

$$\underline{E}(\underline{r}) = -j\omega\mu \int_{\underline{r}'} \underline{\underline{G}}(\underline{r}-\underline{r}') \cdot \underline{J}_e(\underline{r}')\, d\underline{r}' \quad \text{dove } \underline{\underline{G}}(\underline{r}) = \left[\underline{\underline{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k_0^2}\right] \phi(r), \quad \phi(r) = \frac{\exp(-jkr)}{r}$$

Ciò che si può fare è analizzare un'antenna a filo queste equazioni, e semplificarle per poi risolverle.

Se limitiamo il dominio a 1 dimensione,

$$\longrightarrow -j\frac{\omega\mu_0}{k_0^2}\int_0^L \left(k_0^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\exp(-jk_0|\underline{r}-\underline{r}'|)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, I(z')\,dz = -E_{iz}$$

dove $|\underline{r}-\underline{r}'| = \sqrt{(z-z')^2+a^2}$

↓ raggio del filo

Il campo impresso si può vedere come $V\delta(z-z_0)$

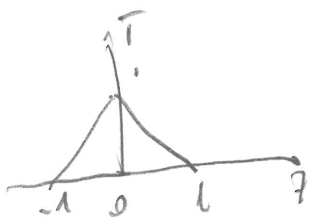
$$\hookrightarrow -\frac{j\omega\mu_0}{k_0^2}\int_0^L\left(k_0^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(z-z')\,I(z')\,dz = \underbrace{\delta(z-z_0)V}$$

↳ generatore di tensione concentrato su una certa sezione.

Si divide il filo in un certo numero di tratti più corti, introducendo una matrice di impedenza generalizzata: $\underline{\underline{Z}}\,\underline{I}=\underline{V}$

Soluzione Galerkin: divido in N segmenti l'intervallo $[0, L]$; considero $I(z)$ espanso come:

$$I(z)\cong\sum_{n=1}^{N-1} I_n T_n(z), \qquad T_n(z)=\begin{cases}1-|u|, & |u|<1\\ 0, & |u|>1\end{cases}, \quad u=\frac{z}{\ell}-n$$



$$\hookrightarrow \sum_{n=1}^{N-1} I_n\, \mathcal{L}\left[T\left(\frac{z}{\ell}-n\right)\right] \simeq E_{i,z}(z)$$

$$\hookrightarrow \forall m,\ \sum_{n=1}^{N-1} I_n\, \mathcal{L}\left[T\left(\frac{z}{\ell}-n\right)\right] T_m(z) = E_i(z)\,T_m(z)$$

Si ottiene un'equazione nella forma $\underline{V}=\underline{\underline{Z}}\,\underline{I}$, dove

$$Z_{mn}=\int_0^L T_m(z)\,\mathcal{L}[T_n(z)]\,dz$$

$$E_{iz}=\int_0^L T_m(z)\,E_{iz}(z)\,dz$$

se poi $E_i(z)=V\delta(z-z_0)$, il secondo integrale è molto semplificato.

$S_i = \frac{P_T G_T}{4\pi R^2}$; $P_{scatter} = \sigma S_i$; $S_r = \frac{P_{scatter}}{4\pi R^2}$; $P_r = S_r A_{eq}$ $\quad A_{eq} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_T$

$\hookrightarrow \frac{P_r}{P_T} = \frac{\sigma}{4\pi^2 R^2} P_T G_T \frac{\lambda^2}{4\pi} G_T \frac{1}{4\pi R^2} = \frac{\lambda^2 \sigma G_T^2}{(4\pi)^3 R^4}$

Lente - zonatura: $\Delta\varphi = n\frac{2\pi}{\lambda}h - \frac{2\pi}{\lambda}h = 2m\pi$

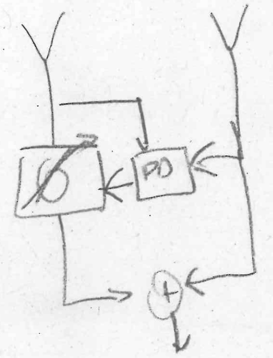
$\Delta\varphi$ deve dare la diff. ↓ per essere $\underline{2\pi}$ $\longrightarrow h = \frac{\lambda}{n-1}$

$h\frac{2\pi}{\lambda}n - h\frac{2\pi}{\lambda} = 2m\pi$

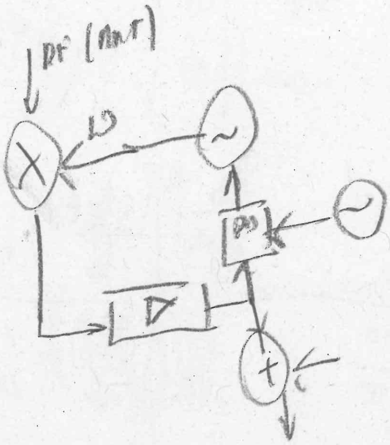
$j\omega C Z_0 = \ln(\dots)$

$E_\vartheta = j\frac{Z_0}{2\lambda}\frac{\exp(-j\beta R)}{R} I l \sin\vartheta$

$E_\varphi = -j\frac{A}{2\lambda}\frac{\exp(-j\beta R)}{R} jkZ_0 A\sin\vartheta$



PLL:



$\frac{\psi}{2} = \arccos\frac{x}{L_0}$

$|\Delta\Gamma|^2 = \left|\frac{P_r}{P_T}\right|$; $P_r = S_r A_r$; $\boxed{S_r = S_T = \frac{P_T G_T}{4\pi R^2}}$; $\Longrightarrow \Delta\Gamma = \left|\frac{\lambda G_T}{4\pi R}\right|^2$