Analisi Complessa

L'Analisi Complessa tratta lo studio di funzioni $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.
Possiamo pensare a $\mathbb{C}$ come a un piano $\mathbb{R}^2$: parleremo di funzioni $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, o comunque abbastanza simili. L'Analisi Complessa venne studiata nel 1800, in quanto molto elegante ed avanzata, in quel periodo. In seguito venne ritenuta molto utile per applicazioni fisiche ed ingegneristiche, quali gli "integrali sulle rette" e simili.
Facciamo alcuni richiami ai corsi precedenti:

Numeri Complessi

L'insieme dei numeri complessi si può pensare come $\mathbb{R}^2$:
$z = (x; y)$; $\mathbb{C} = \{(x;y) : x, y \in \mathbb{R}\}$

Esiste dunque una rappresentazione cartesiana associata alla forma $z = x + iy$; $i = (0;1)$ ad esempio.

Possiamo pensare a ogni numero z come rappresentabile mediante la base ortonormale di $\mathbb{R}^2$:
$z = x + iy = x(1;0) + iy(0;1)$

Dati due numeri $z = x + iy$, $w = s + it$,
- $z + w \triangleq (x+s) + i(y+t)$
- $z \cdot w \triangleq (xs - yt) + i(xt + ys)$

Saremo soliti dividere z in due parti: $Re(z)$ (parte reale), $Im(z)$ (parte immaginaria); $z = x + iy$; $x = Re(z)$, $y = Im(z)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Un numero si può anche rappresentare in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases} \Rightarrow z = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} & \text{(Norma)} \\ \vartheta = \operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{(Fase)} \end{cases}$$

N.B.: $\cos\vartheta + i\sin\vartheta = e^{i\vartheta}$;

$z = r e^{i\vartheta}$

Quando dobbiamo sommare due numeri, conviene usare le cartesiane; quando ne dobbiamo fare il prodotto, notiamo che, dati z_1 e z_2,

$z_1 = r_1 e^{i\vartheta_1}$; $z_2 = r_2 e^{i\vartheta_2}$, $\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$.

Trasformazioni in $\mathbb{C}$

È impossibile rappresentare in modo chiaro funzioni $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: infatti, essendo dominio e immagine $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^2$, avremmo bisogno di 4 dimensioni. Cerchiamo comunque di capire cosa succede, in altri modi; facciamo un esempio pratico per capire come procedere

$f(z) = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}$.

Posso pensare a $f(z)$ come composizione di due funzioni:

$z \xrightarrow{g} az \xrightarrow{h} az+b$. $\quad f = h \circ g(z)$.

$h(z) =$ "$+b$" è una semplice traslazione di "b" nel piano complesso; poiché $b = \mu + i\gamma$, avremo però una traslazione di μ sull'asse reale, sulle "ascisse", di γ sull'asse immaginario, sulle "ordinate".

Consideriamo $g(z) = a \cdot z$; $a = \alpha + i\beta$.

$z = x + iy$;

$f(z) = az = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)$

Possiamo scrivere la forma matriciale della funzione: pensiamo a

$s = \operatorname{Re}(f(z))$, $t = \operatorname{Im}(f(z))$,

$\begin{cases} s = \alpha x - \beta y \\ t = \alpha y + \beta x \end{cases}$; il vettore (s, t) si potrà scrivere

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Studiamo ora la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$:

$\det(A) = \alpha^2 + \beta^2 \geq 0$;

$\operatorname{Tr}(A) = 2\alpha$

Il polinomio caratteristico si può pensare come combinazione di determinante $\det(A)$ e traccia $\operatorname{Tr}(A)$ nel seguente modo:

$\lambda^2 - \operatorname{Tr}(A) + \det(A) = p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2)$.

$\Delta = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2) = -4\beta^2$

$$\lambda = \frac{2\alpha \pm \sqrt{-4\beta^2}}{2} = \alpha \pm i\beta$$

La nostra $g(z)$ è una rotazione e dilatazione/compressione del numero.

Altra operazione è il "coniugio":

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $f(z) = \bar{z}$;

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad z = x + iy \Rightarrow \bar{z} = x - iy.$$

Altri esempi di trasformazioni sono quelle polinomiali:

$f(z) = z^2$

Questa funzione è molto più difficile da studiare: non è lineare, quindi non agisce in modo uniforme ovunque; sarà molto più difficile studiarne gli effetti. In $\mathbb{C}$, i polinomi non sono spesso facili da studiare.

Trasformazioni invece interessanti sono le trasformazioni conformi: si tratta di funzioni razionali con numeratore e denominatore al più del primo ordine:

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{b_0 + b_1 z}$$

Esiste un teorema interessante:

Teorema: le trasformazioni conformi hanno la proprietà di trasformare rette e cerchi in rette e cerchi.

Altra funzione interessante è l'esponenziale:

$$f(z) = e^z \triangleq e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Topologia del piano complesso

Dato punto $z_0 \in \mathbb{C}$ definiamo il disco di raggio R e centro z_0

$$B(z_0;R) = \{ z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R \}$$

"Disco" è indicativo di un "intorno in più dimensioni", o, meglio, in 2; "Palla" è il termine più generale per parlare di intorno.

Dato sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{C}$,

- Dato $z_0 \in \mathbb{C}$, si dice "interno ad A" se $\exists R>0 : B(z_0;R) \subseteq A$.
- Dato $z_0 \in \mathbb{C}$, si dice "esterno ad A" se $\exists R>0 : B(z_0;R) \subseteq A^c$
- Dato $z_0 \in \mathbb{C}$, si dice "di frontiera" se $\forall R>0$, $B(z_0;R) \cap A \neq \{\emptyset\}$, $B(z_0;R) \cap A^c \neq \{\emptyset\}$

Notazioni:

- $\mathring{A}$: insieme dei punti interni di A
- ∂A = frontiera di A

Dato $A \subseteq \mathbb{C}$,

- Se ogni suo punto è interno, ossia $A \subseteq \mathring{A}$, A è "aperto"
- Se $\partial A \subseteq A$, allora si dice "chiuso": se contiene la frontiera, un insieme è chiuso.
- Data applicazione continua $\gamma : [a;b] \to \mathbb{C}$, A si dice "connesso per archi" se, $\forall z_1, z_2 \in A$, $\exists \gamma : [a;b] \to A : \gamma(a) = z_1, \gamma(b) = z_2$, continua.
- Si definisce "chiusura di A" $A \cup \partial A$.

Molto importanti saranno le due definizioni che ora daremo:

- $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice "Dominio" se è connesso per archi
- $A \subseteq \mathbb{C}$ si dice "Regione" se esiste dominio B tale per cui $B \subseteq A \subseteq B \cup \partial B$

Ad esempio, $B(z_0;R)$ è un dominio, $B(z_0;R) \cup \partial B(z_0;R)$ è una regione. Una regione non è per forza un chiuso, o, meglio, un chiuso non è per forza una regione. Definiamo ad esempio $A = \partial B(z_0;R)$; $\mathring{A} = \emptyset$, ma $\partial A = A$: è chiuso, ma non è una regione.

Le funzioni definite su $\mathbb{C}$ sono o su domini, o su regioni. Per questo, le due definizioni sono fondamentali.

Torniamo ora alle funzioni e alle applicazioni, introducendo un'osservazione interessante.

Dato $D \subseteq \mathbb{C}$ dominio, ed $f: D \to \mathbb{C}$,

$f(z) = u + iv$; $u = Re(z)$; $v = Im(z)$

$u = u(x;y)$ } Ogni funzione $f(z)$ complessa si può pensare
$v = v(x;y)$ } come una coppia di funzioni reali : $Re(z)$ e $Im(z)$.

$f(z) = u(x;y) + i \cdot v(x;y)$

Esistono casi in cui u e v dipendono una dall'altra, ma per ora non consideriamolo.

Riprendendo ad esempio l'esponenziale,

$f(z) = e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y$,

$$\begin{cases} u(x;y) = e^x \cos y \\ v(x;y) = e^x \sin y \end{cases}$$

Introduciamo ora in $\mathbb{C}$ qualche concetto interessante

Concetto di limite

Data $f: A \to \mathbb{C}$, A regione, dato $z_0 \in \mathring{A}$, cerco di formalizzare quest'idea: man mano che nel dominio mi avvicino al punto z_0, l'immagine si avvicinerà a l, anche se noi non abbiamo informazioni sul comportamento in z_0, ma solo nel suo intorno.

Si dice che $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall z \in B(z_0; \delta) \cap A, \ f(z) \in B(l; \varepsilon).$$

Ora, un'osservazione molto importante: i seguenti fatti sono equivalenti:

1) $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$; $f(z) = u(x;y) + i v(x;y)$

2) $\lim_{(x;y) \to (x_0;y_0)} u(x;y) = Re(l)$; $\lim_{(x;y) \to (x_0;y_0)} v(x;y) = Im(l)$

Questo perché :

$$\left(\left|u(x;y) - Re(l)\right|\right)^2 + \left(\left|v(x;y) - Im(l)\right|\right)^2 = |f(z) - l|$$

Continuità

Come possiamo aspettarci, f si dice continua in z_0 se $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Come su $\mathbb{R}$, i polinomi, gli esponenziali, e le solite funzioni sono continue in $z_0 = (x_0; y_0)$. Queste sono anche tendenzialmente derivabili in senso complesso, ma vedremo solo in seguito cosa significa ciò.

Funzioni trigonometriche complesse

Ricordiamo che, con $z = 1$, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$; $e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x)$

$\therefore e^{-ix}$ è il coniugato di e^{ix}.

$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ (per le formule goniometriche)

Possiamo ora dunque pensare alle funzioni $\cos x$ e $\sin x$ come combinazioni lineari di esponenziali.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad ; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

L'idea di base, è che queste sono anche le rappresentazioni complesse di seno e coseno. Cerchiamo le proprietà in $\mathbb{C}$ delle funzioni $\sin(z)$ e $\cos(z)$; vediamo se valgono le stesse che in $\mathbb{R}$;

Consideriamo $\sin^2(z)+\cos^2(z)=1$, e verifichiamo se è vero;

$z=x+iy$

$$\sin(z)=\sin(x+iy)=\frac{1}{2i}\left(e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{ix}\cdot e^{-y}-e^{-ix}\cdot e^{+y}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x-e^{y}\cos(-x)+ie^{y}\sin x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin x\cdot(e^{y}+e^{-y})+i\cos x\,(e^{y}-e^{-y})\right)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$$

Quindi, $u(x;y)=\sin x\cosh(y)$

$v(x;y)=\cos x\sinh(y)$

Analogamente, si dimostra che

$\cos(z)=\cos x\cosh y-\sin x\sinh y$

Si può verificare che

$\overline{\sin z}=\sin\bar{z}$; $\overline{\cos z}=\cos\bar{z}$;

$|\sin z|^2=\sin^2x+\sinh^2y$; $|\cos z|^2=\cos^2x+\sinh^2y$

Studiamo ora gli zeri delle funzioni $\sin(z)$ e $\cos(z)$: studiamo il modulo quadro

$$\sin(z)=0 \Rightarrow \sin x\cosh y=0 \Rightarrow \sin^2x+\sinh^2y=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0+k\pi\\ y=0\end{cases}$$

$$\cos(z)=0 \Rightarrow z=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$$

Si introducono anche le funzioni iperboliche in $\mathbb{C}$:

$\sinh(z)=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$; $\cosh(z)=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$; $\cosh^2(z)-\sinh^2(z)=1$

Valgono alcune proprietà:

$\sinh(iz)=i\sin(z)$ $\quad$ $\cosh(iz)=\cos(z)$

$\sin(iz)=i\sinh(z)$ $\quad$ $\cos(iz)=\cosh(z)$

Riprendiamo dal concetto di continuità; date due funzioni f, g,

$f,g:\Omega\to\mathbb{C}$, Ω regione, f,g continue, allora, nel punto $z_0\in\Omega$,

1) $f+g$ è continua in z_0
2) $f\cdot g$ è continua in z_0
3) $|f|$ è continua in z_0, idem $|g|$
4) Dato $g(z_0)\neq 0$, $\frac{f}{g}$ è continua in z_0

Scomponiamo ora f e g in:

$f(z)=u_1(x;y)+iv_1(x;y)$; $g(z)=u_2(x;y)+iv_2(x;y)$

Facciamo qualche considerazione:

$f+g=[(u_1(x;y)+u_2(x;y))+i(v_1(x;y)+v_2(x;y))]$.

Se f e g sono continue, lo sono anche u_1, u_2, v_1, v_2.

La stessa cosa vale per $f(z)g(z)$, $|f(z)|$, $\frac{f(z)}{g(z)}$.

Definizione: f si dice 'continua in Ω' se è continua per ogni $z_0\in\Omega$.

Ad esempio, i polinomi sono continui su tutto $\mathbb{C}$, le funzioni razionali lo sono per denominatore diverso da 0; abbiamo risolto così la questione sulla continuità: fino a ora, valgono le stesse proprietà di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$.

Derivate Complesse.

Anche la derivazione in campo complesso presenta similitudini ai casi reali; la definizione di potenza, ad esempio, è esattamente uguale. Vedremo però molte proprietà che su $\mathbb{R}$ non valgono; vediamo meglio.

Dato dominio Ω (dal momento che dobbiamo per forza considerare punti interni), $f(z)$ è derivabile in $z_0 \in \Omega$ se:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$ ESISTE ED È FINITO.

Questo limite è detto "derivata complessa di f in z_0: $f'(z_0)$.

Introduciamo le similitudini: ad 1 variabile reale, derivare significa scrivere la derivata come sviluppo di Taylor del 1 ordine della funzione:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = l \Rightarrow \frac{f(z)-f(z_0)-l\cdot(z-z_0)}{z-z_0} = 0$$

Possiamo dire che

$$f(z)-f(z_0)-l\cdot(z-z_0) \triangleq \omega(z) \quad : \quad \frac{\omega(z)}{z-z_0} \to 0, \quad z \to z_0$$

Da ciò, si desume che

$$f(z) = f(z_0) + l\cdot(z-z_0) + \omega(z)$$

$\begin{cases} f(z_0) = \text{funzione valutata in } z_0 \\ l = f'(z_0) \\ \omega(z) = \text{resto in forma di Peano} \end{cases}$

$\omega(z) = o(z-z_0)$, $z \to z_0$.

Proposizione: dire che f è derivabile in z_0, significa anche che è continua in z_0

Dimostrazione: data f derivabile in z_0, $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \omega(z)$

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(0) + 0 = f(z_0).$$

Proposizione: date f e g definite in dominio Ω, entrambe derivabili in z_0, allora

1) $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$

2) $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$

3) Data $g(z_0) \neq 0$, f nessuna condizione in più, $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{[g(z_0)]^2}$

Queste proprietà, analoghe a quelle in $\mathbb{R}$, si dimostrano anche in maniera analoga, parlando di algebra dei limiti.

Finora abbiamo trovato delle analogie; riprendiamo il concetto di differenziabilità, per poter introdurre qualcosa di nuovo.

Data $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (dominio), il concetto di differenziabilità in $(x_0; y_0)$ si può esprimere così:

f si dice differenziabile in $(x_0; y_0)$ se si può scrivere:

$$f(x;y) = f(x_0;y_0) + \alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0) + \omega(x;y) \quad ; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\omega(x;y) = \lim_{(x;y) \to (x_0;y_0)} \frac{\omega(x;y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \quad ; \quad \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0;y_0) \quad ; \quad \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0;y_0)$$

$$\omega(x;y) = o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right), \quad (x;y) \to (x_0;y_0)$$

Teorema: dato dominio Ω, $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x;y) + i\,v(x;y)$ allora sono fatti equivalenti:

1) f è derivabile in senso complesso in z_0

2) u e v sono differenziabili in $(x_0;y_0)$, e vale la proprietà:

$\left.\begin{array}{l} \text{I)} \ u_x(x_0;y_0) = v_y(x_0;y_0) \\ \text{II)} \ u_y(x_0;y_0) = -v_x(x_0;y_0) \end{array}\right\}$ Condizioni di Cauchy-Riemann

Se valgono le condizioni di Cauchy-Riemann, allora u e v sono differenziabili, ed f è derivabile in senso complesso.

Dimostrazione delle condizioni di Cauchy-Riemann: dovremo dimostrare che il punto 1 verifica il 2 e viceversa.

Dimostriamo $1 \longrightarrow 2$: abbiamo come ipotesi la derivabilità di f, e vogliamo trovare le condizioni di Cauchy-Riemann.

$f(z) = f(z_0)'(z-z_0) + f(z_0) + \omega(z)$, con $\omega(z) = o(z-z_0)$, $z \to z_0$.

Scriviamo $f(z)$ in componenti reali e immaginarie; in forma vettoriale:

$$f(z) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u(x;y) \\ v(x;y) \end{pmatrix} \qquad f(z_0) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u(x_0;y_0) \\ v(x_0;y_0) \end{pmatrix}$$

$$f'(z_0) = \alpha + i\beta \quad ; \quad f'(z_0)(z-z_0) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

$$\omega(z) = \begin{pmatrix} Re(x;y) \\ Im(x;y) \end{pmatrix}$$

Dunque, possiamo esprimere $f(z)$ in ~~forma~~ NOTAZIONE vettoriale

$$\begin{pmatrix} u(x;y) \\ v(x;y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0;y_0) \\ v(x_0;y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Re(z) \\ Im(z) \end{pmatrix}$$

Facendo ora i prodotti riga per colonna,

$$\begin{cases} u(x;y) = u(x_0;y_0) + \alpha(x-x_0) - \beta(y-y_0) + Re(\omega(x;y)) \\ v(x;y) = v(x_0;y_0) + \beta(x-x_0) + \alpha(y-y_0) + Im(\omega(x;y)) \end{cases}$$

Ma noi sappiamo che $\dfrac{\omega(z)}{|z-z_0|} \longrightarrow 0$, $z \to z_0$

Ma ciò è equivalente a:

$$\frac{Re(\omega(x;y))}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \xrightarrow[(x;y)\to(x_0;y_0)]{} 0 \qquad \frac{Im(\omega(x;y))}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \xrightarrow[(x;y)\to(x_0;y_0)]{} 0$$

Quindi, u e v sono differenziabili in $(x_0;y_0)$, e vediamo che:

$$\begin{cases} u_x(x_0;y_0) = \alpha \\ u_y(x_0;y_0) = -\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = \beta \\ v_y = \alpha \end{cases}$$

(derivando parzialmente le funzioni: $\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$; $\begin{cases} v_x = \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ v_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$)

Come convenzione, useremo sempre quella di u_x, u_y, v_x, v_y

Da ciò abbiamo dimostrato che:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Longrightarrow \text{CONDIZIONI DI CAUCHY RIEMANN.}$$

La dimostrazione $2 \longrightarrow 1$ si dimostra in modo analogo, "al contrario"; bisognerebbe, partendo dalle ipotesi, arrivare al rapporto incrementale.

Nomenclature: dato dominio Ω, $f: \Omega \to \mathbb{C}$, se f è derivabile in ogni punto di Ω, allora si dice "analitica" o "olomorfa". Se f è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$, allora si dice "intera".

Esempi di funzioni intere sono i polinomi:

$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$.

Si può verificare che le regole di derivazione sono analoghe a quelle su $\mathbb{R}$.

Esempio: verificare l'analiticità di $f(z) = e^z$

$f(z) = e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y$; $\begin{cases} u(x;y) = e^x \cos y \\ v(x;y) = e^x \sin y \end{cases}$

$u_x = e^x \cos y$; $u_y = -e^x \sin y$; $v_x = e^x \sin y$; $v_y = e^x \cos y$

$\Downarrow$

$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ Valgono le condizioni di Cauchy-Riemann per ogni $(x;y) \in \mathbb{R}^2$. La funzione $f(z) = e^z$ è intera.

Si può dimostrare questo teorema:
Teorema: se $f(z) \in C^{(1)}(z)$, allora $f(z) \in C^{(\infty)}(z)$.

Composizione di funzioni
Date le funzioni $f: \Omega \to \mathbb{C}$, Ω dominio
$g: \Omega_2 \to \mathbb{C}$, Ω dominio,
dato $z_0 \in \Omega$: $f(z_0) \in \Omega_2$, $f, g \in C^{(1)}$, $f \in C^{(1)}(z_0)$, $g \in C^{(1)}(f(z_0))$,
$g \circ f(z_0)$ è ben definita in un opportuno intorno di z_0, e la derivata vale:
$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.
Corollario: la composizione di funzioni intere è una funzione intera.

Esempio di non derivabilità
$f(z) = \bar{z}$.
$z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$. $\begin{cases} u(x;y) = x \\ v(x;y) = -y \end{cases}$
$u_x(x;y) = 1$; $u_y(x;y) = 0$; $v_x(x;y) = 0$; $v_y(x;y) = -1$

Una delle condizioni non è mai soddisfatta. La funzione "coniugo" non è analitica.
È abbastanza facile costruire funzioni con patologie tali da non essere derivabili.

Colleghiamo un argomento già accennato, alle funzioni olomorfe
Funzioni Armoniche
Una funzione $u: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$, si dice "armonica" se è di classe $C^{(2)}$, e $u_{xx}(x;y) + u_{yy}(x;y) = 0$, $\forall x, y \in \Omega$.
Esempio: data $u(x;y) = ax^2 + bxy + cy^2$, per quali valori è armonica?
$\begin{cases} u_x = 2ax + by \\ u_{xx} = 2a \end{cases}$ $\begin{cases} u_y = bx + 2cy \\ u_{yy} = 2c \end{cases}$
$2a + 2c = 0$
$\Downarrow$
$\underline{c = -a}$ PER QUESTI VALORI, LA FUNZIONE È ARMONICA.

Proposizione: data una funzione $f(z)$ olomorfa in Ω,
$f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$;
$u(x;y)$ e $v(x;y)$ sono funzioni armoniche.
Dimostrazione: partiamo dalle condizioni di Cauchy-Riemann:
$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ Deriviamo la prima rispetto a x, e la seconda rispetto a y

$\begin{cases} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$ Per il teorema di Schwartz, $v_{xy} = v_{yx}$.

Quindi, $u_{xx} = -v_{yy}$; $u_{xx} + v_{yy} = 0$.

Stesso processo per v:
$\begin{cases} u_{xy} = v_{yy} \\ v_{xx} = -u_{yx} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $v_{yy} = -v_{xx}$.

Osservazione: se u e v sono armoniche, non necessariamente $f = u + iv$ è olomorfa.

$f(z) = \bar{z}$ è armonica, ma non olomorfa.

Posso però cercare, di tutte le armoniche, l'armonica coniugata: una funzione tale per cui $f(z) = u(x;y) + i\,v(x;y)$; data u, possiamo provare a trovare v.

N.B: possono anche esistere infinite armoniche coniugate di una funzione.

Come trovare l'armonica coniugata di una funzione: esempio pratico.

Seguiamo questo esempio pratico:

$u(x;y) = x^2 - y^2 + 3y$

Usiamo le condizioni di Cauchy-Riemann, per trovare dove la funzione è armonica.

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = 2x \\ u_y = -2y + 3 \end{cases}$$

A questo punto, integriamo una delle due nell'altra incognita: vediamo per esempio di integrare u_x in dy.

$u_x = v_y \Rightarrow v(x;y) = \int v_y(x;y)\,dy = \int 2x\,dy = 2xy + k(x)$

La costante trovata può ancora dipendere dall'altra variabile di integrazione! Per questo, rideriviamo, per cercare la funzione che ci interessa.

$v_x = 2y + k'(x)$

Ma $v_x = -u_y$.

$-3 + 2y = 2y + k'(x) \Rightarrow k'(x) = -3$

Ora, integriamo in x

$k(x) = -3x + K$;

$v(x;y) = 2xy - 3x + K$

Questa è l'armonica coniugata di $u(x;y)$

Riassumendo:

1) Prendiamo una delle due equazioni e la integriamo nell'altra variabile, usando le uguaglianze delle condizioni di Cauchy-Riemann.
2) Deriviamo tale equazione integrata, nell'altra incognita, e la poniamo uguale a quella che già abbiamo
3) Integriamo e abbiamo trovato l'armonica coniugata.

Integrazione funzione di variabile complessa su curve.

Premessa: sia $f: [a;b] \to \mathbb{C}$ (curva)

$f(t) = u(t) + i\,v(t)$.

f si dice continua su $[a;b]$ se u e v sono continue in $[a;b]$.

Idem per la derivabilità: $f'(t) = u'(t) + i\,v'(t)$.

Valgono le usuali regole di derivazione, sulle curve. Inoltre,

$$\int_a^b f(t)\,dt \triangleq \int_a^b u(t) + i \int_a^b v(t)\,dt$$

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$$

Si possono anche applicare tutte le usuali tecniche di integrazione: vale ad esempio l'estensione della disuguaglianza triangolare:

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Passiamo ad analizzare qualche caso concreto, dopo questa prima premessa sulle possibilità di integrazione in $\mathbb{C}$.

Esempio pratico

$f(t) = e^{i\alpha t}$ $\quad t \in [a;b]$; $\alpha \neq 0$

$$\int_a^b e^{i\alpha t}\, dt = \frac{1}{i\alpha} e^{i\alpha t}\Big|_a^b = e^{i\alpha b} - e^{i\alpha a}$$

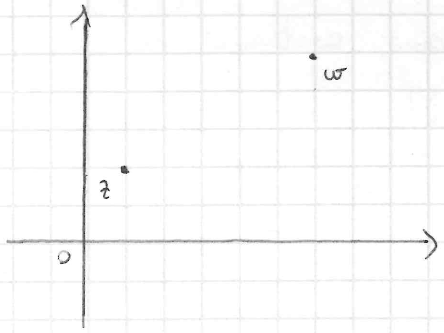
Se $\alpha = n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$\int_0^{2\pi} e^{int} = \frac{e^{int}-1}{in} = 0$$

Per noi le curve saranno simili a questa come caratteristiche: $C^{(1)}$ a tratti.

Come nel piano, possiamo fare molte cose sulle curve: data $\gamma:[a;b]\to\mathbb{C}$,
$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$; $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Esempio: dati due punti z e w, costruire una curva che li unisca.



$\gamma(a) = z$; $\gamma(b) = w$

$\gamma(t) = z + t(w - z)$

É possibile cambiare velocità, cambiare tempo, come su $\mathbb{R}^2$; unire due curve.

Lunghezza di una curva.

Data curva γ definita su $[a;b]$, la sua lunghezza L sarà

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Def. 1: una curva γ si dice semplice, se iniettiva: $\forall t_1 \neq t_2$, $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$.

Def 2: Una curva γ si dice "curva di Jordan" se

1) É chiusa: $\gamma(a)=\gamma(b)$.

2) É semplice, tranne che in a, b: $\forall t_1\neq t_2$, $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$, a parte a, b.
Solo il punto comune è il caso possibile di non iniettività.

Le curve di Jordan sono molto importanti perché esse "spezzano il piano complesso in due parti".

Teorema di Jordan: data γ curva di Jordan, esistono due aperti connessi, $A, B \subseteq \mathbb{C}$, A limitato e B non limitato, tra loro disgiunti, tali che $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,\gamma = A \cup B$.

A = Parte interna di γ

B = Parte esterna di γ

Definizione: un sottoinsieme $D\subseteq\mathbb{C}$ si dice "semplicemente connesso" se:

1) É connesso per archi

2) Se per $\gamma:[a;b]\to\mathbb{C}$, γ curva di Jordan, tale per cui $\mathrm{Im}\,\gamma\subseteq D$, allora anche l'interno della curva è contenuto in D: $\mathrm{Int}(\gamma)\subseteq D$.

$\mathbb{C}$ è semplicemente connesso, un intorno $B(z_0; R)$ è semplicemente connesso, ma una "ciambella" non è connessa semplicemente: "ha un buco dentro".

Fatta questa breve introduzione alle curve, ne facciamo una sui campi vettoriali:

Campi vettoriali

Un campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$ è una funzione

$\vec{E}: \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\quad \vec{E}(x;y) = (u(x;y); v(x;y))$

Dato $\vec{E}: \Omega \to \mathbb{R}$ campo vettoriale,

$\gamma: [a;b] \to \Omega$ curva

$$\int_\gamma \vec{E}\, d\vec{s} \triangleq \int_a^b \langle \vec{E}(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle \, dt =$$

$$= \int_a^b \left[u(x(t);y(t))\, x'(t) + v(x(t);y(t))\, y'(t) \right] dt$$

Si introduce un teorema fondamentale a questo punto.

Teorema di Green

$$\int_\gamma \vec{E}\, d\vec{s} = \iint_{\text{Int}\,\gamma} u_x(x;y) - v_y(x;y)\, dx\,dy$$

$\text{Int}\,\gamma$

Dato γ semplicemente connesso, dobbiamo poter integrare la circuitazione del campo nella parte interna della curva γ.

Iniziamo a definire gli integrali di variabili complesse: dato un dominio Ω, $f: \Omega \to \mathbb{C}$, continua, data $\gamma: [a;b] \to \Omega$, si definisca l'integrale di f lungo γ l'espressione

$\int_a^b f[\gamma(t)]\gamma'(t)\, dt$. N.B.: non si tratta del prodotto scalare, ma del prodotto complesso tra due grandezze.

$f(z) = u(x;y) + i\, v(x;y)$, $z = x + iy$; $\gamma(t) = x(t) + y(t)$

$f[\gamma(t)] = u(x(t); y(t)) + i\, v(x(t); y(t))$

Cerchiamo altre condizioni:

?

$$\text{Re}\left[f(\gamma(t))\gamma'(t)\right] = u(x(t);y(t))\, x'(t) - v(x(t);y(t)) \cdot y'(t)$$

$$\text{Im}\left[f(\gamma(t))\right] = u(x(t);y(t))\, y'(t) + v(x(t);y(t))\, x'(t)$$

Le parti reali si possono pensare come circuitazioni, ma non esattamente come prima: ora considereremo che l'integrale di $f(z)$ sulla curva γ sarà la somma degli integrali delle funzioni sopra scritte, in tal senso: $\text{Re}(f(z)) = \overrightarrow{u - v}$; $\text{Im}(f(z)) = \overrightarrow{v + u}$.

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = \int_\gamma (\overrightarrow{u;-v})\, d\vec{s} + i \int_\gamma (\overrightarrow{v;u})\, d\vec{s}$$

Ciò che stiamo facendo, è praticamente studiare le circuitazioni dei campi $(\overrightarrow{u;-v})$; e $(\overrightarrow{v;u})$.

Proprietà dell'integrale:

Dato Ω dominio, $f, g: \Omega \to \mathbb{C}$, $\gamma: [a;b] \to \Omega$ curva,

1) Vale la proprietà di linearità:

$$\int_\gamma \lambda f(z) + \mu g(z)\, dz = \lambda \int_\gamma f(z)\, dz + \mu \int_\gamma g(z)\, dz.$$

2) Vale la proprietà di inversione temporale

$$\int_{-\gamma} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$$

Dimostrazione:

$$\int_{-\gamma} f(z)\, dz = \int_{-b}^{-a} f(-\gamma(t))(-\gamma'(t))\, dt \;;\; -\gamma(t) = \gamma(-t); \Rightarrow -\int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t))\gamma'(t)\, dt$$

Sostituendo $s=-t$,

$$\Rightarrow -\int_a^b f(\gamma(s))\,\gamma'(s)\,ds.$$

3) Vale l'additività:

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

4) Sia $\gamma:[a;b]\to\Omega$, $f:\Omega\to\mathbb{C}$. Consideriamo $\eta:[c;d]\to[a;b]$.
$\eta\in C^{(1)}$: $\eta'(s)>0\ \forall s$.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma\circ\eta} f(z)\,dz$$

5) Data $\gamma:[a;b]\to\Omega$, $f:\Omega\to\mathbb{C}$, continua, $\exists M>0: |f(z)|\le M\ \forall z\in\Omega$.

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M\cdot L(\gamma)$$

Dimostrazione:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt \le |\gamma'(t)| \le M\cdot\int_\gamma |\gamma'(t)|\,ds = M\cdot L(\gamma).$$

Lemma di Goursat: se $f:\Omega\to\mathbb{C}$, Ω dominio semplicemente connesso, è olomorfa, e la integriamo su una curva di Jordan γ, allora
$$\int_\gamma f(z)\,dz=0.$$

In realtà, quello che abbiamo chiamato "lemma di Goursat", è una forma del teorema di Cauchy-Goursat.
Ricordiamo: data $f:\Omega\to\mathbb{C}$ olomorfa, e γ curva di Jordan,
$$\int_\gamma f(z)\,dz=0.$$

Facciamo un esempio pratico:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{1}{z}\,dz, \quad \Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i, \quad \gamma=e^{it}$$ (anche se è ininfluente).

Dimostrazione teorema di Cauchy-Goursat:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (\overrightarrow{u;-v})\,d\vec{s} + i\int_\gamma (\overrightarrow{v;u})\,d\vec{s} = \overset{\mathrm{I}}{\int_D (u_y+v_x)\,dx\,dy}$$ PER IL TEOREMA DI GREEN.

$$\overset{\mathrm{II}}{\int_\gamma (\overrightarrow{v;-u})\,d\vec{s}} = \int_D (v_y-u_x)\,dx\,dy = 0$$

Le condizioni di Cauchy e il teorema di Green permettono di verificare la validità di questo teorema.
Poiché tutto ciò si basa sulle condizioni di Cauchy-Riemann, allora il teorema di Cauchy-Goursat vale veramente per tutte le funzioni olomorfe. Gli integrali, di queste funzioni, saranno elementi molto rigidi, stabili.
Diamo una definizione:
Definizione: $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ si dice "dominio con bordo" se è una regione tale che la frontiera $\partial\Omega$ si può vedere come un'unione di supporti di curve di Jordan, disgiunte.

$\mathbb{C}$ è un dominio con bordo, $B(z_0;R)$ anche.

$\mathbb{C} \setminus \bigcup_n B(z_n; R_n)$ è un dominio con bordo.

Esiste un particolare orientamento di questi domini: viene detto "orientamento positivo" quello tale per cui un osservatore che percorre la frontiera, la vede sempre con a destra il resto, a sinistra Ω. Bisogna avere sempre a sinistra Ω.

Dato $\gamma_1 \dots \gamma_n$ curve di Jordan tali per cui $\bigcup_n \gamma_n = \partial\Omega$; data $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, D dominio tale per cui $D \supseteq \Omega \cup \partial\Omega$, allora possiamo integrare f nel seguente modo:

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz \triangleq \sum_{i=1}^{k} \int_{\gamma_i} f(z)\,dz.$$

Se f è anche olomorfa

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0.$$: si tratta di una generalizzazione di Cauchy-Goursat.

Se D è semplicemente connesso, e γ è una curva di Jordan in D, allora $\Omega = \mathrm{Int}(\gamma)$, ed è un dominio con bordo. L'immagine di γ sarà:

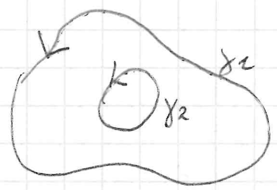
$\mathrm{Im}(\gamma) = \partial\Omega$.

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Troviamo ora qualcosa di molto interessante: vediamo un ottimo risultato.

Date γ_1, γ_2 curve di Jordan in D, $\mathrm{Im}(\gamma_2) \subseteq \mathrm{Int}(\gamma_1)$, entrambe percorse in senso antiorario, allora

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$



Dimostrazione: basta integrare con dominio $\Omega = \mathrm{Int}\,\gamma_1 \setminus \mathrm{Int}\,\gamma_2$

Si tratta di un dominio con bordo, ma non orientato secondo la convenzione: la curva γ_2 è orientata nel modo sbagliato, perché Ω è alla sua destra.

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\,dz = 0 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz;$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Ciò ci permette, data una γ_1 difficile da studiare, di sostituirla con una curva qualsiasi a nostra discrezione, e, grazie alle proprietà delle funzioni olomorfe, l'integrale non varierà.

Formula di Cauchy

Dato Ω dominio semplicemente connesso, e $z_0 \in \Omega$, $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, γ curva di Jordan in $\Omega \setminus \{x_0\}$, tale che $z_0 \in \mathrm{Int}(\gamma)$, allora

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0).$$

Abbiamo generalizzato il vecchio esempio di integrale di $\frac{1}{z}$, dimostrando la stabilità e la rigidità delle funzioni olomorfe.

La potenza della formula di Cauchy non è ben chiara dalla scrittura di prima: dato un $w \in \Omega$,

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z-w} dz$$

Partendo dallo studio della frontiera, siamo in grado di ricostruire un punto qualsiasi della funzione, grazie alla proprietà di essere olomorfa.
Possiamo considerarlo come un "integrale di ricostruzione".

Dimostrazione: data $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\tilde{\gamma} = z_0 + r e^{it}$

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} = \int_{\tilde{\gamma}_r} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

AGGIUNGO E TOLGO AL NUMERATORE LA GRANDEZZA $f(z_0)$.

$$= \int_{\tilde{\gamma}_r} \frac{f(z)+f(z_0)-f(z_0)}{z-z_0} dz = \int_{\tilde{\gamma}_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz + f(z_0) \int_{\tilde{\gamma}_r} \frac{dz}{z-z_0}$$

Ma $f_0 \int \frac{dz}{z-z_0} dz = f_0 2\pi i$.

Vogliamo dimostrare che $\int \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz = 0$.

f è continua in z_0, quindi $\exists \, \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |z-z_0| < \delta, \Rightarrow |f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$.

Io, al posto di δ, posso variare, per Cauchy-Goursat generalizzato, r.

Quindi,

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}_r} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} dz \right| \leq \sup_{z \in Im(\tilde{\gamma}_r)} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \right| 2\pi r;$$

Ma $|z-z_0| = r$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\pi \sup_{z \in Im(\tilde{\gamma}_r)} |f(z)-f(z_0)| \leq 2\pi\varepsilon.$$

Poiché ciò è vero per ogni ε, il nostro integrale è sempre $\leq$, allora possiamo minorare il nostro integrale quanto vogliamo, facendo tendere ε a 0.

Questa formula (di Cauchy) è molto utile perché è il punto di partenza per dimostrare che una funzione olomorfa ha derivate di ordine qualunque:

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d}{dw} \frac{f(z)}{z-w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz$$

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-n)^{n+1}} dz.$$

Successioni e Serie nel campo complesso

I concetti di limite, già introdotti per funzioni, ora si possono anche estendere a successioni e serie complesse.

Definizione: una successione complessa è una qualunque funzione $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.

Esempio 1: $a_n = 3n + i n^2$;

Esempio 2: successione geometrica:
$a_n = z_0^n$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Definizione: si dice che la successione complessa a_n tende al limite l, $l \in \mathbb{C}$, se:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \geq \bar{n}, \; |a_n - l| < \varepsilon$.

La definizione è analoga a quella in $\mathbb{R}$, anche se geometricamente molto diversa: per "n" sempre più grande, il disco di raggio r $B_0(l; r)$

darà stringersi sempre di più, fino a convergere nel punto l.

$\lim_{n \to \infty} a_n = l$ È la notazione usuale.

Proprietà dei limiti: dati $a_n \to l_1$, $b_n \to l_2$,

1) $a_n + b_n = l_1 + l_2$;
$a_n \cdot b_n = l_1 \cdot l_2$; $\quad b_n \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}$.

2) Dato $a_n \to l$, $|a_n - l| \to 0$: la successione reale $|a_n - l|$ tende a 0, quando a_n tende a l.

Saremo molto propensi dunque a ricondurci a casi reali, per studiare le successioni:

3) $a_n = x_n + i y_n \Longrightarrow \begin{cases} x_n = Re(a_n) \\ y_n = Im(a_n) \end{cases} \Longrightarrow a_n \to l \Rightarrow \begin{cases} x_n \to Re(l) \\ y_n \to Im(l) \end{cases}$

Esempio pratico:

$z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n = z_0^n$.

Possono studiare la successione in modulo, che è reale.

- $|z_0| < 1 \qquad a_n \to 0$
- $|z_0| > 1 \qquad a_n \to \infty$
- $|z_0| = 1$ Abbiamo diverse casistiche: $\begin{cases} z_0 = 1 \Rightarrow 1 \ \forall n & (\text{convergente}) \\ z_0 = -1 \Rightarrow (-1)^n \ \forall n & (\text{oscillante}) \\ z_0 = i \Rightarrow a_n = i^n & (\text{ciclica}) \end{cases}$

Serie su $\mathbb{C}$.

Data a_n successione su $\mathbb{C}$,

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad s_n$ è detta "ridotta n-esima associata alla successione a_n".

Il limite della sommatoria è detto "somma della serie": $\sum_{k=1}^{\infty} a_n = s$.

Proposizione: sia $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ una serie su $\mathbb{C}$. Se accade che la serie reale ottenuta prendendo i moduli della successione a_n converge, allora anche la serie complessa converge: vale la disuguaglianza

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} a_n \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_n|$$

Si tratta della convergenza assoluta, estesa su $\mathbb{C}$. Come su $\mathbb{R}$, convergenza assoluta implica convergenza semplice, non vale il viceversa.

Serie di funzioni - Serie di Potenze

Data a_n successione complessa, si dice "serie di potenze associata ad a_n" la serie

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^k \quad , z \in \mathbb{C}$, variabile.

Vale il seguente teorema: $\exists\, R \geq 0$ tale per cui

1) $\forall z : z < R$, $\sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^k$ CONVERGE

2) $\forall z : z > R$, la serie NON CONVERGE

3) Gli estremi vanno studiati caso per caso.

Inoltre, se esiste uno di questi due limiti, l'inverso rappresenta il raggio di convergenza:

- $\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$
- $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$

$\Bigg\} \; R = \frac{1}{l}$.

Si può generalizzare considerando una traslazione di z_0:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_n (z - z_0)^k.$$

Le serie di potenze sono derivabili, e dalle loro derivate si ottiene ancora una serie di potenze.

Conosciuto z_0, ed R raggio di convergenza, possiamo studiare una funzione f come serie di potenze:

Teorema: f è una funzione olomorfa su $B(z_0;R)$; essa è ivi espressa come serie di potenze, $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k (z-z_0)^k$. Allora, la sua derivata esiste ed è:

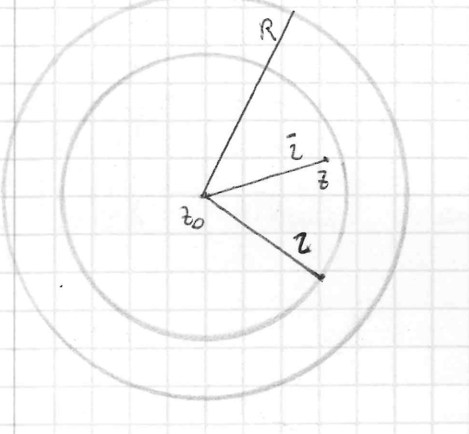
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}.$$

Teorema fondamentale: sia $f: B(z_0;R) \to \mathbb{C}$ funzione olomorfa. Allora f è anche analitica, ossia è esprimibile come somma di una serie di potenze, su $B(z_0;R)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0):$$

Si esprime, come su $\mathbb{R}$, mediante una serie di Taylor.

Dimostrazione: consideriamo i seguenti dati:



Abbiamo il nostro $B(z_0;R)$; un punto z interno a $B(z_0;R)$, distante $\bar{z}$ da z_0. Lavoriamo con la formula di Cauchy, considerando una curva di Jordan vicino a z, con supporto r: $B(z_0;r)$. $r<R$, $r>\bar{z}$.
$\bar{z}=|z-z_0|$. $\gamma(t) = re^{it}+z_0$.

Dalla formula di Cauchy, sappiamo che

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{s-z}\,ds$$

Aggiungiamo e togliamo, al denominatore, z_0. Per ora, trattiamo solo $\frac{1}{s-z}$.

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(s-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)}$$

Il nostro obiettivo è scrivere $\frac{1}{s-z}$ come serie di potenze. Stiamo cercando di ricondurci ad una serie semplice: quella geometrica.

$\left|\frac{z-z_0}{s-z_0}\right| < 1$: esso è $\left|\frac{\bar{z}}{r}\right|$.

La generica ~~ridotta~~ resto della serie geometrica, considerata quindi la somma fino al termine "n", sarà:

$$S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

D'altro canto, con "n-1", $S_{n-1}(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$

Considerando il teorema del resto della serie, sappiamo che la sommatoria per n che va da 1 a $+\infty$, coincide con la ridotta n-esima più il resto:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \frac{x^n}{1-x}$$

Ma noi come x considereremo $\frac{z-z_0}{s-z_0}$!

$$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^k + \frac{\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^n}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}$$

Vogliamo ora, operate queste sostituzioni, integrare per ottenere la forma integrale di Cauchy;

$$\frac{f(z)}{s-z} = \frac{f(s)}{s-z_0} \frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)} = \frac{f(s)}{s-z_0}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^k + \frac{\left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^n}{1-\frac{z-z_0}{s-z_0}}\right]$$

Chiamiamo il resto, ovvero il secondo termine, $\omega(z)$; integrato su γ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{s-t} ds = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{n-1}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k ds + \omega(z)$$

z_0?

È stato possibile "scambiare" sommatoria ed integrale poiché siamo in un campo finito, dal momento che lavoriamo con n, e così abbiamo garantita una qualsiasi convergenza in norma.

Considerando ipoteticamente $\omega(z) \to 0$, potremmo dire che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{k+1}}(z-z_0)^k ds = \frac{(z-z_0)^k f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

E dunque, abbiamo trovato il k-esimo termine della serie di Taylor; dimostriamo ora che ciò sia vero, verificando la convergenza a 0 di $\omega(z)$:

$$\omega_n(z) = \frac{1}{2\pi i}(z-z_0)^n \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)(s-z_0)^n} ds$$

Consideriamo il modulo di $\omega_n(z)$:

$$|\omega_n(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}(z-z_0)^n\right| \cdot \left|\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)(z-z_0)^n} ds\right|$$

Possiamo ora tentare di maggiorare $\frac{|z-z_0|^n}{2\pi}$: consideriamo $L(\gamma)$ la lunghezza della curva di Jordan γ; $|z-z_0|$ sarà $\bar{z}$;

$$|\omega_n(z)| = \frac{|z-z_0|^n}{2\pi} \le L(\gamma) \cdot \sup_{s\in \mathrm{Im}\,\gamma}\left|\frac{f(s)}{(s-z)(z-z_0)^n}\right|$$

Cerchiamo dunque di stimare $\left|\frac{f(s)}{(s-z)(z-z_0)^n}\right|$: possiamo vedere che $|f(s)|$ è il modulo di una funzione olomorfa, e dunque certamente continua; siamo su di una curva di Jordan, insieme chiuso e limitato. Per il teorema di Weierstrass, f è limitata su γ ed esistono massimo e minimo; esprimiamo meglio questo risultato

Data $|f(s)|$ continua su $B(z_0;R)$, $\mathrm{Im}(\gamma)$ insieme chiuso e limitato, per il teorema di Weierstraß applicato su $\mathbb{R}^2$,

$\exists M \in \mathbb{R} : |f(s)| \le M \quad \forall s \in \mathrm{Im}(\gamma)$

Trattiamo ora il denominatore:

$|s-z_0| = 2$; $|s-z| = |s-z_0+z_0-z| = |s-z_0-(z-z_0)| \ge |s-z_0| - |z-z_0| =$

$= 2-\bar{z}$

Applicando la disuguaglianza triangolare.

Dunque:

$$\left|\frac{f(s)}{(s-z)(z-z_0)^n}\right| \le \frac{M}{(2-\bar{z})\, 2^n} \quad \forall s \in \mathrm{Im}(\gamma)$$

Ma questo vale per tutto, quindi anche per $\sup\left|\frac{f(s)}{(s-z)(z-z_0)^n}\right|$; si ottiene che

$$|\omega_n(z)| \le 2\,\bar{z}^n \frac{M}{(2-\bar{z})\,2^n} = \frac{2M}{2-\bar{z}}\left(\frac{\bar{z}}{2}\right)^n$$

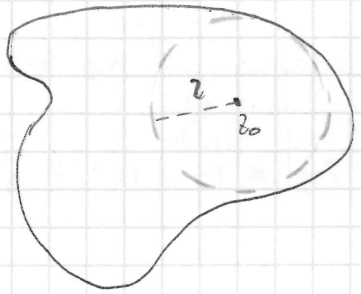
$$\frac{\bar{z}}{2} < 1 \implies \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\bar{z}}{2}\right)^n \to 0$$

Abbiamo in questo modo dimostrato che una funzione olomorfa è anche analitica.

Dove si annulla una funzione olomorfa, gli zeri della funzione sono punti isolati, ossia non di accumulazione.

Corollario: sia Ω un dominio, e sia $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa; se $z_0 \in \Omega$, e $f(z_0)=0$, ed f non è la funzione identicamente nulla, esiste $r>0$ tale per cui
$\forall z \in B(z_0; r) \setminus \{z_0\}$, $f(z) \neq 0$

Dimostrazione:



Si noti che l'analiticità si studia in di un cerchio $B(z_0;r)$; se Ω non è circolare, per ora non possiamo studiare l'analiticità;

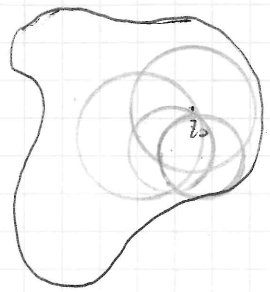
Sia $r>0$, $B(z_0;r) \subseteq \Omega$; poiché f è sviluppabile in serie di Taylor, possiamo scrivere:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \quad \forall z \in B(z_0;r)$$

$$= f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2 + \dots$$

$f(z_0)=0$; se $\exists k_0 \in \mathbb{N}: \ f^{(k)}(z_0)=0 \ \forall k \leq k_0-1, \ f^{(k_0)}(z_0) \neq 0$.

Se k_0 non esistesse, la funzione sarebbe nulla a tappeto su tutto il disco. La nota di fianco al disegno limita però alla nostra palla sul dominio; possiamo fare uno stratagemma: una volta studiato un cerchio, abbiamo tutto un cerchio di punti a noi noti; partendo da questo, potremo prendere un punto al suo interno, e costruire un cerchio di raggio arbitrario, purché inferiore a quello che supererebbe Ω, e continuare a prolungare la nostra condizione di analiticità.



Così, la funzione, riprendendo il ragionamento di prima, dovrebbe essere nulla su tutto Ω. Vediamo ora ciò:

$$f(z) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = (z-z_0)^{k_0} \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-k_0} =$$

$$= (z-z_0)^{k_0} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(k_0+j)}(z_0)}{(k_0+j)!}(z-z_0)^j, \quad \text{ponendo } k-k_0=j$$

$$f(z) = (z-z_0)^{k_0} g(z), \quad g(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{f^{(k_0+j)}(z_0)}{(k_0+j)!}(z-z_0)^j$$

$g(z)$ è semplicemente una traslazione della nostra funzione di partenza; fuori di z_0, la funzione non si annulla mai.

Ma inoltre, se $g(z)$ è olomorfa,

$$g(z_0) = \frac{f^{(k_0)}(z_0)}{(k_0)!} \neq 0$$

- $(z-z_0)^{k_0} = 0 \iff z = z_0$
- $|g(z_0)| > 0$

Per il teorema della permanenza del segno:

$\exists r>0 : |g(z_0)|>0 \ \forall z \in B(z_0; r)$

Quindi, se $z \in B(z_0;r) \setminus \{z_0\}$, avremo che $(z-z_0)^{k_0} \neq 0$, $g(z) \neq 0$, e quindi $f(z) \neq 0$

Studiamo ora qualcosa di più particolare: immaginiamo di aver a che fare con singolarità in funzioni; date f, g funzioni olomorfe su Ω e g non identicamente nulla,

$\frac{f}{g}$ è una funzione olomorfa su tutto $\Omega \setminus \{Z(g)\}$; $Z(g)=\{z_0 \in \Omega : g(z_0)=0\}$

Vogliamo poter studiare, in un loro intorno, anche le singolarità, mediante un'alternativa della serie di Taylor.

Sia $r>0$: $B(z_0;r) \cap Z(g) = z_0$

$F: B(z_0;r)\setminus\{z_0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa

Vogliamo sviluppare con una serie che non è una serie di potenze; vediamo cosa fare con F: analizziamo F su $B(z_0;r)\setminus\{z_0\}$

Osserviamo che $\exists K_0 \in \mathbb{N} : (z-z_0)^{K_0} f(z) = G(z)$, funzione estendibile a tutto $B(z_0;r)$ e qui olomorfa, scegliendo K_0 in modo tale che $g(z)=(z-z_0)^{K_0}\tilde{g}(z)$, dove $\tilde{g}(z_0)\neq 0$.

$(z-z_0)^{K_0}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)}{\tilde{g}(z)}$ Questa funzione coincide con una funzione olomorfa in z_0.

Si può dire che:

$G(z)=\sum_{K=0}^{+\infty} c_K (z-z_0)^K$; $c_K = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{G(s)}{(s-z_0)^K}\,ds$

Ma $F(z) = \frac{G(z)}{(z-z_0)^{K_0}} = \sum_{K=0}^{+\infty} c_K (z-z_0)^{K-K_0}$ $\forall z \in B(z_0;r)\setminus\{z_0\}$

Ponendo il cambio di variabile $K-K_0=j$,

$\Longrightarrow \sum_{j=-K_0}^{+\infty} c_{j+K_0}(z-z_0)^j$

Avrò uno sviluppo in serie con potenze anche negative.

Rinominiamo e rivediamo i c_j

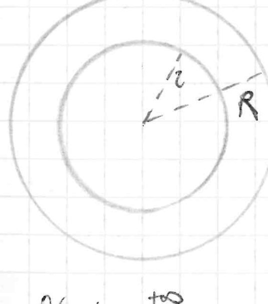
$$d_j = c_{j+K_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{G(s)}{(s-z_0)^{j+K_0+1}}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(s)\cancel{(s-z_0)^{K_0}}}{(s-z_0)^{\cancel{K_0}+j+1}}\,ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int \frac{F(s)}{(s-z_0)^{j+1}}\,ds$$

Abbiamo finalmente ottenuto lo sviluppo in serie di $F(z)$:

$F(z) = \sum_{j=-K_0}^{+\infty} d_j (z-z_0)^j$; $d_j = \int_\gamma \frac{F(s)}{(s-z_0)^{j+1}}\,ds$

Questo è anche detto "Sviluppo in Serie di Laurent"; esso è, per termini positivi, coincidente con lo sviluppo in serie di Taylor; K_0 è l'"ordine della singolarità" z_0 di F. z_0 è anche detto "polo di ordine K_0 per F". Se un polo è di ordine 1, allora si dice "semplice".

Teorema: sia $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$, e sia $f:\Omega \to \mathbb{C}$; $r \geq 0$



A tali ipotesi, f è sempre esprimibile in serie di Laurent, su Ω

$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_j (z-z_0)^j$; $d_j = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{j+1}}\,ds$

γ curva di Jordan appartenente a Ω tale che $B(z_0;r) \in \mathrm{Int}(\gamma)$.

Nel caso in cui lo sviluppo in serie di Laurent sia fatto su $B(z_0;R)\setminus\{0\}$, ed $r=0$, e se vi sono infiniti coefficienti $d_j \neq 0$, allora si dice che z_0 è una singolarità essenziale.

Facciamo ora un'osservazione molto interessante: prendiamo $j = -1$, e quindi d_{-1}:

$$d_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(s)\,ds.$$

Se io volessi calcolare l'integrale di $f(s)$ su γ, questo è uguale a $2\pi i\, d_{-1}$.

Se lavoriamo su $B(z_0;R)\setminus\{z_0\}$, il coefficiente d_{-1} prende il nome di "residuo della funzione f nel punto z_0": $d_{-1} = Res_f(z_0)$.

Data γ curva di Jordan, in $B(z_0;R)\setminus\{z_0\}$ tale che $z_0 \in Int(\gamma)$, allora

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, Res_f(z_0).$$

Teorema dei residui: sia $f: \mathbb{C}\setminus\{z_1 \dots z_k\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Sia γ curva di Jordan in $\mathbb{C}\setminus\{z_1 \dots z_k\}$: $z_1 \dots z_k \in Int(\gamma)$; allora,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{k} Res_f(z_i).$$

Dimostrazione

Sia $r_i > 0$: $B(z_i; r_i)$ non tocca alcuno degli altri punti di singolarità, e sia γ_i curva di Jordan coincidente con $\partial B(z_i; r_i)$ percorsa in senso antiorario.

$$\int_{\gamma \cup (-\gamma_i)} f(z)\,dz = 0$$ (APPLICANDO IL TEOREMA DI CAUCHY-GOURSAT).

$$= \int_\gamma f(z)\,dz - \sum_{j=1}^{k}\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz - 2\pi i \sum_{j=1}^{k} (z_j)$$

In questo modo, calcolo l'integrale in forma implicita.

Facciamo due esempi pratici di applicazione di questo teorema:

Esempio pratico 1

$f(z) = (z+1)\,e^{\frac{1}{z}}$; $\gamma = |z| < \frac{1}{3}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, Res_f(z)$$

Sviluppiamo f in serie di Laurent

$$f(z) = (z+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = z\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}z^n + \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}z^n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}z^{n+1} + \sum_{n=-\infty}^{0}\frac{1}{(-n)!}z^n$$

Vogliamo ottenere i residui di ciascuno dei due termini della somma; nel primo, $n = -2$, poiché abbiamo "$n+1$"; nel secondo, $n = -1$; da ciò:

$$\frac{1}{-(-2)!} + 1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad \int_\gamma f(z)\,dz = 3\pi i.$$

Esempio pratico 2

Vogliamo risolvere, mediante tecniche di analisi complessa, un integrale reale; vediamolo

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin t}\,dt \qquad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} \quad ; \quad I[0,2\pi] \Longleftrightarrow |z| = 1$$

$$\Longrightarrow \int_{|z|=1}\frac{1}{2+\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}}\,dt = \int_{|z|=1}\frac{2i}{4i+e^{it}-e^{-it}}\,dt$$

Moltiplichiamo sopra e sotto per "ie^{it}", per avere la derivata della parametrizzazione:

$$= \int_{|z|=1} \frac{2ie^{it}}{4ie^{it}+e^{2it}-1}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{2\gamma'(t)}{4i\gamma(t)+[\gamma(t)]^2-1} = \oint_{|z|=1} \frac{2}{4iz+z^2+1}\,dz =$$

⇒ APPLICHIAMO IL TEOREMA DEI RESIDUI.

$$z^2+4iz-1=0 \qquad z=\frac{-2i\pm\sqrt{-4+1}}{1} = -2i\pm i\sqrt{3}.$$

Abbiamo due singolarità.

1) $2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{2}{4iz+z^2-1}; z_1\right)$; $z_1=-2i+i\sqrt{3}$

$$= \frac{2}{(-2i+i\sqrt{3})(-2i-i\sqrt{3})} \Longrightarrow \frac{1}{z+(-2i+i\sqrt{3})}\cdot\frac{2}{z+(-2i-i\sqrt{3})}$$

Il termine $\frac{2}{(-2i-i\sqrt{3})}$ sarà il nostro d_1; valutiamolo in z_1:

$$\lim_{z\to-2i+i\sqrt{3}} \frac{2}{z+(-2i-i\sqrt{3})} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Analogo per l'altra singolarità; ma solo se essa è compresa nella circonferenza (o comunque nella curva di Jordan).

Proprietà della media

Supponiamo di avere una funzione f olomorfa in di un certo Ω; dato un punto z_0 in Ω, ed una circonferenza interamente contenuta in Ω, allora l'integrale avrà il significato di una media.
Formalizziamo meglio tutto ciò, e cerchiamo di capire meglio il significato:

Data f olomorfa su Ω, $B(z_0;r)\subseteq\Omega$, $f(z_0)$ è la media dei valori di f sulla circonferenza $B(z_0;r)$.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+re^{it})\,dt$$

Dimostrazione:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f[\gamma(t)]}{\gamma(t)-z_0}\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+re^{it})}{\cancel{re^{it}}}\,\cancel{i}\,\cancel{re^{it}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt.$$

Si noti che però, nonostante noi abbiamo solo parlato di funzioni olomorfe, la proprietà della media è valida anche sulle singole funzioni armoniche.

Partendo dalla proprietà della media, facciamo alcune osservazioni:
consideriamo

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt \qquad r=1,\; z_0=0$$

Stimiamo il modulo di questo integrale:

$$\left|\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi \sup_{t\in[0;2\pi]}|f(e^{it})|$$

Da ciò, si deduce che

$$|f(0)| \le \max_{|z|=1}|f(z)|$$

Se $|f(0)| = \max_{|z|=1}|f(z)| \Longrightarrow$ la funzione f è costante

Definiamo meglio ciò, nel seguente principio

Principio del massimo modulo

Dato $\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$, f olomorfa su $\bar{\Omega}$, $z_0 \in \text{Int}(\Omega)$, se $|f(z_0)|$ è uguale a $\max\{|f(z)| : z \in \bar{\Omega}\}$, allora f è necessariamente costante. Se f è costante, il massimo del modulo è interno a Ω. Se al contrario f è non costante ed olomorfa, il massimo del modulo sta sul bordo $\partial\Omega$. Ciò vale anche per funzioni $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, armoniche: $\text{Re}[f(z)] = u(x,y)$, $g(z) = e^{f(z)}$, si applica il principio del massimo modulo a ciò, e si verifica quanto detto.

Il problema di Dirichlet è un'interpretazione fisica di ciò: fissato un bordo di una membrana elastica, in prima approssimazione, la forza elastica avrà laplaciano nullo.

Teorema di Liouville

Data f intera, a meno che essa non sia costante, essa è comunque sicuramente limitata

Dimostrazione:

f intera $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

f limitata $\Rightarrow |f(z)| \leq M$, $\forall z \in M$.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad ;$$

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R \sup_{|z|=R} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} \quad ;$$

$$|a_n| \leq \frac{RM}{R^{n+1}} = \frac{M}{R^n} \quad ;$$

$$|a_n| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{M}{R^n} = 0.$$

Mediante tutti questi problemi, dimostriamo un teorema fondamentale sempre citato, ma molto difficile da validare

Teorema fondamentale dell'algebra.

Sia $p(z)$ un polinomio complesso non costante; p ha almeno una radice $z_0 \in \mathbb{C}$, e quindi $p(z_0) = 0$.

Dimostrazione: se $p(z) \neq 0 \ \forall z$, $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ è intera, e non dovrebbe presentare singolarità.

Essendo intera, vale il teorema di Liouville, e dunque sarebbe anche limitata, ma dunque costante. Ciò va contro l'ipotesi.

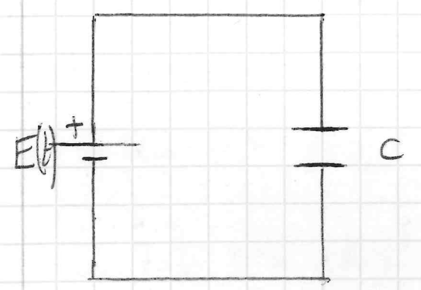
Con tutti i mezzi matematici introdotti, arrivare a questo teorema; si tenga però conto che è un risultato algebrico, ma che, per dimostrarlo, abbiamo usato tecniche analitiche piuttosto avanzate.

Teoria delle distribuzioni

Talvolta, per ottenere determinati modelli fisici, è necessario usare qualcosa di più "generale" del concetto di funzione; serve qualcosa che disponga di una maggiore "flessibilità" di quella delle normali funzioni finora studiate in Analisi Matematica. Alcune difficoltà e imperfezioni derivanti dall'uso di funzioni possono essere ovviate dall'uso di distribuzioni, ossia di una generalizzazione delle funzioni, introdotte da alcuni fisici che ne necessitavano per formalizzare alcuni modelli (ad esempio, Dirac); la teoria delle Distribuzioni dovrà dunque appoggiarsi su di un rigido formalismo, che impareremo poco a poco a trattare.

Esaminiamo due esempi applicativi, che ci permettono di vedere come il concetto di funzione è talvolta insufficiente per costruire modelli matematici efficaci:

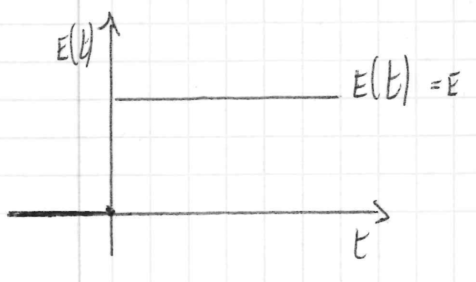
1) Consideriamo il seguente circuito



Il legame tra la corrente $i(t)$ nel circuito, e la forza elettromotrice $E(t)$, sarà:

$$E'(t) = \frac{1}{C}\, i(t)$$

Ciò presuppone che $E(t)$ sia derivabile; supponiamo che $E(t)$ sia un generatore che si attiva in $t=0$, e poi lavora in continua:



(Gradino di Heaviside)

Differenziando questa funzione si vede che otteniamo ciò:

$$E'(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ +\infty & t = 0 \end{cases}$$

Dire che $E'(t) = +\infty$, $t=0$ è poco formale, ma rende comunque l'idea seguente: la pendenza infinita, serve per modellizzare il "salto" da 0 ad E.

Dalle informazioni che abbiamo, se cerchiamo di invertire la funzione, otteniamo che $i(t)=0$ ovunque, tranne che per $t=0$:

$$E(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(s)\, ds$$

Il dilemma è questo: nella $i(s)$, non esistono informazioni in grado di riportarci realmente alla forma di $E(t)$, al valore E; fisicamente, cosa dovremmo intuitivamente dire? La corrente fluisce per un tempo molto breve con un picco in 0; ma come è possibile rappresentare un fenomeno impulsivo di questo genere?

2) Consideriamo questo problema: data una distribuzione di cariche, essa può essere di natura discreta, e cioè avere un numero finito di cariche o continua, cioè avere una densità di cariche; i due modi per "contare la carica totale" appartengono a mondi diversi: il primo è una sommatoria, il secondo un integrale.

$$Q_d = \sum_{i=1}^{n} q_i \;;$$

$$Q_c = \iiint_V \rho(x;y;z)\, dx\, dy\, dz.$$

La fenomenologia di fondo è la stessa, ma le operazioni sono molto diverse (anche se concettualmente collegabili).

Sarebbe interessante poter considerare le cariche puntiformi come "limite di cariche continue": dovrebbe esistere una funzione di densità in grado di trattare alla stessa stregua casi continui e discreti.

Consideriamo un caso unidimensionale, con una densità lineare di carica: consideriamo, come densità, la successione ρ_n

$$\rho_n(x) = q \cdot n \cdot p_{\frac{1}{n}}(x)$$

q = valore delle cariche;

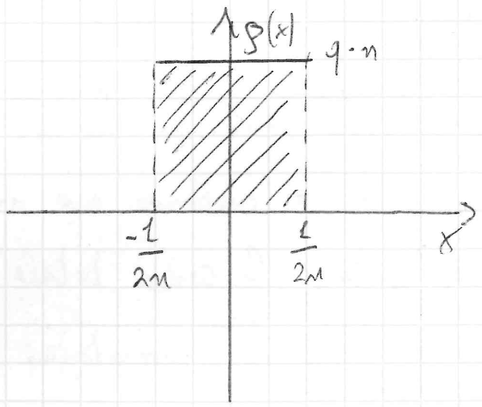
n = numero delle cariche;

$p_{\frac{1}{n}}(x)$ = funzione porta di ampiezza $\frac{1}{n}$

Ciò rappresenta una densità di carica omogenea centrata nell'intervallo: $\left[-\frac{1}{2n} ; \frac{1}{2n}\right] = I$.

La carica complessiva sarà l'integrale sulla retta reale della funzione:

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{\frac{1}{n}}(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} q \cdot n \cdot p_{\frac{1}{n}}(x)\,dx$$

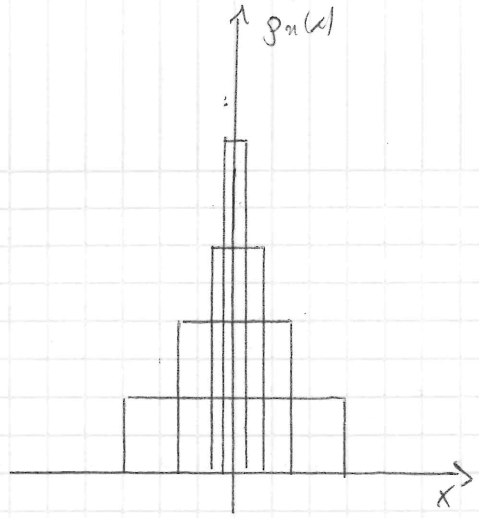


Abbiamo quindi rappresentato, mediante $P_I(x)$, la nostra distribuzione;

A cosa tende $\rho_n(x)$? Man mano che n cresce, lo "spessore" della porta decresce, e la carica sarà concentrata in uno spazio (in "lunghezza") sempre inferiore.

Possiamo rappresentare così:

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$



Per $x=0$, la densità tende ad aumentare, con l'aumentare di n, mentre in tutti gli altri punti avremo una successione "0 a tappeto".

Anche in questo caso, perdiamo informazioni sulla carica q: la funzione non è in grado di modellizzare questa fenomenologia, anch'essa di tipo impulsivo: il passaggio al limite elimina le informazioni su q, per noi fondamentali, e l'integrale su $\mathbb{R}$ nel modello sarà 0.

In fisica ed in ingegneria, spesso capita di aver a che fare con fenomeni di tipo impulsivo, come urti (in meccanica), o come i nostri due esempi (in elettromagnetismo). Per realizzare modelli in cui si vuole tener conto di impulsi di durata "praticamente nulla", la teoria delle Distribuzioni è assolutamente necessaria. Storicamente, il primo utilizzo serio risale al 1920 (Dirac), ma la prima formalizzazione è dovuta a Sobolev (nel 1935) e quindi a Schwartz (1950).

L'idea di fondo è assolutamente geniale: in fisica, le quantità studiabili sono oggetti misurabili, dunque dotate di errore di misura, di incertezza; un segnale è un oggetto non che fornisce istante per istante, idealmente, un valore, ma che fornisce una misura ad un determinato strumento di misura.

Ciò che ora considereremo come funzione, sarà il nostro "strumento di misura", mentre i segnali saranno applicazioni, da applicare ai nostri "strumenti".

La nostra idea, dunque, sarà la seguente: una misura non fornisce mai il valore in un preciso istante o in un preciso punto, perché lo strumento di misura comunque media la quantità da misurare nel tempo e nello spazio. Le misure saranno dunque descritte dalle medie fatte da una funzione (appartenente ad un certo spazio), applicandovi una certa applicazione.

Il segnale si potrà considerare come un'applicazione dallo "spazio delle funzioni test" al campo scalare.

Lo spazio delle funzioni test deve corrispondere ai possibili profili di misura che intendiamo considerare.

La scelta più classica di spazio delle funzioni test è lo spazio di Schwartz: $\mathcal{D}$; esso è lo spazio delle funzioni $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ a supporto compatto, ossia tali per cui $\exists R > 0 : \varphi(t) = 0, \ |x| > R$.

Aldilà di un certo valore R, la funzione deve essere identicamente nulla.

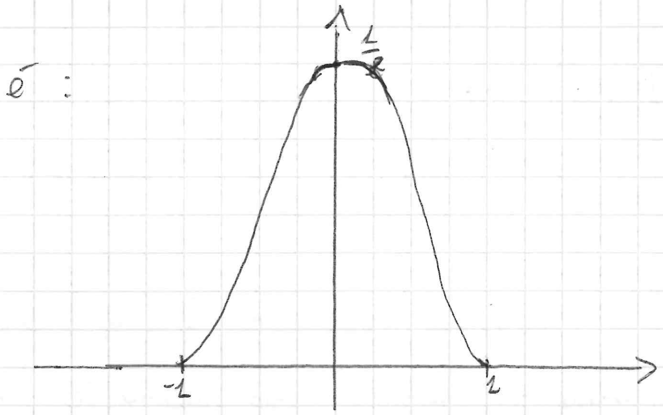
L'idea di fondo che meglio vedremo è questa: data $\varphi \in \mathcal{D}$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la misura di f, associata al profilo φ, o "applicata", sarà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Si può dire che lo strumento faccia una media dei valori, e così φ misuri il valor medio di f.

Esempio classico di $\varphi \in \mathcal{D}$ è:

$$\varphi = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$



È a supporto compatto, ed è un $C^{(\infty)}$.

Partendo da questo, se ne possono costruire molte altre:

$$\varphi_2(x) = \frac{\varphi(2x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2x)\,dx} \qquad \text{(vedremo dopo).}$$

Una volta definito lo spazio $\mathcal{D}$, definiamo una distribuzione:

Definizione: una distribuzione è una qualsiasi funzione $T: \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, che associa ad un qualunque test una misura (scalare reale), tale per cui:

1) $T(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda T(\varphi) + \mu T(\psi)$
2) T è continua.

La linearità non ci dice nulla di nuovo; la continuità è un discorso molto più delicato, che dovremo affrontare con le dovute premesse. Tendenzialmente, se T è continua, prendendo profili di misura vicini, i risultati dovrebbero essere altrettanto vicini. Vediamo

Esempio pratico:

Vogliamo verificare che le funzioni siano distribuzioni: Non preoccupandoci per ora della continuità, data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ad f si può associare, nel seguente modo, il profilo T_f:

$T_f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

L'integrale è un operatore lineare, la continuità non ci dà problemi, dunque le funzioni sono veramente distribuzioni.

Delta di Dirac (introduzione)

Dato $t_0 \in \mathbb{R}$, δ_{t_0} è così definita:

dato $\varphi \in \mathcal{D}$, $\delta_{t_0}(\varphi) \Longrightarrow \varphi(t_0)$

$\delta_{t_0} = \varphi(t_0)$ è una distribuzione in grado di "esaltare un valore nel punto t_0", esaltare un fenomeno in un punto "isolato".

Per poter continuare il nostro studio, sarà necessario riprendere alcuni studi di convergenza, nella fattispecie studiare il concetto di "convergenza uniforme"; riprenderemo dunque la δ, sia per linearità che per continuità.

Convergenza Uniforme

La convergenza uniforme è un concetto più generale della convergenza totale per serie di funzioni; data una funzione di variabile reale, ed una successione, fissati degli x_i in un intervallo I, si cerca la convergenza uniforme su I verificando punto per punto la convergenza puntuale.

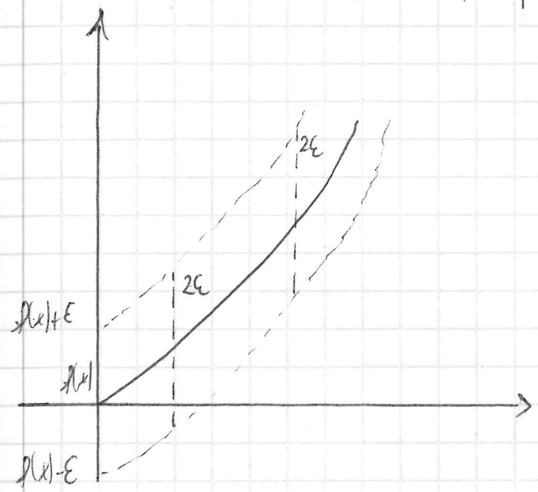
Si dice che la successione f_n converga puntualmente ad una certa $f : I \to \mathbb{R}$ se $\underbrace{\forall x \in I,}_{?}$ $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ (limite puntuale)

Ossia:

$$\forall x \in I, \left[\forall \varepsilon > 0,\ \exists \bar{n} : \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}\right] \text{ [puntualmente]}$$

Uniformemente, si chiede che la convergenza totale valga su tutto I: tra quadre abbiamo la condizione puntuale, estesa $\forall x \in I$.

Si deve avere, per ogni $x \in I$, un "intorno tubolare" che contiene interamente la funzione, perché in I vi sia convergenza uniforme.



Perché vi sia convergenza uniforme, la funzione deve essere interamente contenuta nell'intorno tubolare.

La convergenza uniforme implica la puntuale; mostriamo ora un'osservazione molto interessante per verificare la convergenza uniforme; si consideri:

$$a_n = \sup_{x \in I} \left| f_n(x) - f(x) \right|$$

Proprietà: ~~se~~ data $f_n \to f$ uniformemente, questo è vero se e solo se $a_n \to 0$

Dimostrazione $(\Longrightarrow)$

Dato $\varepsilon > 0$, a_n deve essere inferiore ad ε da un certo n in poi; dall'ipotesi di convergenza uniforme, sappiamo dunque che

$$\exists \bar{n} : \left| f_n(x) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq \bar{n},\ \forall x \in I$$

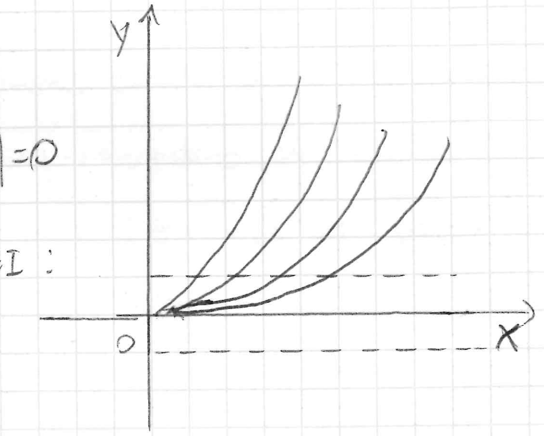
Quindi, dato $n > \bar{n}$, sappiamo per certo che:

$$a_n = \sup_{x \in I} \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Esempio pratico 1

$f_n(x) = \frac{x^2}{n}$, $x \in [0;1] = I$ $f(x) = 0$

Puntualmente, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0 \ \forall x \in I$:



Converge dunque puntualmente;

$$a_n = \sup_{x \in I} \left| \frac{x^2}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \longrightarrow 0, \ n \to \infty$$

Questo, per $I = [0;1]$: così, con un intervallo limitato, abbiamo la convergenza uniforme (del sup)

Se $I = [0; +\infty[$, la funzione non ha convergenza uniforme.

Esempio pratico 2

Data $f_n(x) = x^n$, $x \in I = [0;1]$; $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0;1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$

$$a_n = \sup_{x \in [0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0;1[} x^n$$

Non abbiamo convergenza uniforme; se l'avessimo, infatti:

1) Date f_n continue in $x_0 \in I$, allora f è continua in x_0; ma f è discontinua, e, poiché c'è questo "salto", allora la convergenza di f_n a f non può essere uniforme

2) Dato I limitato, ed f_n continue, allora

$$\int_I f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_I f(x)\,dx$$

Ossia "l'integrale del limite" va a convergere col "limite dell'integrale".

3) Se le f_n sono derivabili, ed esiste una funzione "g" tale per cui $f_n' \longrightarrow g$, uniformemente su I, allora necessariamente f è derivabile e la sua derivata è g.

Queste sono tre fondamentali proprietà e caratteristiche della convergenza uniforme; discutiamo la seconda e la terza, proponendo una breve dimostrazione

Dimostrazione proprietà 2

Dato $I = [a;b]$, limitato, vogliamo vedere che

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$$

Consideriamo il modulo della differenza dei due integrali, e sfruttiamo alcune disuguaglianze famose:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx$$

Maggioriamo ulteriormente, considerando il sup del modulo:

$$\leq \int_a^b \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|\,dx$$; Ma questa è una funzione costante, e l'integrale avrà forma:

$$= (b-a) \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$$

Per confronto, tenderà a 0.

Questo risultato richiede forti ipotesi, ma ci dà effetti altrettanto stabilenti.

Vedremo probabilmente che è comunque possibile ridurre le ipotesi; studiamo ora la terza proprietà, fondamentale.

Dimostrazione proprietà 3

Consideriamo $f_n \in C^{(1)}\left(\frac{I}{\mathbb{R}}\right)$; f_n' saranno continue; possiamo applicare alle f_n', che saranno integrabili, il punto 2, e quindi integrare le f_n'.

- $f_n' \longrightarrow g$ su I, uniformemente;
- f_n' e g sono funzioni continue

Fissiamo $x_0 \in I$, $x \in I$ (variabile)

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt \longrightarrow \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt = f_n(x) - f_n(x_0) \ ; \ \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt = f(x) - f(x_0)$$

Quindi,

$$f_n(x) - f_n(x_0) \longrightarrow f(x) - f(x_0)$$

Per il teorema del calcolo integrale,

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \implies f'(x) = g(x)$$

Abbiamo così dimostrato la proprietà

Queste tre proprietà devono contemporaneamente essere verificate, quando si studia una convergenza uniforme; se non lo fossero, o anche solo una non lo fosse, la convergenza allora non sarebbe uniforme: vediamo un esempio pratico:

Esempio pratico

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \qquad I = [0; 2\pi] \qquad f(x) = 0$$

$$\sup_{x \in I} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0, \quad n \to \infty$$

Deriviamo $f_n(x)$:

$$f_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\cos(nx)$$

Questa successione non converge neanche puntualmente!

Spessissimo utilizzeremo, nelle distribuzioni, il punto 3 in modo iterato: avendo garanzie sulla convergenza uniforme di una successione ad una funzione, l'avremo anche per le derivate prime, e quindi dalle derivate prime alle derivate seconde e via.

Vi è un collegamento tra la convergenza di serie (totale) e la convergenza uniforme; vediamo:

Data $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$, supponiamo esista successione numerica $M_n \geq 0$ tale per cui:

$$|f_n(x)| < M_n \quad \forall x \in I$$

Ossia la successione numerica M_n maggiora la successione di funzioni per ogni n, e per ogni x dell'intervallo per cui si studia la convergenza.

A tali condizioni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} M_n < +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) < +\infty$$

Questo è il criterio di Weierstraß, legante convergenza totale ed uniforme.

Notazioni sulle funzioni integrabili

Dato intervallo limitato I, $R^1(I)$ è l'insieme delle funzioni $f: I \to \mathbb{R}$ continue ovunque tranne al più in un insieme finito di punti, e tali che su ogni i-esimo intervallo $]x_i; x_{i+1}[$ siano assolutamente integrabili.

Ad esempio, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \in R^1(]-1;1[)$

Dati n intervalli che dividono $I = [a;b]$, data $f \in R^1(I)$,

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \triangleq \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x)|\,dx$$

Date n discontinuità, mediante questa definizione, si può ovviare il problema del calcolo dell'integrale

Dato I intervallo non limitato, si introduce un nuovo insieme: $R^1_{loc}(I)$ è l'insieme delle funzioni $f: I \to \mathbb{R}$ tali per cui, $\forall J \in I$, limitato, si ha che "f ristretta su J", $f|_J$ (cioè considerata solo su J), è $R^1(J)$. Si tratta in pratica di una verifica locale di $R^1(J)$, in diversi pezzi.

Data $f \in R^1_{loc}(I)$, posso considerare la cosiddetta "norma 1 di f":

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)|\,dx$$

Consideriamo ora un ampliamento progressivo dell'intervallo, studiando la norma 1 di f:

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| f|_{I \cap [-n;n]}(x) \right\|_1$$

Se il limite è finito, $f \in R^1(I)$, anche con I illimitato.

Possiamo definire dunque $R^1(I)$ così:

$$R^1(I) = \left\{ f \in R^1_{loc}(I) : \|f\|_1 < +\infty \right\}$$

Le funzioni continue sono un sottoinsieme di R^1_{loc}, ma non di R^1: ad esempio:

$f(x) = \sin(x) \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$; $f(x) \notin R^1(\mathbb{R})$

Si può definire uno spazio R^∞, e la sua relativa norma: la norma infinito.

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$$

R^∞ contiene segnali di ampiezza limitata, quali dente di sega o onda quadra. La norma infinito rappresenta il "picco della funzione", mentre altre norme, quali la norma 1 $\|f\|_1$ e la norma 2 $\|f\|_2$, tengono conto dell'energia complessiva del segnale. La norma infinito inoltre non tiene conto della durata del segnale, mentre le altre due sì.

Ci chiediamo se vi è un qualche legame tra $\|f\|_1$ e $\|f\|_\infty$;

Proposizione: se $I = [a;b]$, $f \in R^\infty(I)$, allora:

$$\|f\|_1 \le (b-a)\|f\|_\infty$$

Dimostrazione:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b \|f\|_\infty\,dx = (b-a)\|f\|_\infty.$$

Si parla di "convergenza in norma", e si hanno alcune implicazioni, a partire da queste; vediamo.

Definizione: dato I intervallo qualunque, $f_n \in R^1(I)$, $f \in R^1(I)$, si definisce la convergenza in norma 1 così:

$$f_n \to f \text{ in } R^1(I) \iff \|f_n - f\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Definizione: dato I intervallo qualunque, $f_n \in R^\infty(I)$, $f \in R^\infty(I)$, si definisce la convergenza in norma infinito:

$$f_n \to f \text{ in } R^\infty(I) \iff \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

La convergenza in norma ∞ coincide dunque con la convergenza uniforme delle funzioni. Se una funzione converge in norma ∞ inoltre, convergerà anche in norma 1: vediamolo meglio.

Corollario: se I è limitato, e $f_n, f \in R^\infty(I)$, se abbiamo:
$f_n \to f$ in $R^\infty(I)$, allora $f_n \to f$ in $R^{\infty}(I)$

Dimostrazione:
$$\|f_n - f\|_1 \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty .$$

Torniamo ora a parlare di distribuzioni; avevamo definito il nostro spazio delle funzioni test come:

$$\mathcal{D} = \{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;;\; \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \text{ a supporto limitato}\}$$

Ossia di funzioni regolarissime che, aldilà di un certo M, valgono 0. È possibile effettuare, sulle funzioni test, alcune operazioni in grado di favorirci nello studio delle distribuzioni; una fondamentale è il riscalamento: data $\gamma(x)$, è possibile riscalarla, modificando la variabile x con un'altra, per poi normalizzare a 1 la funzione:

Data $\gamma(x)$, $\gamma_2(x) = \gamma(2x)$,

$$\gamma_2(x) = \frac{\gamma(2x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(2x)\,dx}$$

Sono possibili anche operazioni di traslazione, derivazione, ed altre che vedremo quando serviranno.

Basandoci su ciò che abbiamo detto sulla convergenza di funzioni, introduciamo un nuovo concetto di convergenza, in ambito distribuzionale;

Definizione: data una successione $\varphi_n \in \mathcal{D}$, e funzione $\varphi \in \mathcal{D}$, si dice che $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ se accade che:

1) $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente su tutto $\mathbb{R}$, e anzi $\varphi_n^{(k)} \to \varphi^{(k)}$ $\forall k$ (uniformemente)
2) $\exists\, M$: $\varphi_n(x) = 0$, se $|x| > M$

Ossia φ_n deve esistere ed essere positiva solo in un certo intervallo, nulla al di fuori di esso.

Avevamo detto che una distribuzione T è una funzione che trasforma elementi dello spazio delle funzioni test $\mathcal{D}$ in $\mathbb{R}$, tale che sia

1) Lineare
2) Continua

La linearità non offre problemi; parliamo finalmente della continuità: essa è verificata se:

$$\forall \varphi_n, \varphi \in \mathcal{D}, \text{ tali che } \varphi_n \to \varphi \implies T(\varphi_n) \to T(\varphi)$$

Il valore della distribuzione sul profilo φ_n deve convergere anche sul profilo φ; T non si limita a far entrare in campo φ e φ_n, ma anche le loro derivate, che devono convergere.

Osservazione: dire che $\varphi_n \longrightarrow \varphi$, equivale a dire che $\varphi_n - \varphi \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0$
Sarà più facile far ciò, per studiare la continuità.

Osservazione: data T continua, si verifica ciò:
T continua $\iff \forall \varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0 \implies T(\varphi_n) \longrightarrow 0$

Dimostrazione:
$(\Longrightarrow)$ Basta considerare $\varphi = 0$ ed è fatto
$(\Longleftarrow)$ Se vale $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} \varphi \implies \varphi_n - \varphi \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0$

Facciamo ora alcuni esempi, al fine di capire meglio:

- Delta di Dirac

Data $T = \delta_a$, $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$
La δ è lineare: data $T = \lambda \delta_a + \mu \delta_b$, $T = \lambda \varphi(a) + \mu \varphi(b)$.
La continuità, si verifica così: data $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0$, sappiamo se $T(\varphi_n) \longrightarrow 0$?
$T(\varphi_n) = \delta_a(\varphi_n) = \varphi_n(a)$
Ora, φ_n tende a 0? Per ipotesi, $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0$, ma a noi basta sapere se lo farà in a, cosa ovvia, visto che per ipotesi φ_n tende uniformemente a 0

- Distribuzioni regolari

Data $f \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$, la sua distribuzione associata T_f è così definita:

$$T_f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

Ha senso dire ciò? Beh, R^1_{loc} come condizione è sufficiente, poiché φ è nulla a tappeto al di fuori di un certo intervallo; dato M, tale per cui
$\varphi(x) = 0, \quad |x| > M$

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{-M}^{M} f(x)\varphi(x)\,dx$$

f è integrabile localmente su $\mathbb{R}$, φ è continua (e anzi $C^{(\infty)}$), quindi non abbiamo problemi a integrare; verifichiamo se e perché T_f è una distribuzione:
- La linearità è propria dell'operatore integrale, quindi è verificata
- La continuità è fatto più delicato: data $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0$, $T_f(\varphi_n) \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0$?

$$T_f(\varphi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_n(x)\,dx$$

Ma l'integrale tende a 0? Non è sicuro, perché φ_n non presenta problemi, ma f potrebbe presentare asintoti. Dobbiamo ancora una volta sfruttare il fatto che il supporto è equilimitato, ossia:
$\exists M > 0 : \varphi_n(x) = 0, \forall x : |x| > M, \forall n.$

$$\implies \cancel{T_f =}\ T_f(\varphi_n) = \int_{-M}^{M} f(x)\varphi_n(x)\,dx$$

Prendiamo i valori assoluti, e sfruttiamo la disuguaglianza triangolare:

$$|T_f(\varphi_n)| = \left| \int_{-M}^{M} f(x)\varphi_n(x)\,dx \right| \leq \int_{-M}^{M} |f(x)\varphi_n(x)|\,dx \leq \int_{-M}^{M} |f(x)| \sup_{x \in [-M;M]} |\varphi_n(x)|\,dx =$$

$$= \sup_{x \in [-M;M]} |\varphi_n(x)| \cdot \int_{-M}^{M} |f(x)|\,dx$$

Ma φ_n è nulla a tappeto (converge uniformemente a 0), dunque anche il sup, ed anche l'integrale moltiplicato per 0 sarà 0. Per confronto, $T_f(\varphi_n) \longrightarrow 0$.

L'insieme delle distribuzioni si indica con "$\mathcal{D}'$"; esiste una notazione particolare, che noi useremo spesso, per le distribuzioni regolari:

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx = \langle T_f | \varphi \rangle$$

Ossia riconduce la distribuzione ad un prodotto scalare. Si legge "prodotto scalare di T_f contro φ". Questa notazione ha senso solo con distribuzioni regolari, ma vedremo che la useremo comunque spesso.

Operazioni sulle distribuzioni

Vi sono fondamentalmente 4 operazioni effettuabili sulle distribuzioni:

1) Traslazione
2) Riscalamento
3) Moltiplicazione
4) Derivazione

La distribuzione T varia nello spazio delle funzioni test, quindi vogliamo capire cosa capita quando facciamo un'operazione. Ciò che conta è che, al termine delle nostre congetture, si abbia

1) Linearità e continuità
2) La possibilità di fare "localizzazioni", ossia di studiare i fatti "localmente".

Studiamo ora queste 4 operazioni:

1) Traslazione

Consideriamo il caso regolare: $f \in R^1_{loc}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x-x_0)$

Che rapporto c'è tra T_f e T_g? Cosa capita cioè sulla distribuzione?

$$\langle T_g | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x_0)\varphi(x)\,dx$$

Consideriamo il cambio di variabile $x-x_0 = t$; $dx = dt$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t+x_0)\,dt = \langle T_{f(t)} | \varphi(t+x_0) \rangle$$

Questa notazione può trarre in inganno: T_f varia in φ, non è funzione di t! $T_f(t)$ serve ad indicare che il profilo φ su cui studiamo T_f, varia in t, e non in "x_0" (che è dunque costante) o in $t+x_0$, o cos'altro. $T_f(t)$ significa "T_f il cui profilo varia in t".

Per essere ancora più precisi, facendo $x=t$, possiamo dire che

$\langle T_{f(x-x_0)} | \varphi(x) \rangle = \langle T_{f(x)} | \varphi(x+x_0) \rangle$

Abbiamo cioè "scaricato" la traslazione dalla distribuzione alla funzione test. Ciò verrà fatto su ogni operazione (in modi chiaramente diversi).

Il prossimo step, che sarà sempre fatto, sarà definire la nostra operazione ricavata nel caso regolare, ad ogni distribuzione, imponendo che siano uguali le caratteristiche: il caso regolare viene imposto come caso generale, da noi, per definizione.

Data $T \in \mathcal{D}'$, $x_0 \in \mathbb{R}$, definiamo così la traslazione "in avanti" di x_0, "$T(x-x_0)$", col prodotto scalare:

$\langle T(x-x_0) | \varphi(x) \rangle \triangleq \langle T(x) | \varphi(x+x_0) \rangle$

Esempio: delta di Dirac

Data $T(x) = \delta_a(x)$,

$\langle \delta_a(x-x_0) | \varphi(x) \rangle = \langle \delta_a(x) | \varphi(x+x_0) \rangle$; ma $\delta_a(x) = \varphi(a)$;

$\Rightarrow \langle \delta_a(x) | \varphi(x+x_0) \rangle = \varphi(a+x_0) = \langle \delta_{a+x_0}(x) | \varphi(x) \rangle$

Quindi,

$\delta_a(x-x_0) = \delta_{a+x_0}(x)$.

Non abbiamo però verificato linearità e continuità dell'operazione di traslazione; verifichiamole

- Linearità: applichiamo $T(x-x_0)$ a due funzioni test: $\lambda\varphi_1(x)$ e $\mu\varphi_2(x)$

$\langle T(x-x_0) | \lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x) \rangle = \langle T(x) | \lambda\varphi_1(x+x_0) + \mu\varphi_2(x+x_0) \rangle =$

$= \lambda \langle T(x) | \varphi_1(x+x_0) \rangle + \mu \langle T(x) | \varphi_2(x+x_0) \rangle =$

$= \lambda \langle T(x-x_0) | \varphi_1(x) \rangle + \mu \langle T(x-x_0) | \varphi_2(x) \rangle$

Abbiamo preso l'inizio, applicato la definizione, e siamo tornati all'inizio.

- Continuità

Data successione $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{D}]{} 0$, $\langle T(x-x_0) | \varphi(x) \rangle \longrightarrow 0$?

$\langle T(x-x_0) | \varphi(x) \rangle = \langle T(x) | \varphi(x+x_0) \rangle$

Se le funzioni erano equilimitate prima, lo saranno pure dopo, solo con il supporto traslato di x_0. In $\mathcal{D}$, dopo un certo $\pm M \pm x_0$, gli oggetti saranno comunque 0. Quindi, poiché T varia in $\mathcal{D}'$,

$\langle T(x) | \varphi_n(x+x_0) \rangle \longrightarrow 0$.

2) Riscalamento

Data $f \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, vogliamo studiare $T_{f(ax)}$, ossia la distribuzione associata alla funzione $f(ax)$.

Ripartiamo dal caso regolare:

$\langle T_{f(ax)} | \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\varphi(x)dx$; $t = ax \Leftrightarrow x = \frac{t}{a}$; $dx = \frac{1}{a}dt$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi\left(\frac{t}{a}\right)\frac{dt}{|a|}$ [$|a|$ poiché a può essere negativo].

$= \langle T_{f(t)} | \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{t}{a}\right) \rangle$

Abbiamo dunque "scaricato il riscalamento" sulla funzione test:

$\langle T_{f(ax)} | \varphi(x) \rangle = \langle T_{f(x)} | \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right) \rangle$

Estendiamo: data $T \in \mathcal{D}'$, definiamo il riscalamento di fattore a, $T(ax)$, così:

$\langle T(ax) | \varphi(x) \rangle \triangleq \langle T(x) | \frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{x}{a}\right) \rangle$

Si dimostra anche qui continuità e linearità.

3) Moltiplicazione

Date $f, g \in R^1_{loc}$, $f \cdot g \in R^1_{loc}$, vogliamo studiare la distribuzione del prodotto, T_{fg}

$\langle T_{fg} | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,\varphi(x)\,dx$

Vogliamo scaricare il prodotto su φ; l'idea è la seguente:

$\langle T_{f \cdot g} | \varphi \rangle = \langle T_f | g \cdot \varphi \rangle$

Vogliamo cioè considerare g come parte della funzione test.

Il supporto di g non ci preoccupa, perché $g \cdot \varphi$ ridoce comunque a compatto il supporto della nuova funzione test. Il problema è che $\mathcal{D}$ richiede anche che $f \cdot g \in C^{(\infty)}$, cosa possibile se $g \in C^{(\infty)}$. Solo a queste condizioni, è possibile definire la moltiplicazione.

Data $T \in \mathcal{D}'$, e $g \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, il prodotto $T \cdot g$ è dato da:

$\langle g \cdot T | \varphi \rangle \triangleq \langle T | g \cdot \varphi \rangle$

Si possono dimostrare linearità e continuità.

4) Derivazione

La derivazione è l'operazione centrale delle distribuzioni, è il motivo per cui sono state create. Trattiamola:

data $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$, $f, f' \in R^1_{loc}$ (sono per ipotesi precedente)

$$\langle T_{f'} | \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

Come al solito ci stiamo riconducendo al caso generale, e vorremo scaricare l'operazione di derivazione sulla funzione test, φ. Integriamo per parti, e sfruttiamo l'equilimitazione a M:

$$\Rightarrow \int_{-M}^{M} f'(x)\varphi(x)\,dx$$

Integrando per parti, si ottiene:

$$\int_{-M}^{M} f'(x)\varphi(x)\,dx = \Big[f(x)\cdot\varphi(x)\Big]_{-M}^{M} - \int_{-M}^{M} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

Ma $\Big[f(x)\cdot\varphi(x)\Big]_{-M}^{M} = f\big(\varphi(M) - \varphi(-M)\big) = 0$

$$\Rightarrow = -\int_{-M}^{M} f(x)\varphi'(x) = \langle T_f | -\varphi' \rangle$$

Estendiamo al solito la definizione regolare ad una generale:

data T', essa si può definire come:

$\langle T' | \varphi \rangle \triangleq \langle T | -\varphi' \rangle = -\langle T | \varphi' \rangle$

Abbiamo così introdotto una cosa strepitosa: una distribuzione si può sempre derivare, perché $\varphi \in C^{(\infty)}$.

Esempio pratico: funzione di Heaviside

Data la funzione "gradino di Heaviside" così definita:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad ; \quad H(x) \in R^1_{loc}(\mathbb{R})$$

$H'(x) = 0$ ovunque, tranne che in $x=0$, dove non è derivabile.

Studiamo la sua distribuzione:

$T_{H(x)}$.

$$\langle T_{H(x)}' | \varphi \rangle = -\langle T_{H(x)} | \varphi'(x) \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx$$

$$= \Big[-\varphi(x)\Big]_0^{+\infty}$$

Ma in $+\infty$ la funzione vale 0; avremo così:

$$-\Big[-\varphi(0)\Big] = \varphi(0) = \delta_0(x)$$

$$T'_{H(x)} = \delta_0(x)$$

Non era possibile derivare la funzione di Heaviside, ma sì la sua distribuzione, ed è una delta di Dirac.

Tipicamente, ogni "salto" è rappresentabile proprio mediante la funzione δ.

Convergenza di distribuzioni

È possibile introdurre, nello spazio delle distribuzioni $\mathcal{D}'$, un concetto di convergenza: data una successione di distribuzioni T_n, ed una distribuzione T, si dice che T_n converge a T se:

$T_n \xrightarrow[\mathcal{D}']{} T$ se $\langle T_n | \varphi \rangle \longrightarrow \langle T | \varphi \rangle \ \forall \varphi \in \mathcal{D}$.

Ossia, se la successione delle T_n testate contro un qualsiasi profilo φ converge a T testata sullo stesso profilo, allora si dice che si ha la "convergenza debole delle distribuzioni".

Facciamo alcuni esempi pratici:

1) $T_n = \delta_n$

Abbiamo una successione di delta di Dirac.

- Ha limite?
- Se sì, quanto vale?

Sappiamo che $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, supp. $\varphi \subseteq [-M; M]$; $\exists M : \varphi(x) = 0 \ \forall x : |x| > M$.

Quindi,

$\langle \delta_n | \varphi \rangle = \varphi(n) = 0, \ \forall n > M$. (perché φ è a supporto compatto).

Quindi,

$\langle \delta_n | \varphi \rangle \longrightarrow 0 \ \forall \varphi$

2) $T_n = (\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_0) \cdot n$

$$\langle T_n | \varphi \rangle = \frac{\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0)}{\frac{1}{n}} = \varphi'(0) = -\langle \delta_0' | \varphi \rangle.$$

$T_n \longrightarrow -\delta_0'$

3) $T_n = (-1)^n \delta_2$

$\langle T_n | \varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta_2 | \varphi \rangle = (-1)^n \varphi(2)$

Se $\varphi(2) \to 0$, allora abbiamo convergenza; in altri casi, il limite oscilla.

Generalmente, T_n non converge dunque, perché non converge $\forall \varphi$.

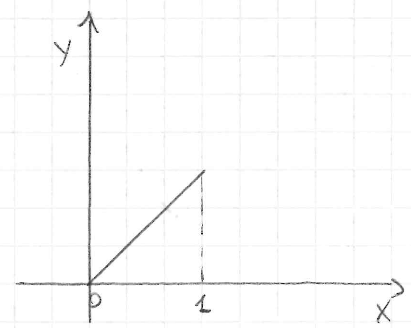
Può tornare utile, per alcuni esercizi, la seguente osservazione, riguardante la derivazione di distribuzioni

Proposizione: data $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ (a tratti), con n discontinuità finite, che chiameremo $\{x_k\}$, $k = 1 \dots n$, allora:

$$\Longrightarrow T_f' = T_{f'} + e\,\delta_1 \Longrightarrow T_{f'} + \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k^+) - f(x_k^-) \right] \delta_{x_k}.$$

Esempio pratico

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



$T_f' = T_{f'} + \delta_0 (f(0^+) - f(0^-)) + \delta_1 (f(1^+) - f(1^-)) = T_{f'} - 1$

Continuiamo a parlare di proprietà delle distribuzioni, parlando del loro supporto.

Supporto della distribuzione

Si parla di studio del supporto di una distribuzione, quando si studiano gli intervalli all'interno dei quali la distribuzione è nulla.

Data una funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, se trovo un certo intervallo I aperto in cui la funzione è nulla, si dice che f è nulla su I se $f(x)=0\ \forall x\in I$.
Partendo da qui, si definisce l'insieme di nullità $N(f)$ come l'unione di tutti gli intervalli aperti in cui la funzione è nulla.
$N(f)$ generalmente può essere un insieme sconnesso: nei casi a noi più favorevoli, sarà una semiretta, negli altri un generico aperto.
Definizione: il supporto della funzione f, $supp(f)$, è così definito:
$supp(f) \triangleq [N(f)]^C$
Uno zero isolato non appartiene all'insieme di nullità: infatti,
$supp(f) = \overline{\{x\in\mathbb{R} : f(x)\neq 0\}}$
Ossia, il supporto della funzione f è la chiusura dell'insieme di punti in cui la f è non nulla.

Parliamo ora di distribuzioni: data una distribuzione $T\in\mathcal{D}'$, si può dire che T è nulla su di un intervallo I, se, misurandola su I, risulta essere nulla. Questo, per ogni profilo di misura che si utilizzi.
Definizione: data $T\in\mathcal{D}'$, T si dice nulla su I se $\forall\varphi\in\mathcal{D}$, $supp(\varphi)\subseteq I$,
$\Longrightarrow \langle T|\varphi\rangle=0$.
Esempio pratico 1:
$N(T)$, $T=T_f$, $f\in R^1_{loc}$
$N(T)=N(f)$
L'insieme di nullità della distribuzione regolare coincide con quello della funzione ad essa associata.

Esempio pratico 2:
$T=\delta_{x_0}$
$supp(T)=\{x_0\}$; $N(T)=\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$
Data una certa φ, φ tale per cui
$supp(\varphi)\subseteq\ ]x_0;+\infty[$,
$\Rightarrow \langle\delta_{x_0}|\varphi\rangle=\varphi(x_0)=0$
Infatti, $\delta_{x_0}=0$ su $]x_0;+\infty[\ \cup\ ]-\infty,x_0[$.

Potremmo ora chiederci cosa capita al supporto, in seguito alla derivazione della distribuzione.
Proposizione: data distribuzione $T\in\mathcal{D}'$, $supp(T')\subseteq supp(T)$
Dimostrazione: poiché derivando al più è possibile aggiungere zeri alla distribuzione, possiamo dire che
$N(T')\geq N(T)$

Se $I\subseteq\mathbb{R}$ è un aperto tale che T è nulla su $I \Longrightarrow T'$ è nulla su I,
sia $\varphi\in\mathcal{D}$: $supp(\varphi)\subseteq I$; allora:
$\langle T'|\varphi\rangle=-\langle T|\varphi'\rangle$
Il supporto di φ' sta tutto su I; quindi, andando a ritroso, poiché
$\langle T|\varphi'\rangle=0 \Longrightarrow \langle T'|\varphi\rangle=0$

Definizione: data $T\in\mathcal{D}'$, essa si dice a supporto compatto se $supp(T)$ è limitato. Ma se $supp(T)$ è limitato, si può estendere T ad un funzionale definito su tutto C^∞, cioè non a supporto compatto:
$T: C^\infty\to\mathbb{R}$; $\langle T|\varphi\rangle$, $\varphi\in C^\infty$, φ non ha vincoli sul supporto.

È dunque possibile estendere lo spazio delle funzioni test: data T a supporto compatto, $supp(T) \subset]a;b[$, al di fuori di $I =]a;b[$, è nulla.

Qual è l'idea: usare una funzione taglio ψ, che valga 1 in I, e si raccordi a 0 fuori; data $\varphi \in C^\infty$,

$\langle T | \varphi \rangle \triangleq \langle T | \psi \varphi \rangle$

Faccio "tagliare" la φ con la ψ: il taglio vale 1 solo dove la distribuzione è non nulla, dunque non abbiamo fatto nulla di male.

Inoltre, a queste condizioni,

$\psi \cdot \varphi \in \mathcal{D}$.

Ora ci chiediamo: è sempre possibile fare ciò, $\forall \psi$? Generalizziamo la definizione appena fatta: per far ciò, dobbiamo fare in modo che la definizione non dipenda dalla ψ scelta. Data $\hat{\psi}$ altra funzione taglio, la differenza tra i risultati dovrà essere 0:

$\langle T | \psi \varphi \rangle - \langle T | \hat{\psi} \varphi \rangle = \langle T | (\psi - \hat{\psi}) \varphi \rangle$

Vediamo i supporti: il supporto di $(\psi - \hat{\psi}) \varphi$ è:

$supp[(\psi - \hat{\psi}) \varphi] \subseteq]-\infty, a] \cup [b; +\infty[\Rightarrow \langle T | (\psi - \hat{\psi}) \varphi \rangle = 0.$

Si dovrebbe verificare che:

1) Se $\varphi \in \mathcal{D}$, la funzione taglio è obsoleta.

2) T è lineare su C^∞

3) T è continua su C^∞.

4) Valgono anche le operazioni di derivazione di T.