Teoria delle distribuzioni

Prodotto di Convoluzione

Date funzioni f, g, si definisce "prodotto di convoluzione" l'operazione:

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt$$

Date $f, g \in R^1_{loc}$, g limitata e a supporto compatto;

$$f(x) = I_{[a;b]}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a;b] \\ 0 & x \notin [a;b] \end{cases}$$

$g(x) \in \mathcal{D}$, pari

Facciamo un esempio di prodotto di convoluzione

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt = \int_a^b g(x-t)\,dt = \int_a^b g(t-x)\,dt$$

Questa funzione "vive" sul supporto $\left[-\frac{1}{2}+x \,;\, \frac{1}{2}+x\right]$

Quindi,

$$(f*g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[a+\frac{1}{2} \,;\, b-\frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La funzione varrà 1 dove prima valeva 1, e poi si raccorderà a 0, con un raccordo C^∞.

La convoluzione ha la proprietà di prendere "il meglio" delle due funzioni che si convolvono, facendo "addolcire" i salti, e comunque tendenzialmente regolarizzando.

La funzione avrà quindi un aspetto simile al precedente, ma molto regolarizzata, se convoluta con una C^∞.

Convoluzione tra distribuzioni: iniziando con il caso regolare, come sempre, date T_f, T_g, si vuole calcolare T_{f*g}.

$$\langle T_{f*g} | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt\ \varphi(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\varphi(x)dx\right)dt$$

Consideriamo un cambio di variabili, $\begin{cases} x-t=y \\ x=y+t \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\left[f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\varphi(y+t)dy\right]dt =$$

$$= \langle T_f(t) | \langle T_g(y) | \varphi(y+t)\rangle\rangle$$

Ovvia è l'azione consecutiva delle due funzioni sulle funzioni test.

Generalizzando, date due distribuzioni T ed S,

$$\langle T * S | \varphi \rangle \triangleq \langle T(t) | \langle S(x) | \varphi(x+t)\rangle\rangle$$

Abbiamo cioè un'operazione interna, di traslazione, e quindi la seconda operazione.

La prima operazione non ci da problemi; la seconda, invece, di più: perché sia effettuabile, $\langle S(x) | \varphi(x+t)\rangle$ deve essere una funzione test, quindi C^∞ e a supporto compatto.

- Si dimostra che è C^∞
- In generale non è a supporto compatto, a meno che S non sia a supporto compatto. In alternativa, può essere a supporto compatto anche solo T.

La convoluzione ha alcune proprietà:

- $S*T = T*S$
- $(S*T)*U = S*(T*U)$
- $S*(\lambda T + \mu U) = \lambda S*T + \mu S*U$
- S, T a supporto compatto $\Rightarrow$ $S*T$ a supporto compatto.

Esempio pratico:

$\delta_{x_0} * T$

$$\langle T * \delta_{x_0} | \varphi\rangle = \langle \delta_{x_0} * T | \varphi\rangle = \langle \delta_{x_0} | \langle T(x) | \varphi(x+t)\rangle\rangle =$$

$$= \langle T(x) | \varphi(x+x_0)\rangle = \langle T(x-x_0) | \varphi(x)\rangle = T(x-x_0)$$

Convolvere una distribuzione con una delta in x_0 significa traslare "in avanti" la distribuzione di x_0. δ non cambia le distribuzioni, le trasla solo.

Esempio pratico:

$(S*T)' = S'*T = S*T'$

Dimostriamo:

$$\langle (S*T)' | \varphi\rangle = -\langle S*T | \varphi'\rangle = -\langle S(s) | \langle T(t) | \varphi'(s+t)\rangle\rangle =$$

$$= \langle S(s) | T'(t) | \varphi(s+t)\rangle\rangle = \langle S*T' | \varphi\rangle$$

Esempio pratico:

$$\delta_{x_0}^{(n)} * T = (\delta_{x_0} * T)^{(n)} = T(x-x_0)^{(n)} = \delta_{x_0} * T^{(n)} = T^{(n)}(x-x_0)$$

Convolvere con la derivata n-sima della δ_{x_0} significa derivare n volte la T, dopo averla traslata.

Trasformata di Fourier

Data $f \in R^1(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier, $\hat{f}$, $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, è tale per cui:

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi j \gamma x}\, dx$$

Spesso al posto della notazione considerando γ frequenza, si usa

$$\omega = 2\pi\gamma \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-j\omega x}\, dx$$

Notazione più bella per indicare una trasformata è anche:

$$\mathcal{F}[f] = \langle T_f \,|\, e^{-j\omega x} \rangle$$

Infatti, di fatto la trasformata è un prodotto scalare di f con l'esponenziale $e^{-j\omega x}$

Questa definizione è certo valida per distribuzioni regolari; possiamo però estenderla con tranquillità alle funzioni a supporto compatto:

Data $T \in \mathcal{D}'$, $\forall \varphi \in C^\infty$, T a supporto compatto, vediamo che φ è una funzione $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, e quindi possiamo dire che

$$\varphi(x) = \mathrm{Re}[\varphi(x)] + j\,\mathrm{Im}[\varphi(x)]$$

Entrambe le componenti saranno ovviamente C^∞. Mediante la linearità, posso far agire separatamente T su parte reale e parte immaginaria della funzione di prova:

$$\langle T \,|\, \varphi \rangle \triangleq \langle T \,|\, \mathrm{Re}[\varphi] \rangle + j \langle T \,|\, \mathrm{Im}[\varphi] \rangle$$

Ci è dunque possibile definire la trasformata di Fourier come una funzione (funzione od operatore) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\mathcal{F}[T](\gamma) = \langle T(x) \,|\, e^{-2\pi j \gamma x} \rangle \triangleq \langle T(x) \,|\, \cos(-2\pi j \gamma x) \rangle + j \langle T(x) \,|\, \sin(-2\pi j \gamma x) \rangle$$

Proponiamo un esempio di trasformata, nella più usata delle distribuzioni:

Esempio pratico

$T = \delta_{x_0}$

$$\hat{T}(\gamma) = \langle \delta_{x_0}(x) \,|\, e^{-2\pi j \gamma x} \rangle = e^{-2\pi j \gamma x_0}$$

La definizione finora proposta non è ottimale: vedremo che non sempre sarà possibile ottenere funzioni C^∞. Consideriamo un esempio pratico

Esempio pratico: gradino di Heaviside

Vedremo che la trasformata di Laplace del gradino di Heaviside in 0 è:

$$\mathcal{L}(H)(s) = \int_{0^-}^{+\infty} H(x)\, e^{-sx}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\, dx = -\frac{1}{s}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}$$

Ci potremmo aspettare che la trasformata di Fourier del gradino sia:

$$\mathcal{F}(H)(\gamma) \overset{?}{=} \mathcal{L}(H)(2\pi j \gamma) = \frac{1}{2\pi j \gamma}$$

Vedremo che non è così, poiché la trasformata di Fourier, in senso classico, è il "valore di bordo" di quella di Laplace. Perché però vi siano legami, devono valere tutte le proprietà della trasformata.

Studiamo ora alcune caratteristiche della trasformata di Fourier, considerando per note le proprietà che possiede in senso classico (traslazione, linearità, riscalamento, derivazione...)

Data $f \in R^1(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi j \gamma x}\, dx$, prendiamo il modulo:

$$|\hat{f}(\gamma)| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|e^{-2\pi j \gamma x}|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \|f(x)\|_1$$

Possiamo dire che:

$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

Tentiamo di fare qualche osservazione: data $f \in C^1$, $f' \in R^1$,

$|\mathcal{F}(f')(\gamma)| = |2\pi\gamma j| \, |\mathcal{F}(f)(\gamma)|$ [proprietà di derivazione]

$\Rightarrow |\mathcal{F}(f)(\gamma)| \leq \frac{1}{2\pi|\gamma|} |\mathcal{F}(f')(\gamma)|$ [disuguaglianza di Schwarz]

$\Rightarrow \leq \frac{1}{2\pi\gamma} \|f'\|_1$

Da ciò, si può intuire che, per $\gamma \to \infty$,

$\lim_{\gamma \to \pm\infty} \mathcal{F}(f)(\gamma) = 0$

Questo è il lemma di Riemann-Lebesgue, valido $\forall f \in R^1$.

Il lemma ha una validità molto generale, anche se qua tratta casi limitati.

Ciò ci fa intuire che la trasformata di una funzione ci garantisce il fatto di essere limitata, continua, ed R^1.

Finora abbiamo considerato una teoria delle distribuzioni basata sullo studio delle funzioni test nello spazio $\mathcal{D}$; introduciamo un nuovo spazio delle funzioni test, $\mathcal{S}$, detto "lo spazio delle funzioni rapidamente decrescenti".

Data $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{S}$,

1) $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$

2) $\forall p, q \in \mathbb{N}$, $x^p \varphi^{(q)}(x) \to 0$

Ossia va a 0 più rapidamente di quanto un polinomio cresca

3) Anche le derivate convergono a 0 meglio di un polinomio.

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S} \subseteq C^\infty$.

Lo spazio $\mathcal{S}$ ha molte proprietà: esso è chiuso rispetto a

- Combinazioni lineari
- Traslazioni
- Riscalamenti
- Derivazioni
- Moltiplicazione per la variabile indipendente: data $\varphi \in \mathcal{S}$, $x\varphi(x) \in \mathcal{S}$.

Osservazione: data $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, essa è assolutamente integrabile

Dimostrazione: date le funzioni

$$\begin{cases} x^2\varphi(x) & \in \mathcal{S} \\ \varphi(x) & \in \mathcal{S} \end{cases}$$

$(1+x^2)\varphi(x) \in \mathcal{S}$

Infatti, data C costante arbitraria,

$|(1+x^2)\varphi(x)| \leq C \Rightarrow |\varphi(x)| \leq \frac{C}{1+x^2} \quad \forall \varphi \in R^1$.

Si poteva scegliere un x^n generico; x^2 è il primo capitato (solo x non è valido in quanto la serie $\frac{1}{x}$ non è convergente, e nemmeno l'integrale). "1" si usa perché si vuole evitare, in questo caso, la convergenza a 0, propria di $x^n\varphi^q(x)$.

Proprietà: la trasformata di Fourier di una funzione appartenente ad $\mathcal{S}$, è ancora una funzione appartenente ad $\mathcal{S}$.

Data $\varphi \in \mathcal{S}$, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$

Ossia $\mathcal{S}$ è chiuso rispetto all'operatore "trasformata di Fourier"

FOGLIO A PARTE

Dimostrazione:

Data $\varphi \in \mathcal{S}$, $\mathcal{F}(x^q \varphi(x))(x) = +\left(\frac{-1}{2\pi j}\right)^q \mathcal{F}(\varphi)^{(q)}(\gamma)$

Dunque,

$\mathcal{F}(\varphi)^{(q)}(\gamma) = (-2\pi j)^q \, \mathcal{F}(x^q \varphi(x))(\gamma)$

Moltiplichiamo ambo i membri per γ^p e vediamo se va a 0:

$\gamma^p \mathcal{F}(\varphi)^{(q)} = (-2\pi j)^q \gamma^p \mathcal{F}(x^q \varphi(x))(\gamma)$

Consideriamo che $x^q \varphi(x) = f(x)$:

$\Rightarrow \mathcal{F}(f^{(p)})(\gamma) = (2\pi j \gamma)^p \mathcal{F}(f)(\gamma) \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma^p \mathcal{F}(f)(\gamma) = \frac{1}{(2\pi j)^p} \mathcal{F}(f^{(p)})(\gamma)$

$\gamma^p \mathcal{F}(\varphi)^{(q)}(\gamma) = (-2\pi j)^q \frac{1}{(2\pi j)^p} \mathcal{F}\left[(x^q(\varphi))^{(p)}\right](\gamma)$

Abbiamo cioè moltiplicato q volte per la variabile indipendente x e ambo i membri per γ^p.

Per Riemann-Lebesgue, poiché $x^q \varphi \in \mathcal{S}$,

$\lim_{\gamma \to \pm\infty} \gamma^p \mathcal{F}(\varphi)^{(q)}(\gamma) = 0.$

La trasformata di Fourier è un operatore che scambia regolarità con una buona convergenza all'infinito. Esistono pochi spazi in cui l'applicazione della trasformata li mandi in se stessi: uno è $\mathcal{S}$, l'altro è L^2.

Stiamo studiando $\mathcal{S}$; introduciamo anche su questo spazio un concetto di convergenza;

Definizione: sia φ_n una successione in $\mathcal{S}$, e sia $\varphi \in \mathcal{S}$; si dice che φ_n converge a φ in $\mathcal{S}$ se:

$\forall_{p,q}$, $x^{(p)} \varphi_n^{(q)}(x) \longrightarrow x^{(p)} \varphi^{(q)}(x)$ uniformemente su $\mathbb{R}$.

$\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{S}]{} \varphi \iff \varphi_n - \varphi \xrightarrow[\mathcal{S}]{} 0$

Abbiamo detto che $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S} \subseteq C^\infty$; data $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi$, $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{S}]{} \varphi$.

Una convergenza su $\mathcal{D}$, garantisce convergenza su $\mathcal{S}$.

Definizione: si definisce "distribuzione temperata" ogni funzionale

$T: f \longrightarrow \mathbb{R}$

lineare e continuo:

$\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{S}]{} 0 \Rightarrow T(\varphi_n) \longrightarrow 0$

Data $T \in \mathcal{S}'$, se quindi varia su $\mathcal{S}$, ma la limitiamo nel solo $\mathcal{D}$, allora avremo le stesse condizioni di linearità e continuità che su $\mathcal{D}$. Ma le distribuzioni temperate agiscono su di uno spazio più ampio di $\mathcal{D}$. Restringere al solo $\mathcal{D}$ è banale; se invece abbiamo $T \in \mathcal{D}'$, possiamo chiederci se è temperata, ossia se è possibile ampliare il suo dominio a tutto $\mathcal{S}$. È possibile approssimare il dominio $\mathcal{D}$ in uno più ampio? E a quali condizioni?

Proposizione: ogni $T \in \mathcal{D}'$ a supporto compatto è estendibile ad $\mathcal{S}$, e cioè è temperata.

Ciò non è banale: abbiamo detto che, se T è a supporto compatto, allora è estendibile ad $\mathcal{S}$, dominio più ampio.

Concludendo,

$\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$

$\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale, $\mathcal{F}$ è un operatore lineare.

$\mathcal{S}_x$

$\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{S}]{} 0 \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_n) \xrightarrow[\mathcal{S}]{} 0$

$\mathcal{F}$ dunque è anche un operatore continuo.

Definire su di uno spazio limitato come $\mathcal{D}$ la trasformata di Fourier è limitante; $\mathcal{S}$ è da introdurre proprio per avere una buona quantità di funzioni trasformabili.

Definiamo dunque, data $T \in \mathcal{S}'$, la trasformata di Fourier della distribuzione T: $\forall \varphi \in \mathcal{S}$,

$\langle \hat{T} | \varphi \rangle \triangleq \langle T | \hat{\varphi} \rangle$

Cioè effettuiamo la trasformata della funzione test, per poi applicarvi la distribuzione T.

$\mathcal{S} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{S} \xrightarrow{T} \mathbb{R}$

$\varphi \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{\varphi} \xrightarrow{T} \langle T | \hat{\varphi} \rangle \triangleq \langle \hat{T} | \varphi \rangle$

Questa definizione è più generale della precedente, ma vediamo se le due sono legate: vediamo che

- La vecchia $\mathcal{F}$ era: $\hat{T}(\gamma) = \langle T(x) | e^{-2\pi j \gamma x} \rangle$
- La nuova $\mathcal{F}$ è: $\langle \hat{T} | \varphi \rangle = \langle T(\gamma) | \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2\pi j \gamma x} dx \rangle =$

$= \langle T(\gamma) | \langle T_\varphi(x) | e^{-2\pi j \gamma x} \rangle\rangle$

Considerando il legame tra le due, vediamo che

$\langle T_\varphi(x) | \langle T(\gamma) | e^{-2\pi j \gamma x} \rangle\rangle = \langle T_\varphi(x) | \hat{T}(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \hat{T}(x) dx$

La nuova trasformata di Fourier su $\mathcal{S}$, agisce così: la vecchia trasformata è semplicemente il "simbolo" della nuova: se T è a supporto compatto, accade che la sua trasformata di Fourier $\hat{T}$ è regolare, ed il suo "simbolo" è la vecchia $\hat{T}$.

Alcune osservazioni sulle distribuzioni temperate

- $\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_n \in \mathcal{S}'$.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua si dice "a crescita lenta" se:

$\exists C > 0,\ m \in \mathbb{N} : |f(x)| \le C(1 + |x|^m)$

Cioè cresce meno di un generico polinomio.

Esempi di funzioni a crescita lenta sono:

1) I polinomi
2) Le funzioni razionali con denominatore non annullabile
3) Le funzioni in $\mathcal{S}$

Proposizione: se f è a crescita lenta, T_f è una distribuzione temperata

Dimostrazione:

$\langle T_f | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx$

Verifichiamo la convergenza per l'integrale: sappiamo che

$|f(x)| \le C(1 + |x|^m)$ [per ipotesi]

Quindi,

$|f(x) \varphi(x)| \le C(1 + |x|^m)|\varphi(x)| \Rightarrow$ MOLTIPLICO E DIVIDO PER $(1+x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow C(1 + |x|^m) \frac{1}{1+x^2} (1+x^2) |\varphi(x)|$

Ma:

- $C(1+|x|^m)(1+x^2)|\varphi(x)| \in \mathcal{S}$;
- $\frac{1}{1+x^2}$ non fornisce problemi

Quindi, φ moltiplicata per polinomi non scoppia, e quindi il tutto è maggiorabile con una costante reale:

$C(1+|x|^m)(1+x^2)|\varphi(x)| \leq K \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$|\varphi(x)| \leq \frac{K}{1+x^2}$ [funzione assolutamente integrabile]

- Poiché l'integrale è un operatore lineare, T_f è lineare:

$\langle T_f | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ (linearità confermata)

- Se $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{S}]{} 0 \Rightarrow \langle T_f | \varphi_n \rangle \longrightarrow 0$

Convergenza in $\mathcal{S}$ significa chiusura rispetto a derivazione e/o moltiplicazione per polinomi. Consideriamo il modulo della distribuzione:

$|\langle T_f | \varphi_n \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_n(x)dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi_n(x)|dx = |f(x)\varphi_n(x)| \leq$

$\leq \frac{1}{1+x^2} \underbrace{C(1+|x|^m)(1+x^2)|\varphi_n(x)|}_{\psi_n(x)}$

Ma $\sup_{x\in\mathbb{R}} \psi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\varphi_n(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\psi_n(x)dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\left\{\sup_{x\in\mathbb{R}} \varphi_n(x)\right\}dx =$

$= \underbrace{\left[\sup_{x\in\mathbb{R}} \psi_n(x)\right]}_{=0} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx}_{\in\mathbb{R}} = 0.$

Le distribuzioni regolari associate a funzioni a crescita lenta dunque determinano veramente distribuzioni temperate.

Anche sulle distribuzioni temperate viene introdotto un concetto di convergenza (debole): data $T_n \in \mathcal{S}'$, $T \in \mathcal{S}'$, si dice che $T_n \xrightarrow[\mathcal{S}']{} T$ se:

$\langle T_n | \varphi \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T | \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$.

Si tratta di una sorta di convergenza puntuale, ma senza uniformità, verso le funzioni test.

Osservazione: se $T_n \to T$, in $\mathcal{S}'$, $\Rightarrow \mathcal{F}(T_n) \longrightarrow \mathcal{F}(T)$ in $\mathcal{S}'$

Dimostrazione: $\langle \mathcal{F}(T_n) | \varphi \rangle = \langle T_n | \mathcal{F}(\varphi) \rangle$

Considerando $n\to\infty$, $T_n \to T$, $\Rightarrow \langle T_n | \mathcal{F}(\varphi) \rangle \longrightarrow \langle T | \mathcal{F}(\varphi) \rangle$

Ma per definizione

$\langle T | \mathcal{F}(\varphi) \rangle = \langle \mathcal{F}(T) | \varphi \rangle$

Integrale di Fourier

Esiste un'operazione inversa alla trasformata di Fourier: l'antitrasformata (o Integrale) di Fourier.

Si tratta di un operatore $\mathcal{F}^{-1}$ tale per cui

$\mathcal{F}^{-1}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$;

$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\gamma) e^{2\pi j x\gamma} d\gamma$

Si noti però un fatto molto interessante:

$\mathcal{F}^{-1}(\varphi)(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2\pi j \gamma(-x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{2\pi j \gamma x} dx = \mathcal{F}(\varphi)(x)$

Si propone dunque la definizione:

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T) | \varphi \rangle \triangleq \langle T | \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle$$

Vediamo se questo operatore ha senso, se ciò è possibile "tornare indietro":

$$\langle \mathcal{F}^{-1} \cdot \mathcal{F}(T) | \varphi \rangle = \langle T | \varphi \rangle \ ?$$

$$\langle \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}(T) | \varphi \rangle = \langle T | \mathcal{F} \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle = \langle T | \varphi \rangle$$

Facciamo alcune osservazioni:

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T)(x) | \varphi(x) \rangle = \langle T(\gamma) | \mathcal{F}^{-1}(\gamma) \rangle = \langle T(\gamma) | \mathcal{F}(\varphi)(-\gamma) \rangle =$$

$$= \langle T(-\gamma) | \mathcal{F}(\varphi)(\gamma) \rangle = \langle \mathcal{F}(T(-\gamma))(x) | \varphi(x) \rangle \quad \mathcal{F}^{-1}(T)(x) = \mathcal{F}(T(-\gamma))(x)$$

Questa è l'antitrasformata di Fourier

Studiamo ora le proprietà dell'operatore "trasformata di Fourier" $\mathcal{F}$ sulle distribuzioni:

- Linearità: $\mathcal{F}(\lambda S + \mu T) = \lambda \mathcal{F}(S) + \mu \mathcal{F}(T)$
- Traslazione: $\mathcal{F}(T(x - x_0))(\gamma) = e^{-2\pi \gamma j x_0} \mathcal{F}(T)(\gamma)$
- Traslazione sulle frequenze: $\mathcal{F}(e^{2\pi j \gamma_0 x} T(x))(\gamma) = \mathcal{F}(T)(\gamma - \gamma_0)$
- Riscalamento: $\mathcal{F}(T(ax))(\gamma) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}(T)\left(\frac{\gamma}{a}\right) \quad a \neq 0$
- Derivazione: $\mathcal{F}(T')(\gamma) = 2\pi j \gamma \mathcal{F}(T)(\gamma)$
- Moltiplicazione per x: $\mathcal{F}(xT(x))(\gamma) = -\frac{1}{2\pi j} \mathcal{F}'(T)(\gamma)$

Osservazione: il riscalamento di $a = -1$, corrisponde ad un'inversione dei tempi:

$$\mathcal{F}(T(-x))(\gamma) = \mathcal{F}(T)(-\gamma) \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(T)(x) = \mathcal{F}(T)(-x)$$

Facciamo ora un esempio pratico, basato sulla delta di Dirac:

Data $T = \delta_{x_0}$,

$$\mathcal{F}(\delta_{x_0}) = e^{-2\pi j \gamma x_0}$$

Ossia una singola armonica

Al contrario,

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi j x_0 \gamma}) = \delta_{x_0}(x)$$

Ma $\mathcal{F}^{-1}(e^{-2\pi j x_0 \gamma})(x) = \mathcal{F}(e^{2\pi j x_0 \gamma})(x) \Rightarrow \mathcal{F}(e^{2\pi j x_0 \gamma})(x) = \delta_{x_0}$

Applicando dunque un ragionamento del tutto simmetrico,

$$\mathcal{F}(e^{2\pi j x \gamma_0})(\gamma) = \delta_{\gamma_0}(\gamma)$$

Analizziamo ora a fondo due esempi molto importanti di trasformata di Fourier

1) Gradino di Heaviside

$$\mathcal{F}(T_H) = ?$$

$$\mathcal{F}(T_H) = T_{\frac{1}{2\pi j \gamma}} \ ?$$

Poiché la funzione nel dominio delle frequenze presenta una singolarità, per $\gamma = 0$, non è possibile studiare l'integrale in senso classico; sarà però possibile farlo, in senso di Valor Principale di Cauchy: infatti, considerando

$$T = \text{v.p.} \frac{1}{x}, \quad \langle \text{v.p.} \frac{1}{x} | \varphi \rangle \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx \right];$$

$$\text{v.p.} \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'$$

Abbiamo un oggetto simile a $\frac{1}{x}$; si noti che però v.p. $\frac{1}{x}$ non è una distribuzione regolare, e che vale solo per funzioni dispari, in cui la discontinuità si annulli.

$\mathcal{F}(T_H)(\gamma) = \frac{1}{2\pi j}$ v.p. $\frac{1}{\gamma}$ = ?

Sappiamo che $T_H' = \delta_0$;

$1 = \mathcal{F}(\delta_0) = \mathcal{F}(T_H') = 2\pi j\gamma \, \mathcal{F}(T_H)(\gamma)$

Ma $x \cdot \text{v.p.} \frac{1}{x} = T_1$.

Quindi,

$$2\pi j\gamma \left[\frac{1}{2\pi j} \text{ v.p. } \frac{1}{\gamma}\right] = 1$$

La differenza tra le due derivate del gradino, deve essere 0:

$$(2\pi j\gamma)\left(\mathcal{F}(T_H)(\gamma) - \frac{1}{2\pi j} \text{ v.p. } \frac{1}{\gamma}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma\left(\mathcal{F}(T_H)(\gamma) - \frac{1}{2\pi j} \text{ v.p. } \frac{1}{\gamma}\right) = 0$$

Quali distribuzioni, moltiplicate per x, valgono 0 $\forall x \neq 0$?

Risultato: data T distribuzione tale che $x \cdot T(x) = 0$, allora $T(x)$ è necessariamente il multiplo di δ_0: $C\delta_0$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(T_H)(\gamma) - \frac{1}{2\pi j} \text{ v.p. } \frac{1}{\gamma} = C\delta_0$$

Quindi di fatto, tra le due derivate c'è una correzione di un impulso;

Quanto vale la costante c?

Sfruttiamo i dati del problema, e le proprietà di simmetria:

$$\mathcal{F}(T_{H(-x)})(\gamma) = \mathcal{F}(T_H)(-\gamma) = -\frac{1}{2\pi j} \text{ v.p. } \frac{1}{\gamma} + C\delta_0(x)$$

$T_{H(x)} + T_{H(-x)} = 1$

$\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}(T_{H(x)}) + \mathcal{F}(T_{H(-x)}) = \delta_0$

$\Rightarrow 2C\delta_0 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

Quindi,

$$\mathcal{F}(T_H)(\gamma) = \frac{1}{2\pi j} \text{ v.p. } \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2}\delta_0(x)$$

Proposizione: data $T \in \mathcal{D}'$, $\psi \in C^\infty$, $\psi(x_0) = 0$, $\psi'(x_0) \neq 0$

Allora

$\psi(x)T(x) = 0 \Rightarrow T(x) = C\delta_{x_0}(x)$

2) Treno di impulsi

$T = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k$; $T_n = \sum_{k=-n}^{n} \delta_k$

$$\mathcal{F}(T_n) = \sum_{k=-n}^{n} \mathcal{F}(\delta_k) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-2\pi jk\gamma}$$

Possiamo considerare quindi che:

$$\mathcal{F}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} e^{-2\pi jk\gamma} = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi jk\gamma}$$

Si noti che però abbiamo sfruttato una convergenza punto-punto, quindi debole:

Se $\mathcal{F}(T_n) \to \mathcal{F}(T)$ allora:

$e^{2\pi j\gamma}\mathcal{F}(T_n) \to e^{2\pi j\gamma}\mathcal{F}(T)$

$$\Rightarrow e^{2\pi j\gamma}\left(\mathcal{F}(T_n) - \mathcal{F}(T)\right) = \underset{\downarrow\, 0}{e^{2\pi j(n+1)\gamma}} - \underset{\downarrow\, 0}{e^{2\pi jn\gamma}}$$

Ossia le due distribuzioni convergono.

$\mathcal{F}(T) = e^{-2\pi j\gamma}\mathcal{F}(T) \Rightarrow \mathcal{F}(T) \cdot (1 - e^{-2\pi j\gamma}) = 0 \iff \gamma \in \mathbb{Z}$

Vediamo che bisogna

$\mathcal{F}(T)(\gamma) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \delta_k$

Ossia la trasformata del treno di impulsi è un treno di impulsi. $c_k = c = 1$.

$f(t) \in S; \quad \check{f}(\gamma) \in S$

$\boxed{OK}$

- $\mathcal{F}\left(f(t)^{(q)}\right)(\gamma) = (-2\pi j)^q \, \mathcal{F}\left(t^q f(t)\right)(\gamma)$
- $\mathcal{F}\left(\left(t^k f(t)\right)^{(p)}\right)(\gamma) = (2\pi j)^p \gamma^p \, \mathcal{F}\left(t^k f(t)\right)(\gamma)$

$\Downarrow$

$$\gamma^p \, \mathcal{F}\left(f(t)\right)^{(q)}(\gamma) = (-1)^q (2\pi j)^{q-p} \, \mathcal{F}\left(\underbrace{\left(t^k f(t)\right)^{(p)}}_{\Downarrow\, g \in R^c}\right)(\gamma)$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}\left(\left(t^k f(t)\right)^{(p)}\right)(\gamma) \xrightarrow{|\gamma| \to +\infty} 0 \Longrightarrow \gamma^p \, \mathcal{F}\left(f(t)\right)^{(q)}(\gamma) \longrightarrow 0$$