

Campi tensoriali in Fisica

Alberto Tibaldi

29 febbraio 2012

Indice

1	I tensori	3
1.1	Introduzione	3
1.2	Campi scalari	3
1.3	Vettore tangente: controvarianza	6
1.3.1	Considerazioni aggiuntive sui vettori controvarianti	11
1.4	Vettore gradiente - covarianza	12
1.4.1	Considerazioni aggiuntive sui vettori covarianti	14
1.5	Contraazione	15
1.6	Prodotto tensoriale	16
1.7	Mettrica e tensore metrico	19
1.8	Prodotto scalare	22
1.8.1	Mettrica inversa	23
1.8.2	Conclusione sul prodotto scalare	24
1.9	Esempio di applicazione: calcolo del prodotto scalare	25
1.10	Derivata covariante	28
1.10.1	Caso di tensori controvarianti	28
1.10.2	Caso di tensori covarianti	31
1.10.3	Derivata covariante su tensori di rango superiore	33
1.10.4	Note aggiuntive sulla connessione	34
2	Prime applicazioni del calcolo tensoriale	37
2.1	Geodetiche	37
2.2	Tensore di Riemann	40
2.2.1	Proprietà del tensore di Riemann	44
2.3	Tensore di Ricci e curvatura scalare	45
2.4	Operatori tensoriali	46
2.4.1	Derivata di Lie	47
2.4.2	Proiettore	48

2.4.3	Riflessione	50
2.4.4	Rotazioni	50
2.5	Autovalori, autovettori	52
2.5.1	Considerazioni conclusive	54
3	Teoria dell'elasticità	55
3.1	Teorema di decomposizione polare	56
3.2	Tensore di deformazione	58
3.2.1	Prima definizione	58
3.2.2	Seconda definizione	59
3.2.3	Terza definizione	59
3.3	Introduzione della fisica nella deformazione	61
3.3.1	Decomposizione del tensore di strain: deformazioni omogenee e distorsioni	62
3.3.2	Tensore degli sforzi	64
3.3.3	Considerazioni finali: bilanciamento delle forze	67
3.4	Applicazioni ulteriori dei tensori in fisica	68
3.4.1	Tensore di inerzia	68
3.4.2	Idee dietro il tensore dei fluidi	69
4	Forme differenziali	72
4.1	Introduzione	72
4.2	Coniugazione di Hodge	74
4.3	Teoremi sugli integrali	77
4.3.1	Considerazioni aggiuntive	79
4.4	Curvatura e forme differenziali	81
4.4.1	Applicazione di forme differenziali a vettori	83
4.5	Esempio di applicazione: elettrostatica	85
5	Elettromagnetismo	89
5.1	Introduzione	89
5.2	Dal quadrivettore al tensore di Faraday	90
5.3	Tensore di Maxwell	94
5.3.1	Considerazioni finali	97

Capitolo 1

I tensori

1.1 Introduzione

L'obiettivo di questa trattazione è introdurre i tensori. Essi sono oggetti matematici particolari, utilizzabili al fine di rappresentare un certo insieme di grandezze e fenomeni. Al fine di poter studiare il mondo fisico e poter fare previsioni sul suo comportamento, è necessario introdurre delle descrizioni univoche dei fenomeni. I fenomeni che si manifestano nel mondo fisico devono dunque essere codificati al fine di associare a essi dei numeri. Esistono diversi insiemi di numeri utilizzabili per descrivere la realtà: numeri interi, razionali, reali; questi ultimi sono i più idonei, dal momento che la realtà è **continua**: in natura non esistono salti, nel senso che tutte le quantità variano con continuità.

Supponendo dunque di lavorare con numeri reali, uno dei problemi più interessanti è quello dell'univocità del risultato: volendo produrre un'associazione tra fenomeni e numeri, è necessario che queste associazioni producano risultati univoci: il passaggio al mondo "numerico" deve essere tale da permettere di prevedere correttamente la fenomenologia fisica; correttamente significa **univocamente**: a seconda dell'associazione il risultato deve essere sempre lo stesso.

1.2 Campi scalari

Un esempio di tutto ciò è lo spazio: al fine di descrivere lo spazio, è necessario utilizzare dei numeri, mediante la scelta di un sistema di coordinate. Si

supponga di avere uno spazio, un **supporto** (o *manifold*, considerando un inglesismo): esso, fisicamente, è costituito da una distribuzione continua di posizioni.

Il P indica un punto, una posizione sul manifold; questo è un oggetto fisico. Se si introduce un sistema di coordinate, è possibile associare a P dei numeri:

$$P \longleftrightarrow (x^1, x^2, \dots, x^N)$$

Dunque, due punti P e P' distinti saranno descritti da due N -ple diverse: l'associazione tra punti del manifold e N -ple è scelta da noi, ma deve essere biunivoca: a ogni punto deve essere associata una e una sola N -pla. Il criterio di associazione deve dunque essere non contraddittorio. Il N che indica la dimensione della N -pla deve coincidere con la dimensione del manifold considerato: non è necessario mettere più elementi nella N -pla dei minimi necessari per la rappresentazione, poiché sarebbero ridondanti. Per esempio, lo spazio in cui viviamo è un manifold di dimensione 3, composto da numeri reali; in altre parole, \mathbb{R}^3 . Considereremo manifold semplici e generalmente dotati di una **metrica**, dunque dotati di proprietà geometriche. Questo manifold, a seconda del tipo di problema fisico da studiare, potrà però avere dimensione anche superiore a 3.

In un certo senso, è possibile anche invertire il ragionamento, cercando le varie singole componenti i -esime x^i a partire dalla posizione P :

$$x^i = f^i(P)$$

Questa notazione è assolutamente inesatta: x^i sono **numeri** appartenenti alla N -pla, P è una posizione, dunque un qualcosa di non quantitativo, poiché non rappresentato in numeri; f^i dunque non può essere una funzione, dal momento che una funzione ha in ingresso numeri e in uscita altri numeri; essa è semplicemente un'associazione tra P e le varie x^i .

Quando si deve descrivere un fenomeno, si hanno grandezze diverse in punti diversi del manifold. Un esempio è la temperatura in una stanza: al variare dei punti dello spazio, la temperatura è una funzione che può oscillare tra diversi valori. Le varie posizioni in cui si osserva la variazione di temperatura sono rappresentate con le coordinate del sistema scelto. Infine si può legare la variazione di temperatura alle coordinate. Riassumendo:

- dalla posizione, scegliendo un sistema di coordinate, si ricavano le coordinate;

- si osserva la temperatura nelle varie posizioni del manifold;
- legando i due punti precedenti si legano coordinate e temperatura, ottenendo dunque un modello matematico di un fenomeno fisico.

Ciò che lega coordinate e temperatura è una relazione tra numeri e numeri: questa, ora è definitivamente una funzione analitica.

La temperatura è una funzione **scalare**: essa è una funzione indifferente alla scelta delle coordinate; in altre parole, indipendentemente dalla scelta del sistema di coordinate che si vuole utilizzare, ossia indipendentemente dall'associazione tra posizioni spaziali e numeri, esso non varia.

È possibile dunque rappresentare la stessa posizione P in più modi, ossia con più sistemi di coordinate. Consideriamo come “coordinate di partenza” quelle scritte mediante caratteri latini:

$$P \longrightarrow (x^1, x^2, \dots, x^N)$$

È poi possibile cambiare coordinate, scegliendo un secondo sistema; per rappresentare queste “nuove coordinate”, si useranno caratteri greci:

$$P \longrightarrow (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^N)$$

A partire dalle coordinate x^i di partenza, è possibile trovare un'associazione anche con le nuove coordinate, ξ^α , in modo da passare dalle prime alle seconde:

$$\xi^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^N)$$

Questa è una funzione vera e propria, poiché lega numeri e numeri, e per ipotesi nella trattazione sarà invertibile: è possibile passare da un sistema di coordinate all'altro, e poi tornare indietro a quello di partenza.

Nonostante il cambio di coordinate, T non cambia; questo, se il cambio di coordinate è coerente.

Il gruppo di grandezze fisiche scalari ha valori definiti a seconda della posizione sul manifold, e ciò **non dipende** dal sistema di coordinate scelto; dunque, le proprietà fisiche/geometriche non dipendono dal sistema di coordinate. Inoltre, le grandezze fisiche scalari sono dei **campi**: si tratta di funzioni definite ovunque (dal momento che non è possibile avere “salti”, *step* di temperatura al variare della posizione); nel dettaglio, si tratta di campi scalari reali.

Le funzioni scalari sono un primo esempio di tensori: lo scalare infatti è un tensore di rango 0; infatti, la grandezza scalare si rappresenta mediante un singolo numero, dunque per rappresentarlo non sono necessari indici (o, in altre parole, sono necessari 0 indici); la rappresentazione non dipende dalle coordinate.

1.3 Vettore tangente: controvarianza

Si considerino a questo punto due punti distinti nel manifold, P e P' ; si può dire che, tra questi punti, vi è un'infinità di punti intermedi, con la potenza del continuo. Per muoversi da P a P' , è possibile percorrere infiniti percorsi.

Si immagini di scegliere un percorso, e di suddividerlo in tanti pezzettini; ciascun pezzettino viene etichettato mediante un numero λ , detto **parametro affine**: esso è sostanzialmente assimilabile, in Analisi Matematica, con i parametri utilizzati per la descrizione di curve parametriche. Ogni posizione λ sul percorso è rappresentabile mediante un set di coordinate; ciascuna i -esima componente delle coordinate è funzione dunque di λ . In altre parole,

$$x^i = x^i(\lambda)$$

Facciamo un passo avanti: consideriamo due posizioni (si vuole enfatizzare sul fatto che la posizione non è un numero, ma è semplicemente una quantità fisica), P e Q , arbitrariamente vicine¹, è possibile definire un'entità dP come:

$$dP \triangleq P - Q$$

dato dP , si può a questo punto inventare il seguente oggetto:

$$\frac{dP}{d\lambda}$$

dove $d\lambda$ rappresenta la differenza tra due valori numerici, ossia tra due valori affini relativi alle posizioni P e Q . Questo oggetto è un **vettore**; nel dettaglio, esso è il **vettore tangente** alla curva che rappresenta il percorso tra P e Q ; esso è una porzione del percorso tra P e P' scelto.

A questo punto, si vuole mettere il vettore in corrispondenza a dei numeri; al fine di fare ciò, si utilizza il formalismo delle derivate; considerando che P è rappresentata dalla N -pla di numeri (x^1, x^2, \dots, x^N) ,

¹parlare di distanza è per ora inappropriato, visto che non è stata definita una metrica, dunque nella trattazione il manifold non ha ancora un significato geometrico forte

$$\frac{dP}{d\lambda} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial P}{\partial x^i} \right) \frac{dx^i}{d\lambda}$$

questa, è semplicemente la formula di Leibnitz per la derivazione di una funzione composta; il parametro λ infatti si può pensare come funzione delle coordinate con cui si rappresenta P . È possibile utilizzare la **notazione di Einstein** al fine di semplificare la notazione, ottenendo:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial P}{\partial x^i} \right) \frac{dx^i}{d\lambda} \triangleq \frac{\partial P}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda} \quad (1.1)$$

quando c'è il pedice i sia in basso sia in alto, bisogna sottointendere che si ha la sommatoria. Nel dettaglio, ogni volta che compaiono due volte gli stessi indici, una volta in alto e una volta in basso (numeratore e denominatore), si sottointende il segno di sommatoria.

In (1.1), si hanno due elementi:

- il primo contributo, ossia

$$\frac{\partial P}{\partial x^i}$$

è un vettore; questo viene detto “elemento della base”.

- il secondo contributo, ossia

$$\frac{dx^i}{d\lambda}$$

è una funzione; questo viene detto “componente”.

Dunque, è stata introdotta una classe di oggetti: N vettori (gli N elementi della base) sono legati a N componenti, che rappresentano semplicemente la proiezione del fenomeno fisico sugli elementi della base. I vettori sono dunque una classe di oggetti matematici che combinano una N -pla di funzioni, dove N è la dimensione dello spazio, con degli oggetti della stessa classe appena definita (altri vettori). La base deve essere composta da una N -pla di vettori indipendenti: nessun vettore si può scrivere come combinazione lineare degli altri.

Il vettore \mathbf{u} è in definitiva dato da due contributi: una base, e una componente:

$$\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$$

si tengano ben presente le posizioni di pedici e apici in componenti e base, dal momento che presto se ne metterà in evidenza l'importanza. La motivazione intuitiva e mnemonica è: gli indici sono apici o pedici, a seconda di dove stavano nella "frazione": a numeratore, o a denominatore. Si sta parlando di vettore tangente: esso è una caratteristica non della rappresentazione, bensì del manifold. Questo significa che indipendentemente dalla rappresentazione, questo vettore sarà sempre il vettore tangente al manifold: esso è un invariante dalla rappresentazione.

Dimostriamo questa affermazione: se è vero che il vettore tangente è una proprietà del manifold, e dunque è invariante rispetto alle coordinate scelte, si effettui un cambio di coordinate, passando alle ξ^α precedentemente introdotte; se si ha l'invarianza, si dovrà trovare, al termine del passaggio, un oggetto dello stesso tipo di quello di partenza. Al fine di fare ciò, si consideri il vettore scritto in forma di operatore:

$$\mathcal{U} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

questo oggetto è un operatore (da qui, la scrittura in calligrafico) dal momento che può essere applicato per esempio a una posizione P , al fine di trovare il vettore tangente al manifold nel punto P ; ora non è stata esplicitata l'applicazione. Se si passa dalle x^i alle ξ^α , è necessario trasformare sia la componente, sia il vettore, in questa nuova base:

$$\mathcal{U} = \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i\alpha}} \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \right) \left(\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta} \right)$$

al solito ovviamente vale la notazione di Einstein, essendoci gli stessi indici a numeratore e denominatore. Questo significa che si hanno tre sommatorie moltiplicate tra loro (implicite nella notazione): una in α , una in β , una in i . Al fine di procedere, si può scambiare l'ordine dei fattori, ottenendo:

$$\mathcal{U} = \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i\alpha}} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \xi^\beta}$$

A questo punto, è necessario introdurre rapidamente l'operazione di saturazione degli indici: dati due vettori (o, più in generale, tensori), in cui si hanno due indici uguali, uno come apice in un vettore e uno come pedice nell'altro, è possibile contrarre gli indici, sommando i prodotti; il risultato è un altro vettore, con due indici in meno (ossia quelli uguali, che si eliminano). A questa anticipazione va aggiunto un fatto: ξ^α e ξ^β sono elementi di una base, dunque tra loro indipendenti, per $\alpha \neq \beta$; nella trattazione infatti si considerano basi **coordinate**, ossia in cui ciascun elemento della base, operante su un altro, è nullo (concetto che ricorda quello di **ortogonalità**, per quanto non sia stato ancora definito un prodotto scalare, operazione che definisce l'ortogonalità in modo formale). In parole povere, si ha:

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^{i\alpha}} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^i} = \delta_\alpha^\beta$$

dal momento che gli indici i vengono saturati come spiegato precedentemente, dunque β è al “numeratore”, α al “denominatore”, e per questo vengono introdotti come apice e pedice. Gli indici come i , presenti sia in alto sia in basso, vengono anche detti **dummy indices**, dal momento che essi non sono indici reali, bensì semplicemente mezzi con cui si effettua la sommatoria. Il risultato è la delta di Kronecker, ossia una funzione non nulla solo per $\alpha = \beta$ (come è giusto che sia, per le proprietà della base coordinata). Si ha:

$$\mathcal{U} = \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \delta_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial \xi^\beta}$$

ma, essendo la funzione una delta di Kronecker, è possibile sostituire a β α (o il viceversa, è indifferente), ottenendo:

$$\mathcal{U} = \frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$$

Questo oggetto presenta la stessa forma di quello di prima, nonostante il cambiamento di base da x^i a ξ^α : questo significa che il vettore è indipendente dalle coordinate.

I vettori sono **tensori di rango 1**: le loro componenti infatti sono su una N -pla, dunque per poter “indicare” ciascun componente è sufficiente un unico indice (in contrapposizione allo scalare, numero unico, che dunque non necessitava di indici per essere rappresentato). Abbiamo dimostrato che i tensori di rango 1, o vettori, sono dunque oggetti invarianti alle trasformazioni di coordinate.

Ritorniamo su uno dei passaggi precedentemente analizzati, ossia la trasformazione di coordinate della componente:

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\lambda} = \frac{d\xi^\alpha}{dx^i} \frac{dx^i}{d\lambda}$$

Le componenti nella nuova base, ξ^α , possono essere ricavate a partire dallo jacobiano della trasformazione: si devono combinare le vecchie componenti con le derivate delle nuove componenti rispetto alle vecchie. Quando l'oggetto (base o componente che sia) si trasforma di coordinate secondo questa regola, esso si dice **controvariante**.

Questa nozione vale per un'intera classe di vettori: data una generica componente a^i , se essa si trasforma secondo la regola precedentemente detta, l'oggetto risultante dalla combinazione di questa a^i e una base appropriata (la base dei vettori tangenti) sarà ancora una volta un vettore, e ancora della classe dei vettori tangenti. Una nozione generale: nei “vettori controvarianti”, si può vedere che ciò che sono controvarianti solo le componenti, mentre le basi no; gli elementi della base infatti si trasformano nel seguente modo.

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \mathbf{e}_i$$

si ritrova la vecchia base, moltiplicata per le derivate delle vecchie componenti rispetto alle nuove componenti; questo tipo di comportamento rispetto a trasformazione è detto **covariante**. Il vettore risultante è composto da componenti che si trasforma in modo controvariante, e base che si trasforma in modo covariante; la base si può anche esprimere in questo modo:

$$\mathbf{e}_\mu = \partial_i \triangleq \frac{\partial}{\partial x^i}$$

questa è una nomenclatura, che evidenzia la base della classe dei vettori tangenti (in questo caso, degli operatori, non essendo applicato a nulla): la notazione indica il fatto che l'operatore è differenziale, e rispetto a una base x^i .

Il risultato finale dalla combinazione di componenti e base è un oggetto **invariante** (esso viene identificato come “vettore controvariante” solo per classificazione, ma la classificazione è in realtà impropria rispetto al significato fisico dell'oggetto in questione).

Gli oggetti (componenti o basi) controvarianti hanno indice in alto; quelli covarianti, indice in basso; l'invarianza si identifica se, per la convenzione

di Einstein, effettuando la contrazione, dunque la somma su tutti i valori dell'indice, dà luogo a un oggetto invariante. L'obiettivo iniziale, si ricorda, era proprio quello di trovare oggetti globalmente invarianti: il vettore, come d'altra parte anche lo scalare, lo è; questo significa che esso è appropriato per la descrizione di fenomeni fisici, in quanto una diverse scelte del sistema di coordinate permettono di ottenere una rappresentazione sempre coerente. Si può pensare che, se la trasformazione è controvariante per le componenti ma covariante per la base, vi è una sorta di compensazione tra i due diversi tipi di trasformazione, ottenendo una globale invarianza.

1.3.1 Considerazioni aggiuntive sui vettori controvarianti

Si vuole a questo punto dire qualcosa in più sul concetto di vettore tangente. Si consideri, secondo le definizioni precedenti, il vettore tangente a una certa posizione P :

$$\mathbf{u} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{\partial P}{\partial x^i} = u^i \mathbf{e}_i$$

al solito, vale la convenzione di Einstein, dunque questa espressione sottintende una sommatoria; a essere sommati sono N elementi, dove N è la dimensione dello spazio costituito dalle direzioni tangenti: è necessario sommare tanti elementi di base quanti quelli necessari per rappresentare correttamente questo spazio. Indipendentemente dal valore della componente, se la componente si trasforma in modo controvariante (e la base in modo covariante come visto), il vettore è invariante, ma dunque è un oggetto idoneo per la rappresentazione di un fenomeno fisico. Data la posizione P , ho N vettori di base; il loro *span* dà luogo a uno spazio tangente al manifold nella posizione P ; questo spazio è a sua volta un altro manifold, dalle proprietà distinte da quello di partenza; la proprietà di questo, sarà la tangenza in P al manifold di partenza (per esempio, in una sfera nello spazio a 3 dimensioni, in un punto P della sfera sono sufficienti 2 vettori per rappresentare lo spazio tangente; lo span di questi due vettori darà luogo al piano tangente alla sfera nella posizione considerata).

Ciò può essere comodo, per utilizzare le proprietà dello spazio tangente per approssimare nell'intorno della posizione P il manifold di partenza: in questo punto, data la tangenza, si hanno proprietà simili; la tangenza infatti è stata definita come una differenza tendente a zero di posizione, ma dunque

anche di variazione dei parametri dipendenti dalla posizione. Questo discorso di similitudine è solo locale: allontanandosi dalla posizione P , si ha a che fare con proprietà di “trasporto” diverse. Queste, verranno definite e analizzate in seguito.

1.4 Vettore gradiente - covarianza

A questo punto si vuole introdurre una seconda classe di vettori, in contrapposizione a quelli precedenti, ossia a quelli detti “controvarianti”. Si consideri una funzione scalare ϕ della posizione: il suo valore dipende da quale punto si considera sul manifold. Se il valore di ϕ varia con la posizione, allora esso varia con il parametro affine λ . Si consideri a questo punto il differenziale $d\phi$, definito come:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^i} dx^i$$

si ricorda che vale sempre la convenzione di Einstein. Il simbolo $d\phi$ rappresenta una variazione della grandezza ϕ rispetto a tutte le altre grandezze, come indica l’equazione precedente. Anche in questo caso si ha a che fare con due “pezzi”, come per i vettori tangenti: si ha una “base”, ossia il differenziale delle coordinate, e una “componente”, ossia la derivata parziale dello scalare ϕ rispetto alle coordinate. Il risultato è la combinazione tra derivate (numeri), e differenziali (un operatore applicato alle coordinate). Entrambe le espressioni a prima vista dipendono dal sistema di coordinate scelte, ma è veramente così? In realtà no: anche esso, è un invariante, anche se per un motivo diverso rispetto ai vettori tangenti; si passi ancora una volta dalle coordinate x^i alle ξ^α :

$$d\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\xi^\alpha} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial x^i}{\partial\xi^\beta} d\xi^\beta \right)$$

Analogamente a prima, è possibile effettuare la somma su α e β , saturando gli indici, ottenendo δ_β^α ; poi, questo significa in finale ottenere:

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\xi^\alpha} d\xi^\alpha$$

questo oggetto è identico a quello precedente, nella nuova base: anche in questo caso, dunque, si ha invarianza al sistema di riferimento scelto.

Ricordando le nozioni di analisi matematica, questo oggetto è semplicemente il gradiente; per questo motivo, si può dire di aver a che fare con la classe dei **vettori gradiente**. Ora, ciascuna i -esima componente del vettore gradiente nella base di partenza è:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \triangleq \nabla_i \phi$$

dove si evidenzia il fatto di aver a che fare con un pedice i e non un apice; ora, volendo scrivere la α -esima componente nella base finale, si ha:

$$\nabla_\alpha \phi = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \nabla_i \phi$$

ossia, si combina la componente espressa nelle vecchie coordinate con la derivata parziale delle vecchie componenti sulle nuove; come già visto prima, questo è un comportamento di trasformazione **covariante**. Le componenti del vettore gradiente, dunque, sono **covarianti**; per questo motivo, dunque, il vettore gradiente è (impropriamente) detto **vettore covariante**. Gli indici sono in basso, coerentemente con le scelte precedentemente fatte.

Dal momento che si ha a che fare sempre con vettori, dunque con oggetti invarianti, auspicabilmente la base dovrà trasformarsi in modo controvariante; è effettivamente così? Vediamo:

$$d\xi^\alpha = \frac{d\xi^\alpha}{dx^i} dx^i$$

il pedice i della vecchia base è al denominatore della trasformazione, dunque quello della nuova è al numeratore: la base si trasforma in modo controvariante, come previsto!

I vettori di base sono stati finora indicati con il simbolo \mathbf{e} , che però sta a indicare usualmente in letteratura una base coordinata; più genericamente, si utilizza la lettera greca ω , per indicare anche basi non coordinate. Non si è obbligati a scegliere solo basi coordinate: è possibile usare come vettori di base combinazioni lineari dei vettori di base coordinati; la condizione è che siano tra loro indipendenti.

Un esempio di basi non coordinate sono le coordinate polari: quando si ha a che fare con (r, φ) , r è una lunghezza, φ è un angolo; al fine di visualizzare la variazione di angolo si usa un vettore, una “frecciolina” che parte da un certo punto e varia di $d\vartheta$: si ha un dr per indicare la variazione di r , e un $rd\vartheta$ per indicare una variazione di angolo.

Le basi non coordinate possono introdurre varie complicazioni; aldilà del fatto che si può avere una non-ortogonalità tra le basi, si consideri il seguente esempio:

$$\mathbf{e}_1 = \partial_x, \quad \mathbf{e}_2 = f(x, y)\partial_y$$

quando si vanno a combinare vettori della base, per esempio ogni volta che si scrive $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, si ha:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \partial_x [f(x, y)\partial_y] = \frac{\partial f}{\partial x}\partial_y + f\partial_x\partial_y$$

il fatto che le basi non siano coordinate, dunque, può introdurre termini aggiuntivi, complicando le espressioni.

1.4.1 Considerazioni aggiuntive sui vettori covarianti

A questo punto è possibile trarre alcune considerazioni aggiuntive, come fatto precedentemente per quanto riguarda i vettori controvarianti. Combinando N scalari con gli elementi della base (i quali si trasformano in modo controvariante), se gli scalari si trasformano in modo covariante, il risultato finale è un vettore, dunque ancora una volta un invariante. Indicando ciascuna α -esima componente con:

$$\chi_\alpha = \frac{dx^i}{d\xi^\alpha} \chi_i$$

si può notare che gli indici sono al denominatore: questo indica componenti covarianti.

Si torni a questo punto alla funzione scalare: di quanto varia il termine

$$\frac{d\phi}{d\lambda}$$

con trasformazioni di coordinate? Questo termine non dipende dalle coordinate: ϕ infatti presenta una dipendenza dalle coordinate, ma le coordinate dipendono da λ , parametro affine. Se si esplicita la presenza di coordinate, come seguen, si ha:

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{\partial\phi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\lambda}$$

il primo termine si trasforma in modo covariante (indice in basso), il secondo in modo controvariante (indice in alto); il risultato finale è un invariante. Questa cosa si può scrivere nel seguente modo:

$$= u^i \nabla_i \phi$$

questa è detta **derivata direzionale**; la cosa veramente interessante, è il fatto che essa è un invariante rispetto al sistema di coordinate scelto. Questa funzione ci dice di quanto cambia la funzione (scalare, ϕ), rispetto a un certo percorso.

1.5 Contrazione

Finora sono state introdotte due classi di tensori, o meglio di vettori: quelli **covarianti** e quelli **controvarianti**. Dal momento che i tensori sono oggetti invarianti, ha senso associarli al mondo fisico e al numero numerico; a tal fine, è possibile introdurre una nuova operazione, per associare un numero a una coppia di vettori di classe uguale o diversa.

Dato \mathbf{v} vettore covariante, con ω base generica, si può scrivere:

$$\mathbf{v} = v_\alpha \omega^\alpha$$

allo stesso modo, dato \mathbf{w} vettore controvariante,

$$\mathbf{w} = w^\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

si può definire la **contrazione** di \mathbf{w} su \mathbf{v} come

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \mathbf{w}^\alpha \mathbf{w}_\beta \mathbf{e}_\alpha \omega^\beta$$

Questa operazione si può vedere come una sorta di prodotto: w^α e v_β sono funzioni; gli altri elementi, ossia le “basi”, sono in genere operatori. La base covariante \mathbf{e}_α indica una generica base di tipo $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$, mentre la base controvariante ω^β indica una base di tipo dx^β .

Per quanto riguarda la definizione dell’operazione, la parte riguardante le componenti non è interessante: essendo numeri, le componenti si combinano senza problemi. La parte assiomatica, quella ossia che richiede l’introduzione di definizioni non ancora presenti, è la combinazione tra le basi covariante e controvariante. Tenendo conto del fatto che si usano basi coordinate, si

ha sostanzialmente qualcosa di analogo all'ortogonalità tra basi covarianti e controvarianti: sono due tipi di oggetti tra loro indipendenti.

L'assioma, la definizione da noi introdotta, dunque, è:

$$(\mathbf{e}_\alpha, \omega^\beta) = \delta_\alpha^\beta$$

Partendo da questo assioma, lo si applichi alle basi definite a partire da vettori tangenti e vettori gradienti:

$$\partial_\alpha dx^\beta = \delta_\alpha^\beta$$

da qui, finalmente, la contrazione di due vettori è:

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = w^\alpha v_\beta \delta_\alpha^\beta = w^\alpha v_\alpha$$

il passaggio finale è giustificato dal fatto che la delta di Kronecker è non nulla solo per apice e pedice uguali tra loro.

L'oggetto risultante è un invariante: si ha una componente controvariante e una componente covariante, per avere dunque un oggetto risultante invariante. Questa operazione si può vedere come una sorta di versione prototipo del prodotto scalare; parlare di prodotto scalare tuttavia è ancora prematuro, dal momento che sarebbe necessario, prima, introdurre una metrica. Un esempio di applicazione della contrazione è la derivata direzionale: facendo la contrazione tra vettore gradiente e vettore tangente, si ottiene la derivata direzionale, nella direzione del vettore tangente.

1.6 Prodotto tensoriale

A questo punto viene introdotta un'altra operazione tra vettori e, più in generale, tra tensori: il prodotto tensoriale. Come precedentemente, il punto critico è l'applicazione all'operazione ai vettori della base. Si considerino due vettori covarianti di base; si vuole discutere l'operazione

$$\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \partial_i \otimes \partial_j = \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$$

Si vuole discutere a partire da ciò la trasformazione di coordinate: passando dalle coordinate x^i alle ξ^α ; il risultato è:

$$\begin{aligned}\partial_\alpha \otimes \partial_\beta &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \right) \otimes \left(\frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \\ &= \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta}\end{aligned}$$

A parole, il nuovo oggetto deriva dal vecchio, passando da due derivate covarianti: è un oggetto dunque covariante, ma a 2 indici; in altre parole, questo è un **tensore di rango 2**, covariante. Si consideri l'oggetto completo, dotato anche di componenti:

$$T_{ij} = a^i b^j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

Ora, lo si trasformi nella base $\xi^\alpha \xi^\beta$:

$$a^\alpha b^\beta = \frac{\partial \xi^\alpha}{x^i} \frac{\partial \xi^\beta}{x^j} a^i b^j$$

poi, per le basi,

$$\mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

Le componenti del tensore di rango 2 sono contenute in una matrice: per questo motivo, è necessario usare 2 indici per la rappresentazione delle componenti. Come accennato, si ha a che fare ancora con un oggetto invariante, che dunque si può utilizzare per descrivere quantità fisiche.

A questo punto, è possibile applicare l'operazione di prodotto tensoriale al contrario; dato tensore $\Omega_{\alpha\beta}$, si vuole ottenere:

$$\Omega_{\alpha\beta} \longrightarrow \Omega_{\mu\nu} \omega^\mu \otimes \omega^\nu$$

con passaggi analoghi a prima.

Il passo finale è il **tensore misto**: il terzo tipo di tensore possibile in queste situazioni. Dato ψ di questo tipo,

$$\psi_\alpha{}^\beta \mathbf{e}_\alpha \omega^\beta$$

esso si trasforma come:

$$\psi_\alpha{}^\beta \longrightarrow \psi^\mu{}_\nu \omega^\nu \otimes \mathbf{e}_\mu$$

si noti che tutte queste operazioni non sono in generale commutative: gli indici (apice e pedice) hanno un ordine ben preciso, che identifica l'ordine degli operandi del prodotto tensoriale. Di conseguenza, ha senso identificare, per semplificare questo problema della non commutatività, due classi di tensori di rango 2. Come detto, le basi hanno sempre una forma come quella mostrata nella definizione del prodotto tensoriale; di queste tuttavia sono possibili due posizioni (ordine in cui è applicata l'operazione): dati vettori di base \mathbf{e}_μ e \mathbf{e}_ν , è possibile avere sia la base $\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu$, sia la base $\mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}_\mu$, proprio a causa della non commutatività del prodotto. Al fine di poter rappresentare tutti i tensori dello spazio, dunque, è possibile simmetrizzare la base, definendo:

$$T_s^{\mu\nu} \frac{\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu + \mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}_\mu}{2}$$

scegliendo questa base, è possibile rappresentare qualsiasi oggetto con proprietà di simmetria, rappresentabile mediante un tensore di rango 2. I fenomeni fisici usualmente rappresentati mediante matrici simmetriche, in altre parole, possono essere rappresentati usando questo unico vettore di base.

Non tutti gli oggetti possono però solo essere rappresentati in termini di tensori simmetrici; al fine di completare questo nuovo tipo di base, è necessario introdurre la base complementare, ossia la base dei tensori antisimmetrici:

$$T_a^{\mu\nu} \frac{\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu - \mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}_\mu}{2}$$

questo tipo di vettore di base è utilizzabile nei fenomeni in cui scambiando gli indici della matrice che li rappresenta si ha un cambio di segno.

Qualsiasi tensore di rango 2 può essere rappresentato, dunque decomposto, usando una base simmetrica e una base antisimmetrica, combinandole adeguatamente. Il prodotto tensoriale produce dunque un oggetto dotato di numeri per le possibili combinazioni di indici: a^1b^1 , a^2b^1 , eccetera.

Non è obbligatorio vedere un tensore di rango 2 come un prodotto tensoriale di 2 vettori: qualunque oggetto di una base di ordine 2 con dei numeri, se i numeri della matrice si trasformano in modo opportuno (rispetto alla base, in modo da avere un oggetto globalmente invariante), è un tensore di rango 2; questo tipo di combinazione è stato proposto semplicemente per introdurre i tensori.

Tutto ciò si può ovviamente generalizzare: come è stato ottenuto un tensore di rango 2, è possibile costruire delle basi, e dunque definire degli oggetti, con più di due fattori. Per esempio, si può avere:

$$T^{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

in questo caso si hanno tre indici, ciascuno dei quali può avere N valori; questo è un oggetto tridimensionale, nello spazio degli indici.

Usualmente, in fisica, tensori sopra il rango 4 non vengono considerati; ciò non implica tuttavia che non abbia senso definirli anche solo come esercizio.

1.7 Metrica e tensore metrico

Nella trattazione, finora, tensori covarianti e tensori controvarianti sono stati definiti come due entità ben distinte, e che non possono interagire tra loro. Abbiamo inoltre avuto qualche limitazione nel parlare di distanza tra due punti: è stato infatti considerata una differenza tra le posizioni (intese come entità fisiche del manifold), si è assunto che ci si possa muovere lungo una certa direzione con continuità, ma non è stato definito un metodo per quantificare la distanza tra due posizioni.

Individuate due posizioni P e P' molto vicine, ossia la cui differenza è molto piccola, si vuole definire la distanza. Al fine di fare ciò, si vuole recuperare il concetto di norma euclidea (ossia, la generalizzazione del teorema di Pitagora), al fine di scrivere che:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^N)^2$$

questo, vale in **coordinate cartesiane**, ossia **sul piano**. Cambiando poi le coordinate, l'espressione precedente cambia, ma la distanza ovviamente non deve cambiare: essa è una proprietà del manifold, non alle coordinate! d ha il significato di **differenza di posizione**: dx^1 è una grandezza numerica che indica la variazione delle posizioni.

Al fine di riconoscere l'invarianza, è necessario scrivere l'ultima equazione in modo simile a quanto fatto precedentemente, ossia mediante una notazione tensoriale, ossia in una forma bilineare. I vari dx^i sono elementi della base dei vettori gradiente, dunque dei vettori covarianti; a testimonianza di ciò, i vari dx^i sono sempre stati scritti con l'indice i come apice, dunque in alto, essendo

i vettori di base relativi ai vettori gradiente controvarianti. Si decompongono dunque le varie $(dx^i)^2$ ottenendo un'altra forma quadratica, come segue:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Le basi dei vettori gradienti sono, come si era visto, dei **numeri**; per questo motivo, il termine $dx^\mu dx^\nu$ è senza dubbio commutativo. Dal momento che questi vettori di base si trasformano in modo controvariante, le componenti $g_{\mu\nu}$ si trasformeranno entrambe in modo covariante. $g_{\mu\nu}$ sono dunque gli elementi di un tensore covariante, simmetrico (grazie alla commutatività dei fattori), di rango 2: il **tensore metrico**. Questo tensore permette di determinare la metrica del manifold considerato.

Si considerino a questo punto alcuni esempi di espressioni del tensore metrico in diversi sistemi di coordinate. Il primo, è già stato introdotto: il teorema di Pitagora, dunque la scrittura dell'elemento di distanza in coordinate cartesiane. Da un lato, si è scritto che, date coordinate x e y ,

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

d'altra parte, la generica espressione del tensore metrico è (ricordando la convenzione di Einstein):

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Considerando $dx^1 = dx$, $dx^2 = dy$, dunque uno spazio euclideo di 2 dimensioni, basi coordinate, si può scrivere che:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

In questo caso, si può vedere che il risultato è il tensore identità. Per $\mu \neq \nu$, infatti, i termini sono nulli, dal momento che gli elementi della base, essendo essa non coordinata, sono tra loro indipendenti. In realtà, questo non è il motivo preciso: ogni tensore metrico è simmetrico, per come è definita la metrica (quadratica, trasformata in bilineare); ogni tensore simmetrico, è diagonalizzabile; diagonalizzare significa scegliere come base per la rappresentazione del tensore quella degli "assi principali", ossia quella per cui il tensore è effettivamente rappresentato mediante una matrice diagonale.

Il precedente esempio era relativo alla scrittura del tensore metrico, espresso in coordinate cartesiane. Cosa capita, se si passa alle coordinate polari? Prima di tutto, l'incremento di distanza è:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2$$

Da qui, è possibile scrivere il tensore metrico come:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

Un terzo esempio riguarda la definizione del tensore metrico su una sfera, usando come base longitudine e latitudine. Prima di tutto, dato R il raggio della sfera considerato, è possibile scrivere l'elemento di lunghezza come:

$$(ds)^2 = R^2(d\vartheta)^2 + R^2 \sin^2(\vartheta)(d\varphi)^2$$

$d\vartheta$ è la variazione di posizione lungo un meridiano, mentre $d\varphi$ è la variazione di posizione lungo un parallelo. Il tensore metrico sulla sfera espresso con questo sistema di coordinate è:

$$g_{\mu\nu}^{\text{sfera}} = R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\vartheta) \end{bmatrix}$$

Ciò definisce la metrica della sfera. Si può dimostrare che non esiste un modo di trasformare, con nessuna possibile trasformazione, dunque con nessun cambio di base, questa matrice nell'identità. Se infatti ciò fosse possibile, significherebbe che la sfera sarebbe correttamente considerabile come la trasformazione di un piano, e ciò non avrebbe senso: non è possibile sviluppare la sfera su di un piano.

Una nota sulle coordinate utilizzate: a seconda delle proprietà del manifold, può essere appropriato usare un sistema di coordinate piuttosto che un altro. Si consideri per esempio di utilizzare coordinate cartesiane su un manifold sferico: non ha senso, dal momento che le coordinate cartesiane sono appropriate per descrivere oggetti planari e infiniti, mentre la sfera è curva e compatta, per cui il set di coordinate angolari sarà appropriato.

Il tensore metrico è una proprietà del manifold: la metrica infatti è una caratteristica del manifold, e, essendo il tensore un elemento invariante, esso sarà proprio del manifold. Come si è visto, il tensore metrico è il tensore identità; ciò è interessante dal momento che, localmente, è sempre (a patto di non avere manifold patologici, per esempio dotati di punti angolosi) approssimabile mediante un piano tangente. Questo significa che il manifold è localmente studiabile mediante la geometria euclidea. Questo principio per cui si può approssimare nell'intorno di una posizione la metrica di un manifold con la

metrica euclidea ricorda in un certo senso il principio di equivalenza, proprio della teoria della relatività. Considerando un ascensore in caduta libera, è possibile verificare su di esso esattamente le leggi di Newton, dal momento che il campo gravitazionale all'interno del sistema-ascensore non agiscono. Questo esperimento è in realtà però valido solo per ascensori piccoli: se esso fosse grosso chilometri, il campo gravitazionale agirebbe in modo diverso in punti diversi, dunque non uniformemente, e la presente affermazione sarebbe inesatta.

1.8 Prodotto scalare

Una volta definita la metrica di un manifold mediante il tensore metrico, è possibile definire il **prodotto scalare**; un po' come nel caso della contrazione, il prodotto scalare è un'operazione atta ad associare un numero a un tensore.

Si considerino \mathbf{u} , \mathbf{v} vettori controvarianti; il prodotto scalare è definito come:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$$

Questa operazione è stata scritta in modo generico per due diversi vettori generici; nessuno tuttavia impedisce di calcolare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, ossia il prodotto scalare di un vettore per sé stesso. Si ha:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u})^2 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$$

Questa è la “norma” del vettore \mathbf{u} , o il suo “modulo”; esso, come si può vedere, contiene il tensore metrico. Ci si concentri, a questo punto, sulla prima parte della norma: $g_{\mu\nu} u^\mu$. μ di fatto è un *indice dummy*, dal momento che per la convenzione di Einstein esso va a saturarsi con l'indice del tensore metrico. ν è un indice effettivo, ed è fisso. Effettuando la saturazione, il risultato è:

$$u_\nu = g_{\mu\nu} u^\mu$$

Precedentemente, si erano presentati tensori covarianti e controvarianti come due entità ben distinte tra loro, e che tendenzialmente non avevano unione; si era giustificata l'affermazione, dicendo che precedentemente non era ancora stata definita una metrica. A questo punto, dopo l'ultima equazione, il ruolo della metrica risulta essere evidente: la metrica permette di stabilire una

corrispondenza tra un vettore covariante e un vettore controvariante. Definiamo \mathbf{u}_ν il **coniugato** del vettore \mathbf{u}^ν : si tratta semplicemente dello stesso \mathbf{u} , espresso però in forma covariante anziché controvariante.

Ogni vettore covariante ha il proprio coniugato controvariante, e viceversa. A partire da ciò, è possibile dire che il prodotto scalare di un vettore con sé stesso sia la contrazione del vettore in versione controvariante con il proprio coniugato covariante:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{u}^*, \mathbf{u})$$

dove, a sua volta, \mathbf{u}^* è stato ottenuto contraendo il tensore metrico su \mathbf{u}^μ ; ciò si può anche scrivere in forma di prodotto scalare:

$$g \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^*$$

Questo ci permette di capire quale sia il ruolo della metrica in tutto ciò: il tensore metrico contratto su un vettore permette di **abbassare un indice** (detto in modo gergale).

Questo concetto, così come è stato applicato su un tensore di rango 2, è applicabile anche su tensori di rango maggiore, come 3 o 4; dato un tensore di rango 4 $T^{\alpha\beta\gamma\delta}$, è possibile scrivere:

$$g \cdot T = g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta\gamma\delta} = T^{\gamma\delta}$$

Non è l'unico modo di vedere l'operazione: in questo caso sia α sia δ sono dummy indices; tuttavia, considerando una situazione diversa, tale per cui

$$g \cdot T = g_{\mu\nu} T^{\mu\alpha\beta\gamma} = \tau_\mu^{\alpha\beta\gamma}$$

ossia, si può ottenere un nuovo tensore, parente di quello di partenza, ma non solo controvariante; questo, se gli indici non sono tutti dummy.

1.8.1 Metrica inversa

Il tensore metrico g è stato finora definito come un tensore covariante, dunque utilizzabile solo per abbassare gli indici. In realtà, allo stesso modo, è possibile usare il tensore metrico anche per alzare gli indici, a patto di definirlo in modo diverso. Considerando ancora una volta il tensore metrico, è possibile invertirlo, ossia trovare un tensore $(g)^{-1}$ tale per cui:

$$(g)^{-1}(g) = \mathbf{I}$$

Questa proprietà deve essere ancora una volta indipendente dalle coordinate; l'invertibilità deve prescindere da esse!

Si consideri di partire da un tensore metrico $g_{\mu\nu}$ covariante; il $(g)^{-1}$ ottenuto a partire da esso deve avere componenti che si trasformino in modo controvariante, in modo tale che:

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha} = g^{\mu\alpha}$$

Questa operazione permette di definire la metrica inversa.

L'ultimo modo di esprimere il tensore metrico, è in forma mista: se si effettua infatti la seguente contrazione, si ottiene:

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$$

In forma mista, il tensore metrico è sempre il tensore identità: dato che si introduce la metrica inversa, dato che il tensore misto deriva da una combinazione tra due tensori tra loro inversi, il risultato è l'identità; questo è vero per ogni manifold e per ogni insieme di coordinate.

1.8.2 Conclusione sul prodotto scalare

Tutti i discorsi finora fatti sono partiti dall'ipotesi di applicare il prodotto scalare a tensori covarianti. Lo stesso discorso, in realtà, può essere applicato su tensori metrici controvarianti:

$$\chi \cdot \psi = g^{\mu\nu} \chi_{\mu} \phi_{\nu}$$

questo è ragionevole: dal momento che la metrica, come si è visto, pone in relazione tensori covarianti e controvarianti, è ragionevole che il risultato sia questo. Si può poi ottenere, analogamente a prima:

$$\chi \cdot \psi = g^{\mu\nu} \chi_{\mu} \psi_{\nu} = \chi^{\mu} \psi_{\nu}$$

in totale analogia a prima; si può dunque, applicando il prodotto scalare sullo stesso tensore, trovare la versione controvariante di un vettore/tensore covariante, usando la metrica come "ponte" tra i due mondi.

1.9 Esempio di applicazione: calcolo del prodotto scalare

Si vuole a questo punto verificare, mediante un esempio, la validità dell'invarianza del prodotto scalare. Considerando, in coordinate cartesiane, il seguente vettore, espresso nella seguente base:

$$\mathbf{u} = a\partial_x + b\partial_y \quad (1.2)$$

$$\mathbf{v} = l\partial_x + m\partial_y \quad (1.3)$$

$$(1.4)$$

si vuole scrivere il prodotto scalare in questa base, quindi verificare che esso non cambi con il sistema di coordinate.

Prima di tutto, si ricorda che l'espressione del prodotto scalare è:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu$$

dove, dal momento che si parte da coordinate cartesiane, il tensore metrico è quello caratteristico del piano:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

esplicitando dunque la sommatoria della notazione di Einstein, si ottiene:

$$g_{11}u^1v^1 + g_{12}u^1v^2 + g_{21}u^2v^1 + g_{22}u^2v^2$$

dove:

$$u^1 = a \quad u^2 = b \quad v^1 = l \quad v^2 = m$$

quindi:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = al + bm$$

La seconda parte dell'esercizio ora consiste nel dimostrare che, dati gli stessi vettori, in coordinate diverse (per esempio, polari), il prodotto scalare si mantiene invariato.

Prima di tutto, in questo secondo caso, il tensore metrico è:

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

in questo caso, dunque, si avrà:

$$u^1 = u^r \quad u^2 = u^\vartheta \quad v^1 = v^r \quad v^2 = v^\vartheta$$

dove:

$$u^r = \frac{\partial r}{\partial x} u^{1,x} + \frac{\partial r}{\partial x} u^{1,y} u^\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} u^x + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} u^y v^r = \frac{\partial r}{\partial x} v^{1,x} + \frac{\partial r}{\partial x} v^{1,y} v^\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} v^x + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} v^y$$

dove, in conclusione, per questo secondo sottoproblema,

$$u^x = a \quad u^y = b \quad v^x = l \quad v^y = m$$

A questo punto, si può partire con la risoluzione del problema. Prima di tutto, si ricorda che la trasformazione da coordinate polari a coordinate cartesiane è:

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta \end{cases}$$

la quale è invertibile, trovando:

$$\left\{ r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \vartheta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \right.$$

si può dunque iniziare a operare:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \vartheta \\ \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \vartheta \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} u^r &= a \cos \vartheta + b \sin \vartheta \\ v^r &= l \cos \vartheta + m \sin \vartheta \end{aligned}$$

Si considerino a questo punto le componenti lungo ϑ .

$$\tan(\vartheta) = \frac{y}{x}$$

dunque, si può fare:

$$\frac{d \tan(\vartheta)}{d\vartheta} = \frac{1}{\cos^2(\vartheta)} = \frac{\sin^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta)}{\cos^2(\vartheta)} = 1 + \tan^2(\vartheta)$$

dunque, il differenziale è:

$$d(\tan(\vartheta)) = (1 + \tan^2(\vartheta))d\vartheta$$

invece, il differenziale del membro destro è:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{dy}{x} - \frac{y}{x^2}dx$$

dunque, combinando i due membri, si può ottenere:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{1}{1 + \tan^2(\vartheta)}$$

dove, però, sostituendo l'espressione iniziale, $\frac{y}{x} = \tan(\vartheta)$; si ha:

$$= -\frac{\tan(\vartheta)}{x} \frac{1}{1 + \tan^2(\vartheta)}$$

però $x = r \cos(\vartheta)$, dunque

$$\begin{aligned} \frac{d\vartheta}{dx} &= -\frac{\tan(\vartheta)}{r \cos(\vartheta)} \frac{1}{1 + \tan^2(\vartheta)} = \\ &= -\frac{1}{r} \frac{1}{\cos(\vartheta)} \frac{\sin(\vartheta)}{\cos(\vartheta)} \cos^2(\vartheta) = \\ &= -\frac{\sin(\vartheta)}{r} \end{aligned}$$

Allo stesso modo, con passaggi simili, si può dimostrare che:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial y} = \frac{\cos(\vartheta)}{r}$$

A questo punto, è possibile scrivere le componenti come:

$$u^\vartheta = u^x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + u^y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -\frac{\sin(\vartheta)}{r} a + \frac{\cos(\vartheta)}{r} b$$

$$v^\vartheta = v^x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v^y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = -\frac{\sin(\vartheta)}{r} l + \frac{\cos(\vartheta)}{r} m$$

A questo punto, si può scrivere il prodotto scalare come:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= al \cos^2 \vartheta + bm \sin^2 \vartheta + (am + kb) \sin \vartheta \cos \vartheta + \\ &+ r^2 \left(\frac{al \sin^2 \vartheta}{r^2} + \frac{bm \cos^2 \vartheta}{r^2} \right) - (am + lb) \sin \vartheta \cos \vartheta = \\ &= al + bm \end{aligned}$$

Il risultato dunque è: fatti i calcoli, il risultato è lo stesso. Il prodotto scalare può dunque essere trattato con i soli tensori, ottenendo delle espressioni **coordinate free**; il risultato, essendo invariante, non sarà influenzato dal formalismo.

1.10 Derivata covariante

1.10.1 Caso di tensori controvarianti

Si vuole a questo punto generalizzare il concetto di derivata in ambito tensoriale. Si è detto che i tensori sono in grado di rappresentare diverse categorie di oggetti: il supporto, e le grandezze fisiche variabili al variare della posizione. Si considerino due posizioni arbitrariamente vicine, P e P' , quindi si supponga di aver definito su P un vettore \mathbf{v} , per esempio del tipo “vettore tangente”, dunque controvariante. \mathbf{v} è un **campo tensoriale**, dal momento che in ogni punto del manifold esso ha un valore, ovviamente variabile da posizione a posizione, con continuità. La domanda che ci poniamo a questo punto è: conoscendo \mathbf{v} nel punto P , quanto vale \mathbf{v} in P' ?

Dato \mathbf{v}' il vettore \mathbf{v} in P' , se i due punti sono arbitrariamente prossimi, si può dire che anche \mathbf{v} e \mathbf{v}' siano molto simili; è tuttavia possibile quantificare la loro diversità? La risposta è sì, e ciò si fa mediante una generalizzazione del concetto di differenziale applicato ai vettori: $D\mathbf{v}$. D è una sorta di differenziale, ma in un senso nuovo: esso è applicato a vettori, dunque a basi e componenti assieme, e restituisce un vettore.

Al fine di formalizzare il nostro scenario, si consideri di andare da \mathbf{v} a \mathbf{v}' , quindi da P a P' , attraverso un certo percorso identificato da vari valori di λ , parametro affine, che permette di parametrizzare la curva che identifica il passaggio tra i due punti. Al fine di generalizzare la derivata, si vuole rapportare la variazione di \mathbf{v} con quella del parametro affine λ , in modo simile a quanto fatto con i vettori tangenti:

$$\frac{D\mathbf{v}}{d\lambda}$$

questo è il **differenziale di un vettore**. Le coordinate sono funzione di λ , dunque è possibile identificare le componenti di \mathbf{v} mediante le varie coordinate, riscrivendo:

$$\frac{D\mathbf{v}}{d\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda} \frac{D\mathbf{v}}{\partial x^\mu}$$

in questo caso, al secondo termine, si vede che è stata introdotta una derivata parziale, dal momento che \mathbf{v} non dipende solo da una componente, ma da molte. Il primo termine, quello in λ , è la μ -esima componente del vettore tangente. Si può dunque scrivere:

$$\frac{D\mathbf{v}}{d\lambda} u^\mu \frac{D\mathbf{v}}{\partial x^\mu}$$

per quanto riguarda il secondo termine, esso è simile alla derivata, ma applicata non a uno scalare, a un numero, bensì a un vettore. Sapendo dunque che un vettore (nel dettaglio controvariante) può essere espresso, in termini di componenti e base, come:

$$\mathbf{v} = v^\alpha \partial_\alpha$$

dove $\partial_\alpha = \mathbf{e}_\alpha$, ossia è la base, il differenziale di questa cosa sarà:

$$D\mathbf{v} = D(v^\alpha \mathbf{e}_\alpha) = \left(\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\nu} dx^\nu \right) \mathbf{e}_\alpha + v^\alpha D(\mathbf{e}_\alpha)$$

dove il secondo termine, quello a cui è applicato l'operatore D , rappresenta la variazione del vettore di base dal punto P al punto P' . Il vettore di base, essendo quello dei vettori tangenti, può infatti cambiare, a seconda del set di coordinate scelto e del manifold, da posizione a posizione; può essere, come nel caso di coordinate cartesiane sul piano, che la direzione dei vettori di base rimanga lo stesso in ogni punto; in generale, però, ciò non è vero (si pensi

già solo alle coordinate polari nel piano: a seconda del punto, il vettore di base angolare può variare).

Dal momento che $D(\mathbf{e}_\alpha)$ è un vettore, esso può essere rappresentato mediante i vettori di base, scomponendolo nelle varie componenti; si può quindi scrivere:

$$D(\mathbf{e}_\alpha) = \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} \mathbf{e}_\mu dx^\nu$$

si possono identificare tre termini, rispettivamente:

- una funzione generica del α -esimo elemento della base, Γ ;
- ciascun elemento della base dei vettori considerata;
- un termine che tiene conto della proporzionalità del differenziale da ciascuna coordinata.

Tutte queste dipendenze fanno introdurre tutti gli indici proposti, che dovranno essere tra loro saturati. $\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}$ ha 3 indici, ed esprime il cambiamento del vettore di base; questo oggetto come vedremo in generale **non** è un tensore.

Fatte queste precisazioni, si riprendano le varie espressioni per scrivere l'intera espressione del differenziale:

$$D\mathbf{v} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\nu} dx^\nu \mathbf{e}_\alpha + v^\beta \Gamma^\mu{}_{\nu\beta} \mathbf{e}_\mu dx^\nu$$

raccogliendo a questo punto il fattore comune tra i due addendi, è possibile vedere che:

$$D\mathbf{v} = (v^\alpha{}_{,\nu} + v^\beta \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}) \mathbf{e}_\alpha dx^\nu$$

dove è stata implicitamente introdotta la seguente notazione, propria della relatività:

$$v^\alpha{}_{,\nu} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\nu}$$

Di questo vettore, si consideri ciascuna α -esima componente: essa è una funzione scalare, un numero, che poi viene moltiplicato per la base e per dx^ν ; il risultato è dunque:

$$\frac{Dv^\alpha}{\partial x^\nu} = v^\alpha{}_{;\nu} + v^\beta \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}$$

Questo oggetto, combinato con la base, dà luogo a un tensore; ci sono per questo due indici liberi (non dummy): α e ν , che sono quelli che andranno a combinarsi con la base e il differenziale dx^ν . Si scrive questo oggetto con la seguente notazione:

$$v^\alpha{}_{;\nu} = \frac{Dv^\alpha}{\partial x^\nu} = v^\alpha{}_{;\nu} + v^\beta \Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}$$

questo, cambiando le coordinate, si trasformerà con un indice covariante e uno controvariante. Questa operazione di **derivazione covariante** è la generalizzazione del concetto di derivazione per un tensore di rango 1. Questo è diverso dal caso scalare: nel caso scalare non si ha indice, di conseguenza il termine della differenziazione della base di fatto sparisce.

L'oggetto $\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}$ è detto **connessione**, e sarà discusso meglio in seguito; possiamo dire subito che esso dipende dal **manifold**, ma anche **dalle coordinate**, diventando di fatto un oggetto non tensoriale, come già accennato. La cosa verrà ulteriormente approfondita.

1.10.2 Caso di tensori covarianti

Lo stesso ragionamento appena fatto può essere anche applicato al caso dei vettori/tensori covarianti. Si consideri dunque:

$$\chi = \chi_\mu \omega^\mu$$

dove $\omega^\mu = dx^\mu$: essa è la base dei vettori covarianti. Applicando gli stessi ragionamenti e passaggi di prima, si arriva a ottenere:

$$\frac{D\chi}{\partial x^\alpha} = (\chi_{\mu,\alpha} + \chi_\varepsilon \Omega^\varepsilon{}_{\alpha\mu}) \omega^\mu$$

dove $\chi_{\mu,\alpha}$ è la derivata parziale rispetto a α . Si può definire dunque anche in questo caso la derivata covariante come:

$$\chi_{\mu;\alpha} = \chi_{\mu,\alpha} + \chi_\varepsilon \Omega^\varepsilon{}_{\alpha\mu}$$

ossia, si ha un termine di derivata tradizionale, più un altro termine che utilizza un'altra connessione, $\Omega^\varepsilon{}_{\alpha\mu}$.

A questo punto, consideriamo il seguente ragionamento: si consideri la contrazione tra le componenti di un vettore covariante e uno controvariante:

$$(\chi_\alpha v^\alpha)$$

si può scrivere il differenziale di questa come differenziale normale, essendo la precedente funzione un numero. Dunque:

$$d(\chi_\alpha v^\alpha) = \chi_{\alpha,\mu} v^\alpha dx^\mu + \chi_\alpha v^\alpha{}_{,\mu} dx^\mu$$

questo deve coincidere con la contrazione tra vettori; quindi:

$$D(\chi, \mathbf{v}) = \chi_{\alpha;\mu} v^\alpha dx^\mu + \chi_\alpha v^\alpha{}_{;\mu} dx^\mu$$

L'oggetto risultante finale è uno scalare; dunque, $D(\chi, \mathbf{v})$ deve coincidere con $d(\chi_\alpha v^\alpha)$. Dunque, scriviamo per esteso le derivate covarianti, al fine di determinare a quale condizione le derivate sono uguali.

$$= (\chi_{\alpha,\mu} + \chi_\varepsilon \Omega^\varepsilon{}_{\alpha\mu}) v^\alpha + \chi_\alpha (v^\alpha{}_{,\mu} + v^\varepsilon \Gamma^\alpha{}_{\varepsilon\mu})$$

Confrontando queste espressioni con il differenziale degli scalari, si hanno due termini coincidenti, e due termini aggiuntivi. Perché ci sia coincidenza, dunque, si deve avere:

$$\chi_\varepsilon v^\alpha \Omega^\varepsilon{}_{\alpha\mu} + \chi_\alpha v^\varepsilon \Gamma^\alpha{}_{\varepsilon\mu} = 0$$

tuttavia, α e ε sono dei *dummy indices*, dal momento che vengono usati per la somma; per questo motivo, essi possono anche essere scambiati, al fine di poter avere delle espressioni raccogliibili a fattor comune, ottenendo semplicemente:

$$(\Omega^\varepsilon{}_{\alpha\mu} + \Gamma^\varepsilon{}_{\alpha\mu}) \chi_\varepsilon v^\alpha = 0$$

che implica, finalmente:

$$\Omega^\varepsilon{}_{\alpha\mu} + \Gamma^\varepsilon{}_{\alpha\mu} = 0$$

Questo è un risultato molto importante: la connessione utilizzata per la derivazione (dunque per il trasporto) di vettori covarianti non è diversa da quella da utilizzare su vettori controvarianti, bensì è semplicemente uguale e opposta in segno; d'ora in avanti, nella trattazione, si terrà conto di ciò:

$$\Omega^\varepsilon{}_{\alpha\mu} = -\Gamma^\varepsilon{}_{\alpha\mu}$$

Il formalismo delle derivate covarianti va utilizzato ogni volta che si ha a che fare con problemi fisici espressi mediante equazioni differenziali: con equazioni differenziali, infatti, il supporto ha un ruolo molto determinante nella soluzione; se le grandezze in gioco dunque non sono semplici scalari, al fine di avere equazioni indipendenti dalla scelta delle coordinate, è necessario utilizzare le derivate covarianti.

Riassumendo:

- dato un vettore controvariante w , volendo farne la derivata covariante, si ottiene

$$w^\mu{}_{;\alpha} = w^\mu{}_{,\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} w^\beta$$

- dato un vettore covariante χ , volendo farne la derivata covariante, si ottiene:

$$\chi_{\mu;\alpha} = \chi_{\mu,\alpha} - \Gamma^\varepsilon{}_{\mu\alpha} \chi^\varepsilon$$

La regola mnemonica per ricordarsi il segno della connessione è: se si ha l'indice in basso della componente del vettore, il segno è positivo (caso di vettore controvariante); nel caso di vettore covariante, dunque di componente con indice in basso, si deve cambiare il segno (segno negativo).

1.10.3 Derivata covariante su tensori di rango superiore

Il concetto di derivata covariante è stato finora introdotto esclusivamente su tensori di rango 1, dunque su vettori. Tuttavia, è possibile estendere semplicemente questo concetto anche per quanto riguarda tensori di rango superiore, come 2, 3, 4, mantenendo in sostanza la stessa impostazione di fondo.

Quando si ragiona coi tensori di rango 2, è possibile pensarli come prodotto tensoriale di più tensori di rango 1; una volta poi introdotta la base di rango 2, è possibile generare tutti i tensori di rango 2. Ragionando in questo

modo, tenendo presente che il prodotto tensoriale ha le proprietà del prodotto, dunque la linearità, volendo fare la derivata di un tensore di rango 2, è possibile pensare a esso come a un tensore di rango 1 tale per cui, per ogni indice, si individua un altro tensore di rango 1; in altre parole, si opera con un indice per volta, fermane uno, quindi muovendo l'altro, e viceversa. Si consideri dunque il seguente esempio di derivata covariante, applicata su un tensore misto (dunque il caso più generico possibile): T^μ_ν .

$$T^\mu_{\nu;\alpha} = T^\mu_{\nu,\alpha} + \Gamma^\mu_{\varepsilon\alpha} T^\varepsilon_\nu - \Gamma^\varepsilon_{\nu\alpha} T^\mu_\varepsilon$$

Analizziamo i vari termini, in ordine: prima di tutto si fa l'operazione di derivazione parziale, come al solito; quindi, si inchioda, si fissa il pedice basso ν , quindi si calcola il termine per la ν -esima componente, e la contrazione viene fatta rispetto al termine in alto del tensore. Essendo il pedice in basso bloccato e quello alto variabile, significa che si sta considerando per ora il tensore come controvariante, di conseguenza la connessione avrà segno positivo. In secondo luogo, si fa l'operazione opposta: si considera fisso l'indice alto del tensore T , quindi variabile quello basso, ottenendo un tensore controvariante; la connessione, per questo, viene considerata con segno negativo.

Questo procedimento è stato applicato per un tensore di rango 2, ma di fatto, noto questo esempio, è possibile aggiungere o togliere tanti termini quanti sono gli indici.

1.10.4 Note aggiuntive sulla connessione

Si è già discusso in precedenza della connessione, dicendo già che essa **non** è un tensore; cambiando le coordinate, infatti, Γ varia, dunque non è invariante rispetto al sistema di coordinate.

La derivata covariante $v^\mu_{;\alpha}$, d'altra parte, è un oggetto tensoriale; essa, si può scrivere come:

$$v^\mu_{;\alpha} = v^\mu_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\varepsilon\alpha} v^\varepsilon$$

Il pezzo a sinistra è certamente un tensore; se trasformo il membro sinistro e il membro destro, vedo che ciascuno dei due addendi un è un tensore; infatti, $v^\mu_{,\alpha}$ non si trasforma come un tensore, e così il secondo termine; nel secondo pezzo, si hanno i nuovi Γ , più v che si trasforma in altro modo. Si può dimostrare, facendo passaggi, che:

$$\Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\epsilon} \frac{\partial^2 \xi^\epsilon}{\partial x^j \partial x^k}$$

si ha un secondo termine aggiuntivo, ossia una derivata seconda mista. Questo secondo termine non interviene nel caso di trasformazioni di coordinate lineari, dal momento che la derivata seconda in questo caso andrebbe a 0; più in generale, per trasformazioni di coordinate non lineari, questo termine risulta essere non nullo. Per dimostrare ciò, sarebbe necessario scrivere in maniera esplicita le varie trasformazioni di coordinate, dunque avere un Γ nuovo indicato, per far andare tutto a posto.

Si è finora parlato delle proprietà di Γ , ma di fatto non si è detto quanto vale. Il loro valore, dipende dal supporto. Il supporto è caratterizzabile mediante una metrica. Parlando di metrica, si era visto che era stato introdotto, relativamente a essa, il concetto di prodotto scalare:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a_\nu b^\nu$$

A questo punto, se si differenzia questo oggetto, essendo esso uno scalare, il differenziale è ordinario; derivando dunque rispetto a ciascuna componente x^α , si ha:

$$X = \frac{\partial(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}{\partial x^\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} a^\mu b^\nu + g_{\mu\nu} a^\mu{}_{,\alpha} b^\nu + g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu{}_{,\alpha}$$

ciascun singolo pezzo è un elemento di un tensore. Per questa ragione, è possibile scrivere le stesse espressioni facendo riferimento alle derivate covarianti:

$$= g_{\mu\nu;\alpha} a^\mu b^\nu + g_{\mu\nu} a^\mu{}_{;\alpha} b^\nu + g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu{}_{;\alpha}$$

Dal confronto tra le ultime due scritte, è possibile trarre alcune indicazioni. Si può infatti verificare subito che si può per esempio sfruttare il tensore metrico per abbassare alcuni indici, ottenendo:

$$= g_{\mu\nu;\alpha} a^\mu b^\nu + b_\mu a^\mu{}_{;\alpha} + a_\nu b^\nu{}_{;\alpha}$$

A questo punto, si consideri il caso particolare di b coincidente con a , ossia il prodotto scalare di un vettore su sé stesso. In questo caso, accade qualcosa di diverso; infatti, considerando \mathbf{a}^2 , gli altri due termini costituiscono l'intero prodotto scalare; di conseguenza, il termine rimanente deve valere per forza

0. Di conseguenza, la derivata covariante del tensore metrico deve per forza essere nulla; questa è una proprietà generale del tensore metrico. In altre parole, trasportare il tensore metrico sul manifold non lo modifica.

Da questa osservazione si può trovare un legame tra metrica e connessione. Per quanto il concetto di connessione non richieda esplicitamente la possibilità di definire una metrica (la connessione si può definire anche su manifold in cui non è possibile definire una metrica), nel caso sia possibile definirla, allora sussiste un legame tra essa e la connessione.

Consideriamo la derivata covariante del tensore metrico, che si è dimostrato essere nulla; essa si può scrivere per esteso come:

$$g_{\mu\nu;\alpha} = g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma_{\nu\alpha}^{\varepsilon} g_{\mu\varepsilon} - \Gamma_{\mu\alpha}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\nu} = 0$$

Scriviamo le stesse espressioni, muovendo gli indici; si consideri, come peraltro fatto sempre finora, ε come unico dummy index, ossia indice sul quale si fa la somma; è possibile scrivere tante equazioni quante le permutazioni degli indici, ottenendo ancora:

$$g_{\alpha\mu;\nu} = g_{\alpha\mu,\nu} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\varepsilon} g_{\mu\varepsilon} - \Gamma_{\mu\nu}^{\varepsilon} g_{\alpha\varepsilon} = 0$$

$$g_{\nu\alpha;\mu} = g_{\nu\alpha,\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\varepsilon} g_{\varepsilon\alpha} = 0$$

Queste sono tre espressioni, con una terna di valori di indici; se il tensore metrico non fosse stato simmetrico, sarebbe stato necessario scrivere $3! = 6$ equazioni, tenendo conto anche delle combinazioni opposte. Risolvendo il sistema, dunque, è possibile trovare la seguente espressione:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\varepsilon} \left(\frac{\partial g_{\beta\varepsilon}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial g_{\gamma\varepsilon}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}} \right)$$

dove le versioni controvarianti delle g sono semplicemente gli elementi dell'inversa della matrice che rappresenta il tensore metrico nel sistema di coordinate scelto.

Nel caso esista la metrica, gli elementi della connessione sono anche detti "simboli di Christoffel".

Capitolo 2

Prime applicazioni del calcolo tensoriale

2.1 Geodetiche

A questo punto si vuole introdurre una prima applicazione del calcolo tensoriale finora introdotto, in modo da sfruttarne la potenza. Al fine di fare ciò, si consideri la seguente situazione: date due posizioni nel manifold P e P' , esistono infiniti percorsi che collegano i due punti. Al variare delle proprietà geometriche del manifold, inoltre, è possibile identificare, di tutti questi percorsi, un percorso “minimo”, ossia il “percorso estremale”.

Ciascun percorso è caratterizzato da un insieme di posizioni, e da un insieme di vettori tangenti in ciascun punto appartenente a esso; date dunque due posizioni su di esso, i due vettori tangenti non saranno in generale uguali tra loro; essi infatti possono ruotare. Si è detto “in generale”, dal momento che esiste una curva che permette di trasportare in modo invariante il vettore tangente: la retta (dal momento che, in essa, la derivata direzionale è nulla). In altre parole, si vuole che si mantenga l’invarianza dell’angolo rispetto alle linee coordinate.

In un manifold piatto, la retta è la curva che permette di collegare mediante il percorso minimo due posizioni; ciò che si potrebbe dunque fare è estendere questo concetto, chiedendo che in generale la derivata direzionale del vettore tangente sul manifold sia 0, al fine di ottenere il “percorso minimo”. Dunque, applicando questa richiesta, si vuole richiedere che:

$$\frac{D\mathbf{u}}{d\lambda} = 0$$

A questo punto, tuttavia, è possibile svolgere questi calcoli, esplicitando nella seguente maniera:

$$\frac{D\mathbf{u}}{d\lambda} = \frac{\partial x^\alpha}{d\lambda} \frac{D\mathbf{u}}{\partial x^\alpha} = u^\alpha u^\mu_{;\alpha} = 0$$

infatti, la prima parte dell'espressione è semplicemente un elemento del vettore tangente, mentre la seconda parte è la derivata covariante del vettore \mathbf{u} .

Questa notazione è assolutamente generale: sul piano, il risultato è una retta, mentre in un generico manifold si ha a che fare con una curva lungo la quale il vettore tangente si trasporta "parallelamente" a sé stesso. Curve di questo tipo sono dette **geodetiche**.

A questo punto, si proceda con i calcoli; a partire dall'espressione precedente, è possibile esplicitare i vari termini (la derivata covariante), ottenendo:

$$u^\alpha u^\mu_{;\alpha} = u^\alpha (u^\mu_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\nu\alpha} u^\nu) = 0$$

tuttavia, si può ricordare che:

$$u^\mu_{,\alpha} = \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha}$$

dove però, a sua volta,

$$u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda}$$

dunque, si ha:

$$u^\alpha u^\mu_{,\alpha} = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \lambda^2}$$

sviluppando alla stessa maniera u^α che premoltiplica tutta la parentesi e u^ν , si hanno:

$$u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda} \quad u^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \lambda}$$

quindi, il risultato finale, combinando tutto insieme, è:

$$= \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0$$

Questa formula racchiude N equazioni, relative a una curva; queste equazioni vanno messe a sistema tra loro, al variare dei vari elementi di connessione considerati.

In coordinate cartesiane, si può immediatamente dire che la connessione Γ sia nulla, di conseguenza rimane esclusivamente il termine “derivata seconda”. Quando si ha un’equazione del tipo:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0$$

la soluzione non ha curvatura, dal momento che la sua derivata seconda è nulla, dunque non può che essere una retta.

Le geodetiche sono una proprietà del **manifold**, non delle coordinate scelte per rappresentarlo; considerando dunque un sistema di coordinate polari, il risultato dovrebbe coincidere con quello ottenuto. Si fa brevemente un esempio di come si dovrebbe operare per dimostrare ciò. Dato un piano, la matrice che rappresenta il tensore metrico su di esso è:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}$$

Dal tensore metrico si possono poi calcolare i Γ . Per come è fatto il tensore metrico, i termini misti sono nulli, e dunque si può dedurre che gli unici termini non nulli siano quelli che hanno due ϑ :

$$\Gamma^r_{\vartheta\vartheta} = -r$$

$$\Gamma^\vartheta_{r\vartheta} = \Gamma^\vartheta_{\vartheta r} = \frac{1}{r}$$

questo secondo termine va contato due volte, visto che si possono scambiare gli indici r e ϑ . Dunque, scriviamo le equazioni delle geodetiche:

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{d\lambda^2} + (-r) \left(\frac{d\vartheta}{d\lambda} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 \vartheta}{d\lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\vartheta}{d\lambda} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

si potrebbe porre a questo punto

$$2 \log \left(\frac{d\vartheta}{d\lambda} \right) = -\log(r) + \log \left(\frac{d^2 r}{d\lambda^2} \right)$$

dunque, si risolve questa in r e la si sostituisce nella seconda equazione, sempre in funzione di r ; da qua si risolve.

A questo punto si consideri un secondo esempio, ossia la sfera; dato il tensore metrico della sfera in coordinate geografiche:

$$g = R^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2(\vartheta) \end{bmatrix}$$

dunque, ancora una volta, si possono fare i conti per ricavare le connessioni, e vedere che:

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} = -\sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$\Gamma^{\varphi} \vartheta \varphi = \Gamma^{\varphi} \varphi \vartheta = -\frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta}$$

da qui dunque si possono scrivere le equazioni delle geodetiche come:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \vartheta}{d\lambda^2} - \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 \varphi}{d\lambda^2} + 2 \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{d\vartheta}{d\lambda} \frac{d\varphi}{d\lambda} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

A questo punto le geodetiche possono essere ricavate per diversi valori di φ , o ϑ . Per esempio, si consideri $\varphi = 0$; si può vedere che la soluzione sia:

$$\vartheta = k\lambda + \text{costante}$$

questo sarebbe semplicemente un cerchio meridiano sulla sfera. Fissare ϑ non è invece sempre permesso: solo per $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ è possibile determinare l'espressione del parallelo; la soluzione è il cerchio equatoriale.

2.2 Tensore di Riemann

Si è parlato sia di manifold piatti, sia di manifold curvi. La curvatura è una proprietà del manifold, dunque, volendola studiare, è necessario introdurre

un oggetto invariante in grado di quantificarla; per questo motivo, esso sarà necessariamente un **tensore** . La curvatura è una proprietà particolarmente difficile da studiare: è infatti necessario utilizzare delle variabili intrinseche al manifold, al fine di non farsi confondere da osservazioni superficiali. Un cilindro, visto da fuori, è curvo; un'osservazione di questo genere tuttavia indurrebbe in errore, dal momento che un cilindro intrinsecamente è piano¹; al contrario, un manifold sferico ha una curvatura.

Al fine di introdurre un tensore che permetta di definire la curvatura, è necessario cercare di identificare una conseguenza della quadratura. A tal fine, si consideri il seguente esempio:

Si consideri una posizione A sul manifold, e un vettore \mathbf{v} su di esso. Si decida dunque di muoversi lungo il manifold, andando dalla posizione A alla posizione B , quindi dalla posizione B alla posizione C . Poi, si consideri il percorso in senso opposto: da C si passi a B , e da B si torni ad A .

Il primo passo è spostarsi da A a B ; questo spostamento, fatto lungo la coordinata dx^α , porta a B . Poi, da B ci si vuole spostare verso C , con uno spostamento arbitrariamente piccolo dx^β , dunque lungo l'altra coordinata. Con ogni spostamento, ciò che si fa è trasportare con sé il vettore. Una volta fatto il giro, si cercherà di fare lo stesso, passando prima dalla coordinata x^β , poi dalla coordinata x^α , facendo dunque il percorso con le linee coordinate prese "nell'altro verso". Alla fine di ciò, ci si porrà la domanda: i vettori \mathbf{v} , trasportati nei due casi, coincidono? Sono ossia paralleli, nelle due situazioni?

La risposta a questa domanda coincide con la risposta alla domanda: il manifold, è piatto o curvo? Se infatti il manifold fosse piatto, per quanto la cosa sia mascherata bene come in un cilindro, i vettori nel punto A prima e dopo il percorso coinciderebbero. Se il manifold avesse una curvatura, al contrario, i due non coinciderebbero.

Il trasporto si fa in modo "parallelo": si mantiene l'angolo. Si consideri dunque a questo punto il procedimento.

1. Il primo passaggio è la valutazione del cambiamento del vettore \mathbf{v} da A a B , usando come prima coordinata x^α , e poi x^β ; al fine di effettuare questa quantificazione, dunque, si valuta il differenziale covariante:

$$Dx^\mu|_{A \rightarrow B} = (v^\mu_{,\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} v^\beta) dx^\alpha$$

questa è la variazione durante il solo primo passaggio, ossia da A a B .

¹volendo vedere la cosa in un altro modo, un cilindro può essere sviluppato su un piano

2. Il secondo passaggio è da B a C ; questo, tuttavia, è più complicato, dal momento che il vettore da trasportare non è più quello di partenza, ma è quello in B , che ha già subito una variazione in seguito al primo trasporto. Quindi:

$$v_{(B)}^\mu = v_{(A)}^\mu + Dx^\mu|_{A \rightarrow B}$$

quindi, il differenziale sarà:

$$Dv_{(B)}^\mu \Big|_{B \rightarrow C} = D \left(v_{(A)}^\mu + Dx^\mu|_{A \rightarrow B} \right) dx^\beta$$

a questo punto, si scriva per esteso questo: partiamo dalla derivata in β del primo termine:

$$v_{,\alpha\beta}^\mu = \left(v_{,\alpha\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu v^\gamma + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu v_{,\beta}^\gamma \right)$$

poi, c'è ancora da calcolare il differenziale della seconda parte:

$$D Dx^\mu|_{A \rightarrow B} = \Gamma_{\varepsilon\beta}^\mu \left(v_{,\alpha}^\varepsilon + \Gamma_{\gamma\alpha}^\varepsilon v^\gamma \right) dx^\alpha dx^\beta$$

Contraendo il dummy index ε , il risultato è il prodotto di due connessioni Γ ; questi si devono combinare con tutte le componenti, dunque si deve effettuare la contrazione come indicato. Il risultato dunque è:

$$Dv_{(B)}^\mu \Big|_{B \rightarrow C} = \left[v_{,\alpha\beta}^\mu + \Gamma_{\alpha\gamma,\beta}^\mu v^\gamma + \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu v_{,\beta}^\gamma + \Gamma_{\varepsilon\beta}^\mu \left(v_{,\alpha}^\varepsilon + \Gamma_{\gamma\alpha}^\varepsilon v^\gamma \right) \right] dx^\alpha dx^\beta$$

3. A questo punto sarebbe necessario partire da C e tornare in A , facendo lo stesso percorso di prima, nel senso opposto. Questo significa andare prima lungo β , poi lungo α , ossia prima considerare un differenziale rispetto a dx^β , e poi rispetto a dx^α , come fatto finora. In questo modo, è come percorrere lo stesso percorso, lungo le due coordinate x^α e x^β , tra loro diverse. Se dunque il vettore è diverso nelle due situazioni, sarà presente una curvatura. Ciò che si dovrebbe dunque fare a questo punto (e che non faremo) è riscrivere la stessa espressione prima con un incremento lungo x^β , poi lungo x^α .

Sono state dunque a questo punto ottenute due diverse espressioni, quantificanti la variazione del vettore \mathbf{v} . Facendo la differenza delle due, il risultato è nullo nel caso la curvatura sia nulla, e non nullo nel caso vi sia una curvatura nel manifold. Alcuni termini andranno via a prescindere: le derivate parziali miste sono infatti uguali tra loro, dunque facendone la differenza esse si annulleranno. Altri termini che si annullano sono quelli lineari in v : anche essi, essendo tutto contratto in dx^α e dx^β , facendoli lungo α o β non cambia niente. Ciò che invece non si annullano in generale sono i termini che contengono le derivate prime delle connessioni, e quelli che contengono i prodotti delle connessioni; in essi infatti scambiando gli indici si avrebbero dei cambi di segno, e dunque non delle sottrazioni. Facendo tutte le varie operazioni, il risultato finale della differenza è:

$$Dv^\mu|_{A \rightarrow C,1} - Dv^\mu|_{A \rightarrow C,2} = R^\mu_{\ \varepsilon\alpha\beta} v^\varepsilon dx^\alpha dx^\beta$$

Questo termine dipende dalle v^ε , ai differenziali (al loro prodotto, dunque all'area contornata dal percorso), e dunque ai termini che dipendono linearmente da v ; $R^\mu_{\ \varepsilon\alpha\beta}$ è il **tensore di Riemann**, ed è dato da:

$$R^\mu_{\ \varepsilon\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\ \varepsilon\alpha,\beta} - \Gamma^\mu_{\ \varepsilon\beta,\alpha} + \Gamma^\mu_{\ \alpha\nu} \Gamma^\nu_{\ \varepsilon\beta} - \Gamma^\mu_{\ \beta\nu} \Gamma^\nu_{\ \varepsilon\alpha}$$

Questo oggetto è dato dalla combinazione di oggetti che non sono tensori, tuttavia esso è, a tutti gli effetti un tensore; infatti, questo oggetto deriva dalla differenza di due tensori di rango 1, ossia dalla differenza dei differenziali covarianti che rappresentano la variazione del vettore \mathbf{v} causata dal trasporto. Come si vede dalla penultima formula scritta, infatti, v^ε sono componenti di un tensore, Dv^μ è un tensore, dx^α e dx^β sono la base di tensori covarianti, dunque anche R deve essere per forza un tensore. Volendo fare la prova, facendo il cambio di coordinate, l'oggetto deve rimanere invariante, e le varie derivate si eliminerebbero tra loro. In realtà, ciascuno dei quattro pezzi che combinati generano il tensore di Riemann sono tensori: essendo essi combinati linearmente, non possono non essere tensori.

In realtà, è stato omesso un dettaglio. Tutti i ragionamenti fatti finora sono stati basati su lunghezze; in realtà, ciascuno di questi termini ha un significato più generale, ossia quello operatoriale: le varie grandezze, essendo tensori, sono operatori. Se dunque si fa un salto di dx^α e poi dx^β , è diverso rispetto a ciò che si otterrebbe facendo prima un salto di dx^β e poi dx^α . Questo, in termini operatoriali, significa avere una **non-commutazione**: gli

operatori non commutano. Facendo le differenze, in realtà, quello che si ottiene è:

$$dS^{\alpha,\beta} = \frac{dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha}{2}$$

Questo è un oggetto antisimmetrico: questo oggetto andrebbe scritto in questo modo, usando una base antisimmetrica. Questa è una **area orientata**, rappresentata mediante un tensore. La base dei tensori antisimmetrici è quella più appropriata, dal momento che, come si può vedere dalla sua definizione, il tensore di Riemann è antisimmetrico: scambiando α e β , infatti, il tensore cambia di segno; per questo motivo, conviene usare una base antisimmetrica. Bisogna dunque specificare che $dx^\alpha dx^\beta$ è un prodotto antisimmetrico, in cui l'ordine non è indifferente; se i differenziali fossero ordinari, non cambierebbe nulla, dal momento che il risultato darebbe 0; contraendo due oggetti antisimmetrici, invece, il risultato non dà 0, come è giusto che sia.

Il tensore di Riemann è anche detto **tensore di curvatura**, dal momento che è l'oggetto geometrico che fornisce le informazioni sulla curvatura del manifold. Essendo un oggetto tensoriale, ovviamente si ha invarianza: se esso vale 0, vale 0 a prescindere dalle coordinate. Il tensore di Riemann applicato al piano in coordinate cartesiane, o polari, vale sempre 0. Allo stesso modo, in una sfera, non verrà mai uguale a 0.

2.2.1 Proprietà del tensore di Riemann

È possibile a questo punto studiare alcune proprietà del tensore di Riemann: le sue componenti, infatti, presentano simmetrie, di conseguenza le componenti realmente indipendenti tra loro sono molte meno di N^4 , dove N è il numero di dimensioni dello spazio considerato e 4 è il rango del tensore.

Il tensore di Riemann $R^\mu_{\ \varepsilon\alpha\beta}$ è antisimmetrico negli ultimi due indici, α e β , ma è anche antisimmetrico nei primi 2. Inoltre, è simmetrico rispetto al cambio delle due coppie. Scrivendone la versione completamente covariante, si ha dunque::

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$$

La presenza di queste simmetrie quindi permette di valutare il numero di coefficienti realmente indipendenti. Supponendo di essere in uno spazio a 3 dimensioni, se gli ultimi 2 indici sono antisimmetrici, essendo liberi gli

altri, vi sono solo 3 elementi liberi: l'antisimmetria implica diagonale nulla, e l'antisimmetria implica che dei 9 coefficienti meno i 3 della diagonale ve ne sono 6, a 2 a 2 uguali e opposti per l'antisimmetria. Altra simmetria presente è la cosiddetta **identità di Bianchi**:

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0$$

ossia, fissando α e facendo la permutazione circolare degli altri indici, si ha questa identità. Questa riduce ulteriormente il numero di elementi indipendenti tra loro.

2.3 Tensore di Ricci e curvatura scalare

Il tensore di Riemann contiene tutte le informazioni sulla curvatura; tuttavia, è possibile che solo alcune di queste informazioni siano effettivamente interessanti; di conseguenza, è possibile ottenere tensori di rango inferiore, dunque più semplici da “maneggiare”, ma con meno informazioni di esso. L'idea è contrarre il tensore di Riemann su sé stesso (ricordando che la contrazione è un'operazione invariante), in questo modo:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} \implies R^{\alpha}_{\beta\alpha\delta} = R_{\beta\delta}$$

Il tensore $R_{\beta\delta}$ è detto **tensore di Ricci**. Questo stesso tensore è ricavabile lavorando sugli indici β e δ ; non è possibile invece farlo lavorando su α e β o γ e δ , perché gli indici sono antisimmetrici e la contrazione darebbe luogo al tensore nullo.

Volendo avere un'informazione ancora più sintetica, è possibile scrivere (mediante applicazione della metrica) il tensore di Ricci in forma mista, farne dunque la contrazione, e ottenere dalla sua traccia uno scalare: la curvatura:

$$R^{\mu}_{\mu} = R$$

La curvatura scalare dunque contiene parte dell'informazione del tensore di Riemann, ma non tutta: se la curvatura scalare è diversa da zero in un punto, infatti, si ha la certezza che in quel punto la curvatura sia nulla; al contrario, se la curvatura scalare fosse uguale a zero in un punto, non si avrebbe alcuna certezza, solo da essa, riguardo alla curvatura del manifold: infatti, se la curvatura fosse nulla, bisognerebbe risalire al tensore di Ricci, o addirittura a quello di Riemann: potrebbe essere che la curvatura fosse zero, e Ricci no;

ancora peggio, sia la curvatura scalare sia il tensore di Ricci possono essere nulli, e sarebbe necessario andare su Riemann. Questo, dal momento che R , la curvatura gaussiana, è il prodotto degli inversi dei raggi di curvatura principali: si può avere un ellissoide o iperboloide osculatori; può essere che solo uno dei due sia nullo, e il prodotto sarebbe comunque nullo.

Tutti questi discorsi sono locali: il tensore di Riemann dà informazioni locali, per ogni punto, così come la curvatura e il tensore di Ricci.

2.4 Operatori tensoriali

I tensori come già detto sono oggetti invarianti a trasformazioni generiche di coordinate; dato dunque un tensore con un certo rango, è possibile associargli delle informazioni, grazie a questa invarianza. Un esempio di invariante visto, per tensori di rango 1, è la norma:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_\mu v^\mu = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$$

Esistono invarianti associabili anche a tensori di rango 2; un esempio è la **traccia**: dato un tensore in forma mista, la sua contrazione è la traccia; essa è un'operazione che riduce di 2 il rango di un tensore:

$$T^{\mu\nu} \implies T^\nu_\mu \implies T^\alpha_\alpha$$

Tutti questi sono **invarianti di ordine 1**; è tuttavia possibile introdurre anche invarianti di ordine più elevato, come per esempio il prodotto scalare di un tensore con sé stesso; dato $T_{\alpha\beta}$,

$$T_{\alpha\beta}^{\beta\alpha}$$

la contrazione opera su indici adiacenti. $(T \cdot T)$ è un po' come il prodotto di due tensori: ciò coinvolge il prodotto a 2 a 2 delle componenti, ottenendo dunque un invariante di ordine 2; questo significa sostanzialmente fare la matrice "al quadrato". Questo oggetto non è il quadrato della traccia di T : è qualcosa di diverso, ma è sempre un invariante. Allo stesso modo, è possibile definire degli invarianti di ordine anche superiore a 2: potrebbe essere possibile fare il "cubo" dell'operatore, e saturando tutti gli indici dai più interni ai più esterni, si ottiene una sorta di traccia, ma di ordine superiore.

2.4.1 Derivata di Lie

I vettori, come già accennato, hanno anche un'interpretazione operatoriale: essi infatti erano stati definiti come operatori differenziali. La parte che contiene derivate, infatti, ha la struttura di una derivata parziale, che è in generale un operatore.

Abbiamo finora considerato il prodotto scalare (dato da coniugazione e contrazione), in modo da relazionare due vettori a un numero. Il prodotto tensoriale, d'altra parte, da 2 vettori genera un tensore di rango 2, mediante combinazioni di derivate parziali. A questo punto, si vuole introdurre un operatore che associ a 2 vettori un altro vettore (come il prodotto esterno, che verrà introdotto in seguito). Si considerino dunque due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} , e si **applichi** il primo al secondo:

$$\mathbf{u} = u^\mu \mathbf{e}_\mu \quad \mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

vogliamo ottenere:

$$\mathbf{uv}$$

Al fine di facilitare l'interpretazione, si consideri una funzione scalare f ; applicare il vettore \mathbf{u} alla funzione f significa:

$$\mathbf{u}f = u^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} f$$

questa non è altri che la derivata direzionale della funzione scalare f . Una volta presa dunque confidenza con questa idea dell'“applicazione”, si può applicare \mathbf{u} a \mathbf{v} , a sua volta applicato alla funzione scalare f :

$$\begin{aligned} \mathbf{uv}f &= \left[u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right) \right] f = \\ &= \left[u^\mu v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + u^\mu v^\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \right] f = \\ &= u^\mu v^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + u^\mu v^\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \end{aligned}$$

Questo è l'effetto dell'applicazione di \mathbf{uv} a f : una derivata seconda. Purtroppo, non si è ottenuto l'operatore che si sperava: non si ha un vettore!

Per ottenere il risultato sperato, è necessario antisimmetrizzare l'operatore, ottenendo:

$$\mathbf{uv} - \mathbf{vu} = \mathbf{u}^\mu \mathbf{v}^\alpha_{,\mu} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - v^\alpha u^\mu_{,\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + u^\mu v^\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} - v^\alpha u^\mu \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\mu}$$

ma, siccome le derivate seconde miste commutano, ed essendo i termini a essa moltiplicati dei numeri, è possibile dire che questo vale:

$$\mathbf{uv} - \mathbf{vu} = (u^\mu v^\alpha_{,\mu} - v^\mu u^\alpha_{,\mu}) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Questo invece è un vettore: ha le componenti (nella parentesi), e la base, fuori; inoltre, esso è antisimmetrico rispetto agli indici α e μ . Questa operazione è detta **derivazione di Lie**.

2.4.2 Proiettore

Un'altra operazione riguarda la proiezione di un tensore lungo una certa direzione. Una direzione, normalmente, si identifica mediante un vettore tangente \mathbf{n} ; questo d'ora in avanti verrà normalizzato, scegliendo le componenti in maniera tale che:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$$

Dunque, volendo proiettare il vettore \mathbf{v} , si può individuare un operatore \mathcal{P} che permette di proiettare \mathbf{v} su \mathbf{n} :

$$\mathcal{P} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

L'operatore di proiezione, dunque, è un tensore di rango 2: effettuando il prodotto tensoriale del versore (vettore unitario) che indica la direzione di interesse per sé stesso; questo, dunque, è un tensore di rango 2. Esso, applicato a \mathbf{v} , si comporta nella seguente maniera:

$$\mathcal{P} \cdot \mathbf{v} = n^\mu n^\nu \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu \cdot v^\alpha \mathbf{e}_\alpha$$

ma il prodotto scalare, come già detto, si applica tra indici adiacenti; scegliendo dunque una base ortonormale, tale per cui

$$\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{e}_\mu = \delta_{\nu\mu}$$

si ottiene:

$$\mathcal{P} \cdot \mathbf{v} = n^\mu n^\nu v^\alpha \mathbf{e}_\mu \delta_{\nu\alpha}$$

contraendo ciò su μ e α , il risultato è:

$$\mathcal{P} \cdot \mathbf{v} = n^\alpha v^\alpha n^\mu \mathbf{e}_\mu$$

dove i n^α rappresentano i coseni direttori. Riscrivendo,

$$= n^\alpha v^\alpha \mathbf{n}$$

Esempio di applicazione

Si consideri ora un esempio in 3 dimensioni con coordinate cartesiane:

$$\mathbf{n} = (n^x, n^y, n^z) = (1, 0, 0)$$

ossia, si considera sostanzialmente la proiezione lungo l'asse x ; \mathbf{v} invece ha forma:

$$\mathbf{v} = (v^x, v^y, v^z)$$

Dunque, facendo il conto, si ha:

$$\mathcal{P} \cdot \mathbf{v} = n^x v^x \hat{\mathbf{n}} = 1 \times v^x \times \frac{\partial}{\partial n^x}$$

Dunque, il vettore è lungo x !

Considerazioni finali sul proiettore

Si applichi a questo punto l'operatore \mathcal{P} a sé stesso:

$$\mathcal{P} \cdot \mathcal{P} \cdot \mathbf{v}$$

$\mathcal{P} \cdot \mathbf{v}$ è un vettore proiettato lungo \mathbf{n} ; dunque, se si proietta ancora una volta ciò lungo \mathbf{n} , si ottiene lo stesso risultato. Dunque, si può dire che:

$$\mathcal{P}^n = \mathcal{P}$$

Questo è un **operatore idempotente**: elevandolo a qualsiasi potenza, l'operatore non cambia.

2.4.3 Riflessione

Si vuole a questo punto introdurre un altro operatore, \mathcal{H} , definito come:

$$\mathcal{H} = \mathcal{I} - 2\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = \mathcal{I} - 2\mathcal{P}$$

ossia, come il tensore identità meno due volte il proiettore. Al fine di comprenderne il significato, si consideri la seguente figura:

Applicando \mathcal{H} a un vettore \mathbf{v} , si ha:

$$\mathcal{H} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} - 2v_n \mathbf{n}$$

ossia, il vettore stesso, meno due volte la componente tangenziale di \mathbf{v} su \mathbf{n} . Questo operatore dunque ritorna un vettore ottenuto sottraendo a \mathbf{v} la sua parte tangente due volte; dal momento che sottraendo solo una volta si ottiene un vettore \mathbf{v}' appartenente a un piano normale a \mathbf{n} , sottraendo due volte v_n il risultato è quello di avere un vettore \mathbf{v}'' specchiato rispetto a un piano normale a \mathbf{n} : questa è una **riflessione rispetto a un piano**.

2.4.4 Rotazioni

Si vuole a questo punto introdurre un'altra operazione su tensori: la **rotazione**. Formalmente, dato $N = 3$, metrica euclidea e sistema di riferimento cartesiano, un operatore che permetta di far ruotare un vettore attorno all'asse x , \mathcal{R}_x , sarà rappresentato da una matrice tale da non toccare x , ma solo gli altri elementi:

$$\mathcal{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Questa matrice indica una rotazione in verso antiorario, come si può vedere nella seguente figura:

Dal sistema (y, z) , x asse di rotazione, si passa a un sistema (y', z') , dove le componenti sono rappresentate da vettori diversi. Si può vedere, moltiplicando ciascuna componente del vettore (v^y, v^z) con la matrice, che si possono ottenere le componenti trasformate; per fare un esempio,

$$v^{y'} = v^y \cos \vartheta + v^z \sin \vartheta$$

questa relazione è verificabile mediante il disegno.

Questa matrice permette di ruotare rispetto a x ; per fare la stessa cosa rispetto a y o z , è sufficiente modificare righe e colonne in maniera appropriata.

Altra estensione riguarda il verso di rotazione; per avere una rotazione in senso orario, è sufficiente riscrivere questa matrice sostituendo a ϑ il termine $-\vartheta$: i seni cambieranno di segno, i coseni no.

Questo operatore (in generale) presenta una proprietà interessante:

$$\mathcal{R}_x(\vartheta)\mathcal{R}_x(-\vartheta) = \mathcal{I}$$

ossia,

$$\mathcal{R}(-\vartheta) = \mathcal{R}^{-1}(\vartheta)$$

Questa è una peculiarità interessante: le inverse coincidono con le trasposte; in ambito quantistico, con matrici complesse, questa è la **coniugazione hermitiana**.

Generalizzazione tensoriale della rotazione

La rotazione è un operatore non commutativo: l'ordine delle rotazioni compiute infatti non è indifferente. Dato \mathbf{n} versore che indica l'asse di rotazione, generico, l'operatore rotazione si può scrivere come:

$$\mathcal{R}(\varphi) = \cos \varphi \mathcal{I} + (1 - \cos \varphi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \sin \varphi (*n)$$

dove $(*n)$ è legato al **tensore completamente antisimmetrico**, o **tensore di Levi-Civita**:

$$\varepsilon_{\mu\nu} = (-1)^p \delta_{\mu\nu}$$

dove p indica le possibili permutazioni: il tensore ε infatti ha componenti che sono diverse da 0 solamente quando μ e ν sono diversi; $\varepsilon_{\mu\nu}$ dunque, considerando una situazione a $N = 3$ dimensioni, se gli indici sono $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, allora il valore è 1; altrimenti, se la permutazione è $(1, 3)$, $(3, 2)$, $(2, 1)$, quindi permutazione nel senso opposto, il tensore vale -1 .

Continuiamo ad analizzare questo operatore di rotazione \mathcal{R} : da una parte si ha l'identità, moltiplicata per $\cos \varphi$; poi, si ha il secondo termine, che è strettamente imparentato con il proiettore; esso è rappresentabile mediante una matrice, in cui l'unico termine diverso da 0, nel caso precedentemente

analizzato (\mathcal{R}_x), è quello in x ; per quanto riguarda l'esempio di \mathcal{R} , il secondo termine non darà contributi per y e z , mentre il terzo (essendo antisimmetrico) non darà contributi per quanto riguarda i termini diagonali, ma solo i termini antidiagonali, portando a introdurre i termini in seno con i segni opportuni.

In realtà il $(*n)$ è un operatore antisimmetrico che è costruito a partire dal tensore di Levi-Civita, come si vedrà in seguito; si fa corrispondere a questo operatore un tensore di rango 2 che permette di ottenere il risultato sopra spiegato.

2.5 Autovalori, autovettori

Prevalentemente si avrà a che fare con tensori di rango 2; per questo motivo, ha senso approfondire il discorso, introducendo alcuni concetti aggiuntivi riguardo a essi.

In generale, applicando un tensore di rango 2 a un vettore, il risultato che si ottiene è un altro vettore:

$$T \cdot \mathbf{v} = T^\mu_\alpha v^\alpha \mathbf{e}_\mu$$

Gli indici, vengono trattati dunque come nel prodotto scalare; questa operazione, di conseguenza, genera da \mathbf{v} un vettore \mathbf{v}' dello stesso tipo.

A questo punto, ci si pone una particolare domanda: quando, a partire da un tensore di rango 2, applicandolo a un vettore, si ottiene un altro vettore, parallelo a esso?

$$T \cdot \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

In questa situazione, dunque, i due vettori considerati sono paralleli, dal momento che differiscono esclusivamente per la norma.

Si ricercano soluzioni non banali per questa equazione tensoriale; nel caso esse esistano, i valori di λ corrispondenti alla soluzione sono gli **autovalori** dell'operatore T (o del tensore T che dir si voglia); a λ corrisponde un vettore \mathbf{u} , che sarà l'**autovettore**. Tutto ciò, è indipendente dal sistema di coordinate: trasformando le coordinate, infatti, \mathbf{u} si mantiene intatto: cambia la base, cambiano le componenti, ma il risultato complessivo è un invariante.

L'equazione tensoriale può dunque essere riscritta nella seguente maniera:

$$(T - \lambda \mathcal{I}) \mathbf{u} = 0$$

Sono stati introdotti autovalori e autovettori; questi introducono un pezzo di informazione in più sui tensori di rango 2: infatti dal momento che si ha a che fare con N scalari, si hanno informazioni in più rispetto alla traccia, che era un singolo scalare.

Finora è stata scritta una sola equazione, ma in realtà questa deve essere vista come un sistema di N equazioni, dove N rappresenta al solito il numero di dimensioni del manifold che si sta trattando; le soluzioni devono essere non banali. Al fine di garantire la soluzione per queste equazioni, il determinante di questo sistema deve essere nullo; in altri casi, non è possibile avere soluzioni non banali. Dunque, al fine di procedere, sarebbe doveroso scrivere:

$$\det \{T - \lambda \mathcal{I}\}$$

La matrice dei coefficienti ha una forma del tipo:

$$\begin{bmatrix} T_1^1 - \lambda & T_2^1 & T_3^1 \\ T_1^2 & T_2^2 - \lambda & T_3^2 \\ T_1^3 & T_2^3 & T_3^3 - \lambda \end{bmatrix}$$

La condizione di determinante nullo permette di scrivere un'equazione in λ . Il termine con λ , come si può vedere, è contenuto esclusivamente sulla diagonale (essendo λ moltiplicato per l'identità). Come noto dalla Geometria, il calcolo del determinante consiste nel prendere un elemento della prima riga, moltiplicarlo con uno della seconda riga, con uno della terza riga, e così via, facendo in modo che non ci siano mai due elementi della stessa riga o della stessa colonna; il risultato sono prodotti di N fattori, tra righe e colonne diversi; il risultato finale, quindi, è un polinomio di ordine N , in λ ; il termine di grado massimo sarà quello relativo alla diagonale, e poi si avrà a che fare con i termini di ordine minore. Per il teorema fondamentale dell'algebra, questo polinomio avrà N soluzioni, per quanto non necessariamente distinte: è possibile che ci siano delle degenerazioni, e dunque che ci siano valori ben definiti ma anche uguali tra loro di λ .

Una volta trovati, mediante questa equazione, N autovalori, sostituendo ciascun valore λ_i nella matrice il determinante farà sicuramente 0, di conseguenza è possibile risolvere il sistema omogeneo, trovando un corrispondente autovettore \mathbf{u}_i , noto a meno di un fattore di proporzionalità. Per via del fatto che questo è un sistema di N equazioni in N incognite, le soluzioni saranno

indipendenti tra loro: è impossibile ottenerne una mediante combinazione lineare delle altre. Di conseguenza, i vari autovettori \mathbf{u} possono costituire una base; questo significa che è possibile ruotare i vettori di base in modo da farli coincidere con gli autovettori. Utilizzando questa rappresentazione, ogni vettore di base finisce per essere l'elemento della base canonica ortonormale: $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$, e così via. Di conseguenza, se il tensore T è rappresentato nella base degli autovettori, esso diventa diagonale, dove gli elementi della diagonale sono proprio gli autovalori. Dal momento che, tuttavia, la traccia è un invariante rispetto al sistema di coordinate scelto, si può dire che la traccia sia data dalla somma degli autovalori dell'operatore.

2.5.1 Considerazioni conclusive

Alla base di tutti i ragionamenti fatti su autovalori e autovettori, era stata posta una particolare condizione: la **simmetria** del tensore. Tuttavia, è ovviamente possibile avere a che fare con un tensore W che non abbia particolari proprietà di simmetria, ossia che non sia né simmetrico né antisimmetrico:

$$W^{\mu\nu} \neq W^{\nu\mu} \neq -W^{\nu\mu}$$

In questa situazione, tuttavia, è sempre possibile costruire due tensori in questo modo:

$$T^{\mu\nu} = \frac{W^{\mu\nu} + W^{\nu\mu}}{2} \quad F^{\mu\nu} = \frac{W^{\mu\nu} - W^{\nu\mu}}{2}$$

che, sommati insieme, danno $W^{\mu\nu}$. Su ciascuno dei due pezzi, tuttavia, è possibile trarre varie considerazioni: il primo pezzo infatti è simmetrico, dunque è possibile caratterizzarlo mediante traccia, autovalori, autovettori; per quanto riguarda il secondo pezzo, che è antisimmetrico, si sa per ipotesi che la traccia sia nulla; inoltre, si può comunque effettuare il calcolo di autovalori e autovettori, e sapendo che la traccia è nulla è possibile introdurre delle relazioni tra i vari autovalori (per esempio, se l'operatore è di dimensione 2, un autovalore sarà l'opposto dell'altro, e così via).

Capitolo 3

Teoria dell'elasticità

A questo punto si vuole introdurre una prima vera e propria applicazione del formalismo tensoriale finora presentato: la teoria dell'elasticità.

Si immagini di disporre di un manifold continuo, **materiale**; per ipotesi e semplicità, si supponga che sia piatto, in modo da avere un tensore di Riemann nullo:

Si considerino diverse posizioni: una posizione di partenza P , dunque dei punti P^1 e P^2 identificati mediante vettori che partono dalla posizione P . Questi vettori, in questo caso, sono particolarmente semplici da indicare, dal momento che giacciono su rette; tutto ciò è accettabile dal momento che si è partiti da una metrica euclidea, dove dunque le geodetiche sono delle rette, e quindi dove i vettori giacciono su di esse. Più in generale, quando le geodetiche non sono delle rette, non si potrà definire il vettore semplicemente come segmento retto che unisce due posizioni.

Quella appena introdotta è una situazione di partenza; si supponga ora, che per qualche azione esterna, il manifold risulti essere deformato rispetto a questo stato, spostando il punto P^1 in una posizione $P^{1'}$, e il punto P^2 in una posizione $P^{2'}$. Il manifold, di conseguenza, non sarà più piatto, dunque in realtà non sarebbe più opportuno utilizzare frecce al fine di rappresentare i nuovi punti. Ciò che si può fare, tuttavia, è descrivere utilizzando come riferimento la situazione imperturbata: utilizzando sempre le variabili del manifold nello stato di partenza, si può comunque avere una descrizione delle varie posizioni.

Considerando un punto prima e dopo la deformazione, esso prima era rappresentato mediante un vettore \mathbf{r} , il secondo mediante un vettore \mathbf{r}' , ottenuto a partire da \mathbf{r} mediante un'operazione che converte un vettore in un

altro vettore; questa, come si può immaginare dalla teoria precedentemente analizzata, sarà rappresentabile mediante un tensore di rango 2:

$$\mathbf{r} \implies \mathbf{r}' = T \cdot \mathbf{r}$$

In generale, tuttavia, \mathbf{r}' potrebbe differire da \mathbf{r} solo di un certo vettore \mathbf{d} , considerando di essere in geometria euclidea:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{d}$$

dove \mathbf{d} rappresenta la traslazione introdotta a partire da \mathbf{r} in seguito alla deformazione.

Lo spostamento in realtà non contiene esclusivamente una traslazione: per ogni posizione è possibile scegliere una base ortonormale. Una volta che c'è stata la deformazione, si sposta un punto, ma in generale anche la base subisce effetti: se si immagina per esempio di avere a che fare con un volumetto, ciascun punto al suo interno subirà sì una traslazione, ma anche una rotazione rispetto alla sua origine locale (dove per esempio l'origine locale del volumetto può essere relativa al centro del volumetto).

Volendo dunque individuare un punto nel volumetto mediante una certa \mathbf{r}_i , si avrà, dopo la deformazione, una $\mathbf{r}'_i \neq \mathbf{r}_i$. Dunque, si può quantificare \mathbf{d} , scrivendo che:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a} + \mathcal{R}\mathbf{r}$$

dove \mathbf{a} è un termine di sola traslazione, mentre \mathcal{R} è una rotazione. \mathbf{a} è un termine di traslazione comune a tutti i punti del volumetto; di conseguenza, esso rappresenta semplicemente un offset, e non è interessante ai fini dello studio della deformazione del manifold. Quindi, ha senso solo vedere cosa capita rispetto a \mathbf{r} , ossia cosa accade puntualmente su ciascun punto; si può dunque dire che:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathcal{R}\mathbf{r}$$

dove \mathcal{R} in realtà è un operatore che può anche essere più complicato di una semplice traslazione: esso può anche avere distorsioni varie.

3.1 Teorema di decomposizione polare

Al fine di quantificare la deformazione, è possibile scrivere:

$$\mathbf{r}' = T\mathbf{r}$$

dove T sarà l'identità, più il termine relativo a \mathcal{R} o all'operatore che sia. Si può dimostrare che T è sempre decomponibile come una rotazione \mathcal{R} più un particolare termine simmetrico, \mathcal{S} :

$$T = \mathcal{S}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{S}$$

Al fine di dimostrare ciò, si costruisca un termine \mathcal{S} tale da essere simmetrico, dicendo che:

$$\mathcal{S}^2 = TT^T$$

dove T^T è il tensore trasposto di T . Moltiplicando un tensore per il suo trasposto, il risultato sarà certamente simmetrico: si avranno moltiplicazioni di righe per colonne tali da simmetrizzare il tutto. Poi, si può ottenere \mathcal{S} come:

$$\mathcal{S} = \sqrt{\mathcal{S}^2}$$

Da quanto visto precedentemente su autovalori e autovettori, tuttavia, si sa che un tensore simmetrico è diagonalizzabile, quindi è possibile trovare autovalori, autovettori, e questi ultimi considerarli come assi: gli **assi principali**.

Si ritorni alla tesi: si voleva dimostrare che

$$T = \mathcal{S}\mathcal{R}$$

dunque, considerando \mathcal{S} espresso negli assi principali, si premoltiplichino ambo i membri per \mathcal{S}^{-1} :

$$\mathcal{S}^{-1}T = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S}\mathcal{R}$$

dunque, è possibile vedere, facendo la trasposta, che:

$$(\mathcal{S}^{-1}T)^T = T^T\mathcal{S}^{-1,T} = \mathcal{R}^T$$

ma, a questo punto, moltiplicando l'equazione di partenza per questa, è possibile ottenere:

$$\mathcal{S}^{-1}TT^T\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{R}\mathcal{R}^T$$

dove, si ricordi, che $\mathcal{R}^T = \mathcal{R}^{-1}$; inoltre, $TT^T = \mathcal{S}^2$; quindi, si ha, in finale:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}$$

che significa che l'identità è soddisfatta.

A questo punto, è possibile effettuare lo stesso gioco per quanto riguarda il caso opposto:

$$T = \mathcal{R}\mathcal{S}$$

Al fine di fare ciò, è possibile costruire la seguente matrice:

$$\mathcal{S}' = \mathcal{R}^T\mathcal{S}\mathcal{R}$$

Dunque, data questa matrice, è possibile scrivere:

$$\mathcal{R}\mathcal{S}' = \mathcal{R}\mathcal{R}^T\mathcal{S}\mathcal{R} = \mathcal{S}\mathcal{R}$$

quindi, mediante questo trucco, ci si è ricondotti al caso precedente, dove si sa che la decomposizione è valida.

3.2 Tensore di deformazione

3.2.1 Prima definizione

Una volta ricavato il teorema di decomposizione polare, ha senso applicarlo; escludendo la presenza di rotazioni nel tensore ($\mathcal{R} = \mathcal{I}$), si ha che:

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathcal{S}\mathcal{R}\mathbf{r} - \mathbf{r} = (\mathcal{S} - \mathcal{I})\mathbf{r}$$

dunque, data l'ipotesi di assenza di rotazioni, la deformazione dà luogo a una matrice simmetrica, alla quale si sottrae la matrice identità; questo è il **tensore di deformazione**, spesso scritto come $\varepsilon_{\alpha\beta}$ (si noti che, nonostante le lettere coincidano, questo **non** è il tensore di Levi-Civita). Considerando poi il $\frac{\Delta\mathbf{r}}{\mathbf{r}}$, si definisce il **tensore di strain**; i tensori ora introdotti, sono simmetrici. Essi sono gli ingredienti fondamentali per descrivere le deformazioni di un manifold materiale continuo.

3.2.2 Seconda definizione

Si vuole a questo punto arrivare a un'espressione analoga a quella precedente, utilizzando un ragionamento diverso. Si consideri a questo punto il manifold nelle due situazioni, caratterizzandole mediante le distanze dei punti prima e dopo la deformazione. Ciò che si può dire è che, **prima** della deformazione, si ha:

$$(dl_0)^2 = E_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

dove E è il tensore metrico euclideo (dal momento che, come si era visto, si parte da un piano). Una volta che è stata effettuata la deformazione, si ha una modifica della distanza, ottenendo la nuova distanza scritta come segue:

$$(dl)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

utilizzando dunque lo stesso set di coordinate, l'unica differenza sta nella metrica; quindi, volendo calcolare la differenza tra le due distanze, al fine di quantificare la variazione di distanza, si ha:

$$\Delta (dl)^2 = [g_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}] dx^\mu dx^\nu$$

La differenza tra i due tensori metrici è un tensore di rango 2, simmetrico; esso è ancora una volta il tensore di strain.

3.2.3 Terza definizione

Si può introdurre un altro ragionamento per ricavare i tensori di interesse. Le coordinate di un punto del manifold sono x^μ ; una volta introdotto uno spostamento, caratterizzato mediante delle componenti u^μ , si ottiene:

$$x^\mu + u^\mu = x'^\mu$$

Se \mathbf{u} è lo stesso per ogni punto considerato, la deformazione coincide con un spostamento rigido. Al fine tuttavia di avere informazioni locali, è necessario ricavare le variazioni infinitesime di x'^μ :

$$dx'^\mu = dx^\mu + du^\mu$$

se i du^μ sono diversi a seconda del punto considerato, la deformazione non è una semplice traslazione rigida. Si può a questo punto sviluppare l'espressione, ottenendo:

$$dx^{\mu'} = dx^\mu + \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

A questo punto, si recuperi nuovamente la distanza tra i due punti, $(dl)^2$, che si può scrivere come:

$$(dl)^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu'} dx^{\nu'} = g_{\mu\nu} \left[\left(dx^\mu + \frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \right) \left(dx^\nu + \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\beta} dx^\beta \right) \right]$$

Quindi, a questo punto, svolgendo i vari prodotti, si ottiene:

$$\begin{aligned} &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{\mu\nu} \left[\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha dx^\nu + \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\beta} dx^\beta dx^\mu \right] + \\ &+ g_{\mu\nu} \left[\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta \right] \end{aligned}$$

Dal momento che tutti gli indici sono dei dummy indices, è possibile fare degli scambi; il risultato dunque è, raccogliendo:

$$= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \left[\mathcal{I} + \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} \right) \delta_{\alpha\beta} \right]$$

Bisogna contrarre il termine con un $\delta_{\alpha\beta}$, al fine di far sparire i suddetti indici, da qua la sua introduzione. Il termine quadratico è stato trascurato, dal momento che come ipotesi si considera una teoria della elasticità **lineare**: i termini quadratici sono dunque considerati trascurabili, in questa trattazione. Il risultato finale è:

$$(dl)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} + \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\nu} \right) dx^\mu dx^\nu$$

Il primo pezzo rappresenta la distanza prima della deformazione, mentre il secondo la distanza dopo la deformazione; quindi, nel primo termine il tensore metrico è ancora una volta quello euclideo, esattamente come prima, mentre nel secondo termine si ha il termine dipendente dal tensore di strain. Si può dunque capire che:

$$g_{\mu\nu} = (E_{\mu\nu} + 2\varepsilon_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu$$

dove il fattore 2 deriva dal fatto di aver sommato due volte in α e β . Il tensore ε sostanzialmente rappresenta una correzione rispetto al tensore di partenza (quello euclideo) per ricavare la metrica finale. Il tensore di strain deriva da una combinazione delle derivate degli spostamenti: se le derivate degli spostamenti sono non nulle, si ha strain, altrimenti no.

3.3 Introduzione della fisica nella deformazione

Fino a questo momento sono state descritte due situazioni, due stati, ossia la descrizione dello stato del manifold prima della deformazione e dopo di essa. La deformazione deve essere causata da una forza esterna che agisce sul manifold, di conseguenza è necessario definire quest'ultima. Al fine di collegare queste due situazioni è necessario introdurre delle cause per questa deformazione. Essendo il sistema in considerazione un sistema esteso, è necessario associare al manifold l'energia libera (anche detta energia di Helmholtz):

$$F = U - TS$$

dove F è l'energia libera, U è l'energia interna al sistema, e il terzo termine è il prodotto tra temperatura e entropia. In questo modo, si sta utilizzando un approccio termodinamico. Questa energia viene considerata per unità di volume. Essa sarà uno scalare f , dunque un invariante rispetto al sistema di coordinate scelto; esso dipenderà dalla temperatura, e ovviamente della deformazione introdotta (la quale dipende da un lavoro, poiché il sistema tende a resistere alla forza). Quindi,

$$f = f(\varepsilon)$$

dove ε è un tensore: il tensore di strain. Al fine di scrivere l'energia libera del sistema, tuttavia, è necessario esprimere tutte le varie funzioni dello strain mediante degli scalari. Gli scalari che possono essere utilizzati, devono essere ricavati dal tensore di strain; uno, è la traccia (dal momento che il tensore di strain è simmetrico); altro scalare è quello di secondo ordine precedentemente introdotto:

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\alpha}$$

Quello che si può dunque fare è uno “sviluppo della deformazione”, in serie di potenze. Se non c’è alcuna deformazione, si deve avere strain nullo; la funzione di energia libera, quando si ha strain nullo, non deve essere zero, bensì può essere uguale a una certa costante, essendo l’energia libera un potenziale termodinamico. Ciò che stiamo facendo inoltre è studiare una situazione di equilibrio termodinamico, in presenza di strain. Ciò che ci si aspetta sarà una funzione di ε tale per cui esista un minimo; di conseguenza, se si ha a che fare con una funzione che ha un minimo, essa non può avere dipendenza da ε inferiore a ordine 2: una parabola ha un minimo, ma una retta no, di conseguenza si dovrà avere quantomeno una dipendenza di ordine 2. Lo sviluppo in serie di potenze, dunque, non potrà essere lineare. Dunque, il termine successivo al f_0 sarà un termine quadratico ma, come si è detto, di termini funzione di ε di ordine 2 ve ne sono due: la traccia, e l’altro. Dunque, si avrà qualcosa del tipo:

$$f = f_0 + \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \mu\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\alpha}$$

λ e μ sono i coefficienti di caratterizzazione del materiale noti in letteratura come **coefficienti di Lamè**.

3.3.1 Decomposizione del tensore di strain: deformazioni omogenee e distorsioni

Come già accennato, essendo il tensore di strain imparentato con la metrica, esso è simmetrico; in quanto tale, tuttavia, è diagonalizzabile; questo significa che è possibile trovarne autovalori e autovettori, quindi utilizzare questi ultimi come base e ottenere sulla diagonale i soli autovalori, “lavorando sugli assi principali”. A queste condizioni, rileggendo le ultime equazioni viste, è possibile identificare due termini: il primo termine è il quadrato della traccia, il secondo è la somma dei quadrati degli elementi della matrice, ossia dei suoi autovalori; il primo termine implicitamente contiene dei *cross-terms*, dei doppi prodotti, mentre il secondo no. Il secondo termine, in altre parole, fornisce informazioni esclusivamente riguardo alle deformazioni sugli assi principali; in altri termini, solo su ε_{xx} , ε_{yy} , e così via. Il termine ε_{xx} quantifica lo spostamento in direzione x quando la forza agisce lungo l’asse x . Un termine misto, come ε_{xy} , quantifica la variazione lungo x data una forza che agisce su y ; se si considerano gli assi principali, queste seconde deformazioni non ci sono. In altre parole, i due termini si differenziano tra loro per il fatto che

uno quantifica esclusivamente variazioni di volume, ma non di forma, essendovi esclusivamente termini riguardanti gli assi principali; il primo termine, invece, tiene conto di deformazioni che non variano il volume, ma solamente la forma dell'oggetto: **deformazioni**. Si pensi per esempio a una torsione su un cubo: gli spigoli variano, però di fatto a un allungamento in un senso corrisponde un accorciamento in un altro; ciò è legato ai prodotti misti. Per questo motivo, i due termini prima mostrati hanno contenuto informativo complementare.

Al fine di visualizzare meglio la cosa, si consideri uno dei fattori del secondo termine: $\varepsilon_{\alpha\beta}$; a esso, si aggiunga e tolga la traccia, mediante il seguente procedimento:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \frac{\delta_{\alpha\beta}}{N} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{N}\varepsilon = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{N}$$

A questo punto, si prendano il primo e il terzo termine: facendo la traccia, essi si elidono, dal momento che alzando l'indice α , sommando su tutti i valori, si ottiene ε ; nel terzo, alzando α nella delta, si somma N volte l'unità, ma poi si divide per N , ottenendo solamente ε , che si va a sottrarre dunque con il primo termine; rimane dunque solamente il termine centrale.

A questo punto, si fa qualcosa di simile per quanto riguarda l'altro fattore, sempre aggiungendo e togliendo la traccia come fatto prima; in pratica, ciò che si deve fare, è contrarre la seguente espressione:

$$g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\mu\nu}$$

Si scrivono sia il primo sia il secondo fattore ε_{ij} aggiungendo e togliendo la traccia, quindi si hanno alla fine i prodotti tra le due ε , tra il ε e la traccia dell'altro, e tra le due tracce; il risultato finale, separando i pezzi che contengono il quadrato della traccia dagli altri, si ottiene la seguente formula:

$$\left(\lambda + \frac{2}{N}\mu\right)\varepsilon^2 + \mu\left(\varepsilon_{\mu\nu} - \frac{\delta_{\mu\nu}}{N}\varepsilon\right)^2$$

(dove N è il numero di dimensioni). In seguito a questa decomposizione, sono stati ottenuti due termini, dal significato molto preciso: il primo termine ha solamente in sé la traccia, dunque sostanzialmente è legato a sole variazioni di volume; il secondo termine, dualmente, non ha traccia, dunque tiene esclusivamente conto di variazioni di forma, e non di volume. Il primo termine è il **modulo di compressione isoterma**, ossia è quello che tiene

solo conto delle variazioni di volume, mentre il secondo tiene esclusivamente conto delle deformazioni.

3.3.2 Tensore degli sforzi

Le distorsioni sono causate da forze esterne, ossia da soggetti esterni al manifold; il sistema-manifold, quindi, reagisce a esse secondo i coefficienti λ e μ , che determinano per l'appunto il comportamento del sistema.

Si può pensare al manifold come composto di molti volumetti; su uno di essi, per esempio, si ha una certa forza, che tende a deformarlo; il fatto che esso è tuttavia ancorato ad un altro, porta ad avere una reazione alla forza: il secondo volumetto infatti cercherà di tenere “fisso” il primo, di non farlo deformare.

In ogni punto del materiale, vi sono degli **sforzi**, ossia delle forze, rapportate alle superfici su cui esse agiscono. Le forze si propagano nel manifold, verso l'interno di esso, e la reazione del mezzo (terzo principio della dinamica) tende a schermarla. Nel caso $\varepsilon = 0$, si avrà una deformazione tale per cui, appena la causa viene rimossa, si ha una rimozione della conseguenza (questo non è esattamente vero, come spesso capita in Fisica: in realtà la deformazione è plastica!).

È dunque necessario parlare di sforzi, introducendone una espressione compatta. Si consideri la funzione dell'energia libera $f(\varepsilon)$, funzione degli scalari dei tensori di deformazione; al fine di quantificare gli sforzi, ci si chiede quanto sia sensibile f alla variazione di una delle componenti del manifold; in altre parole, questa sensibilità σ si può scrivere come derivata della funzione, rispetto a una delle componenti del tensore di deformazione:

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{\partial f(\varepsilon)}{\partial \varepsilon^{\mu\nu}}$$

Il risultato, ovviamente, dipende da quale elemento si sta considerando: si ha dipendenza dagli indici. Invertendo dunque la precedente espressione, si può ottenere:

$$df = \sigma_{\mu\nu} d\varepsilon^{\mu\nu}$$

Questo oggetto rappresenta il differenziale totale dell'energia libera; l'energia libera è un invariante del sistema, come anche il tensore di strain, che è imparentato con le forze. $\sigma_{\mu\nu}$ dunque sarà senza dubbio un oggetto di natura tensoriale.

In secondo luogo, studiamo dimensionalmente f : essa è un'energia, per unità di volume; di conseguenza, si avrà:

$$f = \frac{ml^2}{t^2l^3} = \frac{m}{t^2l}$$

infatti, un'energia è una forza per uno spostamento; la forza è una massa, per un'accelerazione; l'accelerazione, a sua volta, è una lunghezza, sul quadrato di un tempo; tutto ciò, rapportato a un volume, dunque al cubo di una lunghezza. Quindi:

$$F = \frac{ml}{t^2}$$

Quindi,

$$f = \frac{F}{l^2}$$

Quindi, σ sono forze per unità di superficie: σ_{xx} è la forza che ha componente lungo x e agisce perpendicolarmente al piano yz . Questo coincide con la definizione di sforzo.

A questo punto ci si chiede: quale relazione c'è tra σ e ε ? Uno è una causa, l'altro è l'effetto; è dunque necessario trovare una relazione tra le due quantità.

Dato la funzione d'energia libera $f(\varepsilon)$, nota come sviluppo al secondo ordine, la si differenzi rispetto a una generica $\varepsilon^{\alpha\beta}$; si ricorda che:

$$f(\varepsilon) = f_0 + \frac{\lambda}{2}\varepsilon^2 + \mu\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\alpha}$$

Il primo termine, f_0 , è una costante e dunque la sua derivata è senza dubbio nulla; il secondo termine, invece, contiene la traccia ε ; quindi, facendo alcune manipolazioni, è possibile trovare:

$$\varepsilon = \varepsilon^\mu{}_\mu = \delta^\mu{}_\alpha \varepsilon^\alpha{}_\mu = \delta_{\mu\alpha} \varepsilon^{\alpha\mu}$$

cambiando infine i nomi, cosa permessa per gli indici vari che sono tutti di contrazione, si ha:

$$\delta_{\mu\alpha} \varepsilon^{\alpha\mu} = \delta_{\alpha\beta} \varepsilon^{\beta\alpha}$$

Di conseguenza, si può ottenere:

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon^{\alpha\beta}} = \sigma_{\alpha\beta} = 0 + \frac{\partial \delta_{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta}}{\partial \varepsilon^{\alpha\beta}} + \mu \frac{\partial}{\partial \varepsilon^{\alpha\beta}} [\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon^{\alpha\beta}]$$

Da varie manipolazioni, il risultato finale che si ottiene è:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \varepsilon \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}$$

In più,

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} \varepsilon^{\mu\beta} \varepsilon^{\nu\alpha}$$

essendo tutte le metriche coincidenti con l'identità, è possibile scambiare le posizioni degli indici da covarianti a controvarianti senza porsi particolari problemi; il risultato finale è dunque:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \lambda \varepsilon \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \varepsilon_{\alpha\beta}$$

il 2 deriva dal fatto che si fa la derivata di quadrati. A questo punto, si raccolga dalla parentesi un $\varepsilon_{\nu\mu}$; per fare ciò, è necessario elaborare ancora una volta il primo termine:

$$\varepsilon = \delta_{\mu\alpha} \varepsilon^{\alpha\mu} = \delta^{\mu\nu} \varepsilon_{\nu\mu}$$

al solito, tutti indici di somma; quindi, si può dire che:

$$\sigma_{\mu\nu} = [\lambda \delta_{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta} + 2\mu \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta}] \varepsilon_{\alpha\beta}$$

La parentesi contiene delle δ , e i due coefficienti di Lamè; ε , ossia il tensore, è fuori. Questo ci dice che usando un'espansione del secondo ordine per rappresentare l'energia libera, la relazione tra strain e sforzi è lineare: questa è elasticità lineare. Se si invertisse la matrice, si potrebbe vedere allo stesso modo che le deformazioni (gli strain) sono proporzionali agli sforzi.

La parentesi racchiude un oggetto a quattro indici: esso è un tensore $C_{\mu\nu}^{\alpha\beta}$ tale per cui:

$$\sigma_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}$$

Questa, semplicemente, è la **legge di Hooke**, scritta in coordinate generiche. Questo oggetto in una dimensione rappresenta il tensore del modulo elastico: è un oggetto in grado di descrivere la plasticità. Al variare dei μ e ν considerati, si possono quindi considerare sia sforzi di **volume**, ossia quelli

per cui $\nu = \mu$, sia sforzi di **taglio** (deformazione, cambio anisotropo della forma del manifold), ossia quelli per cui $\nu \neq \mu$.

3.3.3 Considerazioni finali: bilanciamento delle forze

È stato possibile legare cause ed effetti, ossia delle deformazioni, espresse mediante il tensore di strain, a delle forze, espresse in termini di tensore degli sforzi. Considerando un oggetto finito, tuttavia, ciò che di fatto capita è che, partendo dal $\sigma_{\mu\nu}$ applicato sulla frontiera dell'oggetto, si ha un sistema di forze che da dentro lo controbilancia (lo stato di strain implica una azione da parte degli sforzi e una reazione da parte del manifold). Tuttavia, l'ipotesi fatta all'inizio considerava una condizione di **equilibrio**; quando è verificata?

Si consideri il manifold suddiviso in un certo insieme di cubetti infinitesimi; si ha equilibrio delle forze quando la risultante delle forze sulle sei facce del cubetto è zero. Dal momento che il cubetto è infinitesimo, si può scrivere, mediante l'espressione degli incrementi finiti, che:

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx^x$$

Ossia, data un'eccitazione (sotto forma di sforzo) sulla faccia sinistra, xx , si ha sulla faccia xx' questa espressione di strain. Questo, per ogni faccia del cubo.

Facendo dunque le varie somme, il σ_{xx} di una faccia è uguale (e opposto) a quello dell'altra faccia del cubetto: all'azione corrisponde una reazione uguale e opposta! Dunque, ciò che resta, facendo la somma di sforzi uguali e opposti, sono solo le derivate.

Finora si è detto che si deve fare il bilanciamento delle forze, ma si sta ragionando solo sugli sforzi, ossia su forze su elemento di superficie. Si consideri, sempre per la faccia xx , la forza corrispondente allo sforzo σ'_{xx} :

$$F'_{xx} = \sigma'_{xx} dz dy = \sigma_{xx} dz dy + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz$$

dove $dx dy dz$ non è altri che il volumetto infinitesimo. Dunque, dal bilanciamento, la componente (μ, ν) -esima della forza sarà:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \sigma_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} dV$$

dove dV è l'elemento di volume. Per avere equilibrio, la risultante delle forze deve essere nulla; essendo il volumetto di dimensione infinitesima ma non nulla, dunque, la condizione di equilibrio è:

$$\frac{\partial \sigma_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} =$$

Questo deve essere valido sulla superficie del corpo, per ogni punto; è possibile riscrivere o trovare in letteratura l'ultima equazione, nella seguente forma:

$$\nabla \cdot \sigma = 0$$

3.4 Applicazioni ulteriori dei tensori in fisica

3.4.1 Tensore di inerzia

Un esempio di tensore che riguarda la meccanica è l'**inerzia**: data una massa puntiforme, è possibile definire il tensore di inerzia I come:

$$I^{\mu\nu} = m (r^2 \mathcal{I} - \mathbf{r}^\mu \otimes \mathbf{r}^\nu)$$

dove r è la distanza dall'origine del sistema di riferimento, e l'altro termine è \mathcal{P}_r , ossia il proiettore rispetto a r .

Esempio di applicazione

Si consideri a questo punto un esempio di applicazione:

Si voglia calcolare la componente xx del tensore di inerzia, considerando di essere su di un piano e con un sistema di coordinate cartesiano. Applicando il teorema di Pitagora, si ha:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

quindi:

$$I^{xx} = m (x^2 + y^2 + z^2 - x^2) = m (y^2 + z^2)$$

infatti, per come è definito il prodotto tensoriale, esso sostanzialmente significa prendere la componente di interesse, x , e moltiplicare per l'altra componente di interesse, ossia ancora x . Il risultato dipende da $y^2 + z^2$, che è la distanza dall'origine sul piano yz della massa.

Volendo considerare un secondo esempio,

$$I^{xy} = m(-xy)$$

Infatti, la matrice identità è nulla per componenti fuori dalla diagonale, e il prodotto tensoriale si calcola come visto precedentemente.

Scambiando x e y , in questo esempio, il risultato non cambia; dunque, il tensore di inerzia è senza dubbio simmetrico; per questo motivo, ha senso ricercarne autovalori e autovettori, e quindi rappresentarlo secondo gli assi principali; utilizzando la base degli autovettori, dunque, è possibile rappresentare il tensore di inerzia mediante una matrice \mathbf{I} :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I^{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I^{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I^{zz} \end{bmatrix}$$

Quindi, gli unici elementi sono i momenti di inerzia sui tre assi.

3.4.2 Idee dietro il tensore dei fluidi

Al fine di caratterizzare completamente la fluidodinamica in termini tensoriali, sarebbe necessario scrivere le equazioni di Navier-Stokes in forma tensoriale. Ciò che si farà in questa sezione tuttavia sarà molto meno: semplicemente, si scriveranno alcune equazioni di conservazione, in termini tensoriali, che manipolate assieme possono portare alle equazioni di moto dei fluidi: infatti, un fluido, mantiene costanti le proprie proprietà: velocità di flusso, densità, pressione, quantità di moto, energia cinetica, e altro. Dato un flusso incomprimibile, in un punto fissato queste proprietà sono costanti.

Al fine di ragionare, si utilizza un sistema di riferimento **locale**: un sistema in co-movimento rispetto a ciascuna particella di fluido. La formulazione tensoriale delle leggi di formulazione permette di prescindere dalle coordinate: cambiando posizione, se si ha un piccolo volumetto e un piccolo spostamento, si può avere una piccola variazione delle proprietà, ma questo perché esse sono cambiate.

Si considerano a questo punto le diverse leggi di conservazione.

- Conservazione della massa:

$$dm = \rho dV$$

dove ρ è la densità di massa. dV è un elemento di volume: se lo si considera invariante, la variazione di massa totale passando da un punto a un altro può essere unicamente dovuto a una variazione di densità. Si consideri dunque solo una possibile variazione di densità; per quantificare la variazione di massa, dunque, calcolo la derivata rispetto alle componenti del generico sistema di coordinate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^\mu} dx^\mu dV$$

Questo, deve essere zero: in questo modo, si impone la conservazione della massa. Questa è l'espressione di un gradiente: ρ infatti è una funzione scalare.

- Altra grandezza che si conserva, mantenendo sempre fisso il volume, è la quantità di moto p : dato u^μ vettore controvariante, dunque con significato analogo a quello di vettore tangente, imparentato alla velocità, si può scrivere la quantità di moto in forma tensoriale come:

$$p = \rho u^\mu$$

Se questa deve essere conservata, si calcola la derivata:

$$\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \rho u^\mu{}_{;\alpha} dx^\alpha$$

Si ha a che fare con la derivata covariante; infatti, si stanno considerando coordinate intrinseche, collegate alla particella di fluido, e per questo si usa questa espressione. Quindi, si richiede che:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha} + \rho u^\mu{}_{;\alpha}$$

- Conservazione dell'energia cinetica:

$$E_K = \rho u_\mu u^\mu$$

quindi:

$$\frac{\partial E_K}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \rho}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + \rho u_{\mu;\alpha} u^\mu dx^\alpha + \rho u_\mu u^\mu{}_{;\alpha} dx^\alpha$$

ma dal momento che applicare la derivata covariante sopra e sotto è la stessa cosa, si ha:

$$= \frac{\partial \varrho}{\partial x^\alpha} dx^\alpha + 2\varrho u_{\mu;\alpha} u^\mu dx^\alpha$$

- Conservazione del momento angolare: al fine di parlare di momento angolare, sarebbe necessario introdurre i prodotti esterni, così come gli integrali. Si dovrebbe considerare un tensore dato da ϱ per il prodotto tensoriale di \mathbf{u} per sé stesso; questo è come dire di considerare la componente della quantità di moto, e muoversi nella direzione ortogonale.

Capitolo 4

Forme differenziali

4.1 Introduzione

Come si è visto precedentemente, un tensore di rango 2 può essere decomposto in una parte simmetrica e in una antisimmetrica; per quanto riguarda la parte simmetrica, si è già detto molto: è stata proposta la caratterizzazione mediante traccia, autovalori, e così via. Al fine di essere trattati adeguatamente, i tensori antisimmetrici devono essere considerati in maniera differente da quelli simmetrici.

Viene introdotto il linguaggio delle **forme differenziali**. Dato per esempio uno scalare φ , esso, classificato mediante il linguaggio proprio dei tensori antisimmetrici, è una 0-forma. Noto dunque φ , si applichi l'operatore di differenziazione a esso:

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \omega^\alpha$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} \omega^\alpha$ è una 1-forma. A questo punto, si parta da una generica 1-forma, anche non ricavata come differenziale di una 0-forma:

$$\chi_\alpha dx^\alpha$$

A questo punto, si applichi l'operatore di differenziazione a ciò:

$$d[\chi_\alpha dx^\alpha] = \chi_{\alpha,\beta} dx^\beta \times dx^\alpha + \chi_\alpha d(dx^\alpha)$$

Questo, al solito, usando la regola di derivazione del prodotto di due funzioni di Leibnitz. Il primo termine rappresenta semplicemente la derivazione della componente, lasciando invariata la base; il secondo termine, invece, è nullo.

Al fine di comprendere tutto ciò, si sviluppi, dopo aver introdotto l'operatore d : esso non rappresenta semplicemente un differenziale, bensì un **differenziale antisimmetrizzante**: esso produce differenziali tali per cui il risultato sia un tensore antisimmetrico. Si noti che questo linguaggio nasce e sarà in questa trattazione applicato solo su manifold piatti; sono possibili generalizzazioni, ma non verranno introdotte. Si è parlato di antisimmetrizzazione; questo si può capire, definendo:

$$dx^\beta \times dx^\alpha \triangleq \frac{dx^\beta \otimes dx^\alpha - dx^\alpha \otimes dx^\beta}{2}$$

Questo significa che $\chi_{\alpha,\beta}$ deve essere antisimmetrico; sviluppando dunque come spiegato, si ha:

$$d[\chi_\alpha dx^\alpha] = \frac{1}{2}\chi_{\alpha,\beta} dx^\beta \otimes dx^\alpha + \frac{1}{2}\chi_{\beta,\alpha} dx^\beta \otimes dx^\alpha$$

Tuttavia, grazie all'antisimmetria, si ha che:

$$dx^\beta \otimes dx^\alpha = -dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

quindi, si può raccogliere e trovare il primo termine come:

$$\begin{aligned} d[\chi_\alpha dx^\alpha] &= (\chi_{\beta,\alpha} - \chi_{\alpha,\beta}) dx^\alpha \times dx^\beta \\ &= \chi_{[\alpha,\beta]} dx^\alpha \times dx^\beta \end{aligned}$$

dove le parentesi quadre $[]$ indicano la antisimmetrizzazione, come verrà fatto in seguito. Non si è aggiunto il secondo termine, ossia il differenziale della base, dal momento che esso è:

$$dx^\alpha = d[d\varphi] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} dx^\alpha \times dx^\mu = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \right) dx^\alpha dx^\mu$$

dal momento che però le derivate seconde commutano, il contenuto della parentesi tonda è nullo.

Data una forma $\Omega = d\chi$, essa è una **forma chiusa**: $d\Omega$ è sempre nullo.

Ciò che è stato ottenuto differenziando la 1-forma è una **2-forma**: applicare l'operatore di differenziazione alla forma differenziale alza l'ordine della forma. Data una generica 2-forma, dunque, differenziandola, si ottiene una 3-forma, e così via. In tutto ciò, si consideri il seguente **assioma**: il differenziale di una base, è nullo.

Esiste un limite massimo all'ordine delle forme differenziali: in generale, una N -forma è un oggetto con N indici, dove N è la dimensione del manifold:

$$\Psi = \psi_{\alpha\beta\gamma\delta\dots} dx^\alpha \times dx^\beta \times dx^\gamma \times dx^\delta \times \dots$$

L'oggetto è antisimmetrico: considerando commutazioni tra indici adiacenti o distanti di un salto dispari (per esempio α e δ), si ha scambio di segno, con salto pari si ha simmetria. Si applichi il differenziale a Ψ :

$$d\Psi = \Psi_{\alpha\beta\gamma\delta\dots\mu} dx^\mu \times dx^\alpha \times dx^\beta \times dx^\gamma \times dx^\delta \times \dots = 0$$

infatti, ora si hanno $N + 1$ elementi, dove la dimensione è N ; questo significa che ho aggiunto alla base un altro elemento, che non può che essere un elemento già presente, dal momento che la base era già completa, essendo composta da N elementi ed essendo noi in uno spazio a N dimensioni; quindi, la $N+1$ -forma è nulla, dal momento che si introduce di sicuro una dipendenza lineare.

Se dunque per i tensori simmetrici era possibile alzare il rango mediante l'operazione di prodotto tensoriale, ora non è possibile alzare arbitrariamente l'ordine (mediante differenziazione), dal momento che si ha il tetto della dimensione dello spazio considerato.

4.2 Coniugazione di Hodge

Il fatto che le forme differenziali abbiano un limite massimo di ordine rispetto alla dimensione del manifold, permette di introdurre una nuova operazione di coniugazione, come d'altra parte si era precedentemente fatto utilizzando il tensore metrico come operatore di coniugazione; questa coincide con il $(*n)$ che era stato introdotto precedentemente, parlando di rotazioni. Data χ una n -forma, con $n \leq N$, si introduce la **coniugazione di Hodge** come:

$$\psi = *\chi \iff \psi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!} \varepsilon_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \chi_{\mu\nu}$$

dove $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$ è il tensore di Levi-Civita, ossia il tensore completamente antisimmetrico.

Si tenga sempre ben presente il limite dettato dalle dimensioni; nello spazio ordinario, $N = 3$, il tensore di Levi-Civita può in realtà avere solamente 3 indici; per capire meglio, bisogna scrivere la forma generale, di cui la precedente è solo un sottocaso:

$$\psi_{\mu\nu\lambda\dots} = \frac{1}{n!} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\dots}^{\alpha\beta\gamma\dots}$$

dove si hanno m pedici e n apici, sia al membro sinistro, sia a quello destro. In totale,

$$m + n = N$$

Questo significa che coniugando una 0-forma si ottiene una N -forma; coniugando una 1-forma si ottiene una $N - 1$ forma, e così via.

A questo punto, effettuando questa operazione, contraendo è necessario fare le varie somme; queste, però, è necessario tenere conto delle permutazioni; dal momento che si fanno somme su n dummy indices, e che questi permutano, è necessario dividere per $n!$ al fine di tenere conto del fatto che si sommano $n!$ volte le stesse cose.

Si vuole a questo punto discutere il significato geometrico della coniugazione di Hodge: al fine di fare ciò, consideriamo un esempio di 2-forma che era già stato introdotto in precedenza:

$$S_{[\mu\nu]} = dx^\mu \times dx^\nu$$

Questa è l'espressione di una superficie orientata, ossia con segno. Questo significa che si è deciso qual è il verso positivo con cui si percorre il contorno: se si percorre il percorso con per esempio la regola della mano destra (senso antiorario), si attribuisce un'area positiva, altrimenti negativa. L'area elementare sarebbe:

$$dS_{[\mu\nu]} = dx^\mu \times dx^\nu$$

Si noti che usando due volte la stessa forma, $dx^\mu \times dx^\mu$, viene nulla: infatti, questa è l'area, ma solo se i lati sono diversi: il segmento, dx^μ , ha area nulla.

Considerando (x, y, z) come coordinate, dunque, si ricava ora il coniugato di Hodge di questa espressione; considerando la situazione

$$dS_{[yz]} = dy \times dz$$

dove quindi x è un indice fissato,

$$\mathbf{n}_x = \frac{1}{2} \varepsilon_{x\alpha\beta} dx^\alpha \times dx^\beta$$

Il risultato ha un indice solo, ossia è un vettore: facendo le somme dovute alla contrazione, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x &= \frac{1}{2} [\varepsilon_{xyz} dydz - \varepsilon_{xzy} dzdy] = \\ &= \varepsilon_{xyz} dydz = \varepsilon_{xyz} dS^{yz} \end{aligned}$$

Sia α sia β possono solo valere y e z , dal momento che, essendo il tensore di Levi-Civita antisimmetrico, non è possibile far assumere loro altri valori (sarebbero nulli). Le combinazioni sono però coincidenti, quindi dan luogo a un 2. Il risultato è dunque ε_{xyz} , che è 1, e dS^{yz} , che è un elemento di superficie: non più una superficie orientata. Data dunque l'area di partenza, il risultato finale è un vettore di direzione x e con modulo pari all'area della superficie ortogonale al vettore stesso, con segno; il segno è compatibile con l'orientamento scelto sulla superficie di partenza. Questa, del vettore, è la componente x ; essa è l'unica componente esistente, partendo da un elemento di superficie sul piano yz .

Geometricamente, dunque, il risultato è l'area nel significato del corso di Geometria: il modulo del vettore normale è l'area della superficie indicata dai due vettori dei quali si calcola il prodotto esterno. Il vettore è però orientato: può essere sia in un verso, sia in un altro; questo dipende dalla scelta del percorso positivo.

Volendo fare l'operazione duale, quindi partire da una 1-forma vettoriale, facendone la coniugazione di Hodge si avrebbe a che fare con un indice di somma e due indici fissi, quindi si finirebbe per tornare alla situazione di partenza: la superficie orientata.

Facendo questa operazione con una 0-forma o una 3-forma, cosa capita? Vediamolo sulla 3-forma: la base della 3-forma è:

$$\frac{1}{3!} \varepsilon_{xyz} dx \times dy \times dz$$

qua non si ha alcun indice libero; questo è semplicemente, in linguaggio geometrico, un volume orientato. La 0-forma coniugata a questa 3-forma, sarà uno scalare: il volume elementare.

Abbiamo applicato la coniugazione di Hodge in ambito geometrico, ma ovviamente è possibile applicarla in qualsiasi ambito: data una 2-forma, tuttavia il vettore coniugato sarà sempre perpendicolare a quello ottenuto; facendo il prodotto scalare, tra il vettore di partenza e il coniugato, dunque facendo la contrazione tra gli indici del vettore coniugato e l'indice libero di quello di partenza, facendo per esempio

$$\mathbf{n} \cdot S = g^{\mu\nu} n_\mu S_{\nu\alpha}$$

il risultato deve essere zero: geometricamente, un vettore e il suo coniugato in senso differenziale sono ortogonali.

4.3 Teoremi sugli integrali

Si supponga di avere, per esempio, una funzione $f(x)$ che si vuole integrare lungo x ; la notazione utilizzata usualmente è:

$$\int f(x) dx$$

Questa operazione contiene i differenziali delle coordinate, che sono gli elementi delle basi delle rappresentazioni tensoriali finora usati. I risultati degli integrali dipendono da come si calcolano: seguendo un percorso in un verso, o in un altro. Per questo motivo, viene spontaneo fare il collegamento con quanto detto finora sulle forme differenziali: **gli integrali sono integrali di forme differenziali.**

Verrà d'ora in avanti una notazione di questo tipo: data σ una forma differenziale, l'integrale verrà scritto:

$$\int \sigma$$

Parlare di integrali, significa fare, in pratica:

$$\int \sigma = \int \sigma_\alpha dx^\alpha$$

infatti, il dx è nascosto all'interno della forma differenziale, essendo la base.

Gli integrali considerati sono su un dominio ben definito: l'integrale di una 1-forma sarà un integrale di linea, poiché è su una linea; quello di una 2-forma, è su una superficie.

Adesso si consideri l'integrale di una forma chiusa; questo significa che esso si può scrivere come l'integrale del differenziale di una forma, come per esempio della forma precedente: si è ricavata la forma chiusa in questo modo. Il risultato è:

$$\int d\sigma = \int \sigma_{[\alpha,\beta]} dx^\beta \times dx^\alpha$$

A questo punto, si parta da questo termine: si applichi la formula di integrazione per parti; si ha:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_{\text{estremi}} - \int f'(x)g(x)dx$$

quindi, si ha:

$$\int \sigma_{[\alpha,\beta]} dx^\beta \times dx^\alpha = \int_{\partial} \sigma_\alpha dx^\alpha - \int \sigma_\alpha d [dx^\beta \times dx^\alpha]$$

dove il secondo termine si annulla, ottenendo:

$$= \int_{\partial} \sigma_\alpha dx^\alpha$$

dove ∂ è il contorno sul quale si calcolano gli integrali.

Questo esempio vale su due dimensioni, ma i mezzi utilizzati hanno valenza molto più generale: in generale, a prescindere dal rango, l'integrale di una forma chiusa risulta essere uguale all'integrale della "radice della forma", su un contorno. Questo è il teorema di Gauss, insieme al teorema di Stokes, in forma estremamente compatta.

Più in dettaglio, quello appena analizzato è il teorema di Stokes: l'integrale di linea è stato posto uguale a un integrale di flusso, facendo però le derivate della grandezza, antisimmettizzando. Infatti,

$$\sigma_{[\alpha,\beta]} = \sigma_{\alpha,\beta} - \sigma_{\beta,\alpha}$$

questa non è altri che una componente del rotore di un vettore. Dato quindi un vettore:

$$\sigma = \sigma_\alpha dx^\alpha$$

facendo $d\sigma$, si ottiene una forma differenziale del tipo:

$$d\sigma = (\sigma_{\alpha,\beta} - \sigma_{\beta,\alpha}) dx^\alpha \times dx^\beta$$

Questo è una 2-forma. Quello che usualmente viene trattato in Analisi Matematica come “rotore”, altri non è che il coniugato di Hodge di questo ultimo oggetto:

$$\nabla \times \sigma = (*d\sigma)$$

infatti, questo è un vettore, mentre quello che abbiamo usato qua è una 2-forma: la sua coniugata!

Si suol dire che il rotore non sia un vettore, bensì un pseudovettore, o **vettore assiale** (anziché polare): un vettore polare, cambiando gli assi, non cambia di segno; in un vettore assiale, cambiando gli assi, si cambia segno. Questo risulta essere evidente dal formalismo delle forme differenziali: la 2-forma differenziale è sensibile alla scelta degli assi, dal momento che se si cambia segno, si ha un’inversione di segno.

4.3.1 Considerazioni aggiuntive

Dato un vettore ortogonale alla superficie, l’integrale sulla superficie è un flusso; l’integrale:

$$d\sigma$$

è l’integrale di flusso, dunque della superficie, della 2-forma differenziale di partenza, ottenuta come differenziazione di una 1-forma: la forma chiusa di cui si parlava prima. Mediante l’integrazione per parti, si è arrivati a validare la seguente espressione:

$$d\sigma = \int_{\partial} \sigma$$

ossia, l’integrale di flusso (superficiale) di una 2-forma differenziale è uguale all’integrale di linea del coniugato di Hodge.

Questa notazione è assolutamente generale: è sempre vero, per qualsiasi forma differenziale si consideri, che l’integrale di una $d\sigma$ sia l’integrale sul contorno di una σ .

Si consideri un caso con ordine 3, invece che 2: se σ è una 2-forma, la sua $d\sigma$ è una 3-forma; data dunque:

$$d\sigma = \int_{\partial} \sigma$$

a sinistra si ha un integrale di volume. Il coniugato di Hodge di ciò che rappresenta il volume mediante la 3-forma è il volume infinitesimo, con un segno che riguarda l'ordine degli assi; passando al coniugato, dunque, lo scalare ha un significato di densità. Al membro destro si ha l'integrale di una 2-forma, su di una superficie. A destra dunque si ha un integrale di flusso su di una superficie chiusa (invece che un integrale di linea). Il coniugato di Hodge di σ è una 1-forma, dunque un vettore, e quindi passando al coniugato si ottiene ancora l'integrale di superficie, ma di un vettore.

Riassumendo, da capo:

1. Si consideri $N = 3$, dunque lo spazio ordinario, 3 dimensioni; si consideri σ una 2-forma, dunque $d\sigma$ una 3-forma, chiusa.
2. Si consideri l'integrale della 3-forma chiusa, e la relazione ricavata dall'applicazione dell'integrazione per parti:

$$\int d\sigma = \int_{\partial} \sigma$$

si ha a sinistra l'integrale di volume di una 3-forma, a destra l'integrale di superficie di una 2-forma.

3. Considerando i coniugati di Hodge dalle due parti, gli operatori di integrazione rimangono costanti sullo stesso dominio, ma gli integrandi cambiano: a sinistra, il coniugato della 3-forma è una 0-forma, ossia uno scalare; a destra il coniugato della 2-forma è una 1-forma, ossia un vettore.
4. Il risultato è dunque il teorema della divergenza (o di Ostrogradskij): l'integrale di volume di uno scalare (una densità, ossia la divergenza di una funzione) eguaglia l'integrale di superficie di un vettore.

Si consideri questa cosa in pratica: dato il solito sistema di riferimento cartesiano su manifold piatto, fissiamo:

$$\sigma = \sigma_{[x,y]} dx \times dy$$

essendo x e y fisse, l'unica coordinata rispetto a cui si può avere derivazione, è z ; la relazione dunque sarà:

$$\int \sigma_{[xy,z]} dz \times dx \times dy = \int_{\partial} \sigma_{[xy]} dx \times dy$$

Ora, si applichi la coniugazione di Hodge ai due membri: a sinistra, il vettore sarà ortogonale al piano (x, y) , e quindi sarà un vettore parallelo a z , derivato per z : la **divergenza** del vettore. Dato ψ questo vettore, ossia $\psi \triangleq * \sigma$, si ha:

$$\int \sigma_{[xy,z]} dz \times dx \times dy \implies \int \psi_{,z} dV = \int \nabla \cdot \psi dV$$

A secondo membro, si ha sempre l'integrale di superficie, di questo ψ , vettore diretto lungo z ; dunque, abbiamo appena ricavato il teorema della divergenza in coordinate cartesiane:

$$\int \nabla \cdot \psi dV = \int_{\partial} \psi dS$$

4.4 Curvatura e forme differenziali

Precedentemente, al fine di caratterizzare il manifold, erano stati utilizzati tensori simmetrici. Si prova ora a fare qualcosa di analogo, utilizzando però i tensori antisimmetrici.

Si consideri la distanza $(ds)^2$: è possibile trattare ds come una 1-forma, in cui si hanno N componenti, dove ciascuna è il differenziale delle coordinate; questo significa che:

$$ds(dx^1, dx^2, \dots, dx^N) = (ds)^2 = ds \cdot ds$$

ossia, si costruisce la distanza ancora una volta mediante l'uso del prodotto scalare. Le varie dx^1 , dx^2 e così via sono i vettori di base, che possono essere scritti quindi anche con la notazione più generale: ω^1 , ω^2 , e così via. Quindi, è possibile scrivere il prodotto scalare come:

$$ds \cdot ds = g_{\mu\nu} \omega^\mu \otimes \omega^\nu = (ds)^2$$

Il prodotto scalare costituisce l'insieme a 2 a 2 dei prodotti delle basi; se prima però era stato interpretato mediante i tensori simmetrici, ora esso

viene pensato come il quadrato di una forma differenziale. A questo punto, quindi, data l'ultima equazione, si applichi l'operatore di differenziale esterno sia al membro sinistro, sia al membro destro dell'equazione:

$$d[(ds)^2] = 2ds(d^2s) = 0$$

infatti, ogni volta che si deriva due volte qualcosa, si ottiene zero, come visto precedentemente. Per quanto riguarda l'altro membro, si ottiene invece:

$$d[g_{\mu\nu}\omega^\mu \otimes \omega^\nu] = 0 + g_{\mu\nu}d\omega^\mu \otimes \omega^\nu + g_{\mu\nu}\omega^\mu \otimes d\omega^\nu$$

infatti, il tensore metrico è costante, essendo noi su un manifold piatto, dunque la sua derivata sarà senza dubbio nulla; poi, si hanno le derivate dei vettori di base. Come visto precedentemente, introducendo la derivata covariante, però, la derivata di un vettore di base si può vedere come un altro vettore, dunque rappresentato ancora una volta nella stessa base del vettore di cui si faceva la derivazione; questo concetto si può applicare anche alle forme differenziali, espandendo dunque in questo modo:

$$g_{\mu\nu}d\omega^\mu \otimes \omega^\nu = g_{\mu\nu}\omega^\mu{}_{,\alpha} \times \omega^\alpha \otimes \omega^\nu$$

$$g_{\mu\nu}\omega^\mu \otimes d\omega^\nu = g_{\mu\nu}\omega^\mu \otimes \omega^\nu{}_{,\beta} \times \omega^\beta$$

Il fatto di aver introdotto i prodotti esterni ha reso queste espressioni forme differenziali: infatti, ora si ha una antisimmetrizzazione. Nella prima espressione, ω^α è la base, mentre $\omega^\mu{}_{,\alpha}$ è una componente; tuttavia, essa, è anche una 1-forma !

I termini $\omega^\mu{}_{,\alpha}$ e $\omega^\nu{}_{,\beta}$ hanno sostanzialmente un significato analogo alle **connessioni**: essi dicono cosa capita quando si applica un operatore di differenziazione a un vettore di base; aldilà dunque dell'introduzione dell'antisimmetrizzazione, non si ha nulla di nuovo rispetto a prima. Il legame con le connessioni è così forte che si può scrivere la seguente espressione:

$$\omega^\mu{}_{,\alpha} = \Gamma^\mu{}_{\varepsilon\alpha}\omega^\varepsilon$$

dove ω^ε è al solito dx^ε . I coefficienti, ossia le connessioni, hanno tre indici: un indice deriva dalla forma su cui si lavorava, ossia il μ ; un indice contiene informazioni sull'antisimmetrizzazione; un indice è quello per la rappresentazione nella base ω^ε . Fatta questa precisazione, il risultato della somma dei

due termini, come visto precedentemente, deve valere zero: questo perché il differenziale della distanza deve per forza valere zero. Si ha:

$$g_{\mu\nu}\omega^\mu_\alpha = \omega_{\nu\alpha} \times \omega^\alpha + \omega^\mu \otimes \omega_{\nu\beta} \otimes \omega^\beta$$

Dal momento che gli indici sono dummy, ossia di somma, è possibile cambiare i nomi, e raccogliere nel seguente modo:

$$(\omega_{\nu\alpha} + \omega_{\alpha\nu}) \times \omega^\nu \otimes \omega^\alpha = 0$$

Al fine di soddisfare questa equazione, dunque, le espressioni che raffigurano le connessioni (sono state scritte con entrambi gli indici covarianti, perché comunque, essendo in un manifold euclideo, la metrica è l'identità e quindi mettere gli indici in alto o in basso è indifferente) sono:

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$$

questo introduce un'antisimmetria: le connessioni, come forme, devono essere antisimmetriche negli indici della forma. Questo si ripercuote sulle connessioni vere e proprie: considerando anche esse con gli indici abbassati, si è appena scoperta una nuova proprietà delle connessioni:

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha} = -\Gamma_{\nu\mu\alpha}$$

Considerando la forma controvariante, la conversione è antisimmetrica per scambio dell'indice alto, con uno dei due dell'altra coppia.

4.4.1 Applicazione di forme differenziali a vettori

A questo punto, si vuole fare un passo successivo: applicare una forma differenziale a un oggetto vettoriale. Dato un vettore tangente, nella seguente forma:

$$\mathbf{v} = v^\mu \mathbf{e}_\mu$$

Si vuole calcolare $d(\mathbf{v})$. Il risultato è:

$$d\mathbf{v} = d(v^\mu \mathbf{e}_\mu) = (d\mathbf{e}_\mu) v^\mu + dv^\mu \mathbf{e}_\mu$$

Per quanto riguarda il secondo termine, al solito si ha una forma differenziale. Per quanto riguarda il primo termine, analogamente a prima, si avrà una

forma applicata a dei vettori di base; come precedentemente fatto, ciò che si può fare è scrivere questo oggetto in termini degli stessi vettori di base, usando le connessioni:

$$= dv^\mu \mathbf{e}_\mu + \mathbf{e}_\alpha \omega^\alpha_\mu v^\mu$$

a questo punto, dopo un certo numero di manipolazioni algebriche, si arriva a scrivere:

$$d\omega^\mu = -\omega^\nu_\alpha \times \omega^\alpha$$

Questo è il differenziale della base; il segno “-”, si può dimostrare, deriva dalla precedente espressione, tenendo però conto che in questo caso non si ha un’eguaglianza a zero.

In generale, in questo caso, $d^2\mathbf{v}$ non è zero: esso infatti non è una forma! Dunque, ci si chiede cosa si possa trovare, applicando l’operatore di differenziazione esterna:

$$d^2\mathbf{v} = d\mathbf{e}_\alpha \omega^\alpha_\mu v^\mu + \mathbf{e}_\alpha d\omega^\alpha_\mu v^\mu + \mathbf{e}_\alpha \omega^\alpha_\mu dv^\mu + d\mathbf{e}_\mu \times dv^\mu + \mathbf{e}_\mu d^2v^\mu$$

l’ultimo termine è zero, dal momento che si ha il differenziale calcolato due volte; il penultimo termine invece è dato dalla somma di 2-forme, e si è usato il prodotto esterno dal momento che si ha l’accostamento di due 1-forme, ma bisogna antisimmetrizzare.

D’altra parte, però, si ha che:

$$d\mathbf{e}_\alpha = \omega^\varepsilon_\alpha \times \mathbf{e}_\varepsilon$$

Tenendo conto di queste espressioni, svolgendo i conti che ora non sono riportati, i termini che contengono le dv^μ sono uguali tra loro e di segno opposto, dunque si sottraggono. Tenendo conto di ciò e riorganizzando tutto, quindi, si ottiene:

$$d^2\mathbf{v} = R^\mu_\nu v^\nu \mathbf{e}_\mu$$

Questa è una 2-forma, in cui ciascun valore è un vettore: gli elementi della forma sono vettori, e per questo motivo essa non vale 0. R^μ_ν è una 2-forma, e quindi ha nascosti in sé gli indici di forma; esplicitamente, dunque, essa può essere scritta come:

$$R^\mu{}_\nu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}\omega^\alpha \times \omega^\beta$$

Questa scrittura è collegata al tensore di Riemann!

A questo punto, svolgendo ulteriori calcoli che non vengono qui riportati, è possibile dimostrare che:

$$\begin{cases} R^\mu{}_\nu = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\varepsilon \times \omega^\varepsilon{}_\nu \\ d\omega^\mu = -\omega^\mu{}_\alpha \times \omega^\alpha \end{cases}$$

Questo sistema contiene le cosiddette **formule di struttura di Cartan**. Questa è una formulazione atta a fornire una strada più veloce per trovare la curvatura o gli elementi della connessione per un manifold.

4.5 Esempio di applicazione: elettrostatica

A questo punto si vogliono usare le forme differenziali al fine di capire quali campi fisici si possono ottenere, semplicemente studiando le proprietà geometriche delle forme. Si consideri dunque un manifold piatto, con $N = 3$ dimensioni, in cui le proprietà fisiche di interesse sono descritte mediante un campo scalare ϕ , funzione delle varie posizioni P considerate sul manifold: $\phi = \phi(P)$.

Il primo passo è l'applicazione della derivata esterna a questo campo ϕ :

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^i} dx^i = \phi_{,i} \omega^i$$

Vengono utilizzati indici latini dal momento che si considera un manifold con significato spaziale in n dimensioni. Come si può vedere, il risultato di questa operazione è stato il gradiente del campo ϕ di partenza. Come noto da ciò che è stato precedentemente fatto sulle forme, riapplicare l'operatore di differenziazione esterna alla forma $d\phi$ appena ottenuta darebbe 0: $d\phi$ è una forma chiusa.

Dato il gradiente $\mathbf{a} = \nabla\phi$, esso si può scrivere come:

$$\mathbf{a} = a^j e_j \times a^j \partial_j$$

Applicare il differenziale esterno a \mathbf{a} ciò che si ottiene è il rotore di \mathbf{a} ; infatti:

$$da^j = a^j{}_{,k} - a^k{}_{,j}$$

questa è la componente i -esima del rotore di \mathbf{a} , dati indici (i, j, k) (latini, come detto).

Il gradiente è dunque una forma chiusa. Ciò che si può fare, tuttavia, è applicare la coniugazione di Hodge a $\mathbf{a} = \nabla\phi$, ottenendo:

$$\nabla\phi \longrightarrow (*\nabla\phi) = F$$

Dove F identifica la forma coniugata di Hodge del gradiente; proviamo a calcolarne la componente (12):

$$F_{12} = \varepsilon_{12}^i \nabla_i \phi$$

questa è non nulla solo se $i = 3$; quindi:

$$F_{12} = \varepsilon_{12}^3 \frac{\partial\phi}{\partial x^3}$$

dove poi $\varepsilon_{12}^3 = 1$. Usando le stesse idee, si ha:

$$F_{13} = -\frac{\partial\phi}{\partial x^2} \quad E_{23} = \frac{\partial\phi}{\partial x^1}$$

Si noti che la componente (13) ha segno scambiato; questo avviene dal momento che si ha una permutazione non ciclica: non è come 12 o 23 che sono numeri consecutivi: si è “saltato un numero”.

Queste sono le componenti del coniugato di Hodge del gradiente; ciascuna di esse, però, è anche una delle componenti del campo elettrico che, ricordando l'elettrostatica, si ricava infatti come gradiente di un campo elettrico. Quindi:

$$E_3 = F_{12} \quad E_2 = -F_{13} \quad E_1 = F_{23}$$

A questo punto, si applichi l'operatore di differenziazione esterna alla 2-forma:

$$dF = F_{ij,k} d\omega^k \times d\omega^i d\omega^j$$

A questo punto, usando il sistema coordinato, ordinando, si ha:

$$= (F_{23,1} - F_{13,2} + F_{21,3}) n$$

n è un fattore moltiplicativo che tiene conto del fatto che si hanno più volte gli stessi numeri: tiene conto delle permutazioni. Se la coniugazione di Hodge viene fatta dividendo per $n!$, questo fattore di numero si può ignorare

Si ha, dunque:

$$= (n) \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right)$$

Ciò che è stato fatto ora è, partendo da una funzione scalare, associarle il suo gradiente; a questo, quindi, è stata associata una 2-forma, antisimmetrica, i cui elementi sono semplicemente i campi di quello di partenza. A questo quindi viene applicato l'operatore di differenziazione esterna d , trovando una 3-forma. L'ultima equazione scritta, può essere riconosciuta come:

$$\left(\frac{\partial E_1}{\partial x^1} + \frac{\partial E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial E_3}{\partial x^3} \right) = \nabla \cdot \mathbb{E}$$

Invece, la 3-forma scritta per intero è:

$$(\nabla \cdot \mathbb{E}) dx \times dy \times dz$$

Dove il secondo termine rappresenta il volume orientato dello spazio che sto considerando. Definita dunque $\varrho \triangleq \nabla \cdot \mathbb{E}$, si ha che $\varrho dx \times dy \times dz$ è un tensore di rango 3. Facendo il coniugato di Hodge di questo, si ha dunque ϱdV , che non è altri che ϱ , moltiplicato per il volume elementare. Integrando, dunque, si ha:

$$\Sigma \triangleq (\nabla \cdot \mathbb{E}) dx \times dy \times dz$$

Dunque: Σ è una 3-forma in \mathbf{R}^3 , quindi posso applicare il teorema dell'integrazione, ottenendo:

$$\int \Sigma = \int_{\gamma} F = Q$$

dove Q è la carica complessiva. Questo, in forma compattissima, è semplicemente il teorema di Gauss.

Il teorema integrale si può usare ancora una volta, in un altro modo:

$$\int F = \int_{\partial} E = 0$$

Infatti, il rotore del gradiente equivale 0, quindi per questo motivo vale l'ultima relazione.

Capitolo 5

Elettromagnetismo

5.1 Introduzione

Al fine di formulare l'elettromagnetismo, e dunque non solamente l'elettrostatica, bensì una formulazione dinamica che descrive il campo elettrico e il campo magnetico, non è possibile avere a che fare con un manifold di dimensione 3: è necessario per forza utilizzare un manifold con $N = 4$. Il manifold in questione, sarà considerato piatto.

La metrica dello spazio piatto con 4 dimensioni, le cui coordinate sono x, y, z, ct , può essere diagonalizzata, ottenendo ct ortogonale alle altre dimensioni. L'ortogonalizzazione, in questo ambito, implica che i prodotti scalari a 2 a 2 siano nulli.

Il tensore metrico dunque si può scrivere come:

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

dove

$$x^0 = ct \quad x^1 = x \quad x^2 = y \quad x^3 = z$$

Questa è la metrica di base, con **segnatura di Lorentz**: è necessario che un segno (quello relativo al tempo) sia diverso dagli altri tre. Si scrive ct in maniera da avere una velocità per un tempo, che dimensionalmente è ancora una volta lo spazio, come negli altri casi.

Questo 4-manifold è detto **spazio-tempo**; nel dettaglio, quello piatto (come quello che si sta considerando), è detto **spazio di Minkowski**. Per questo spazio, l'elemento di linea è (dove in questo caso la $(ds)^2$ non indica una distanza in senso spaziale, ma l'intervallo compreso tra due **eventi**, dove ciascun evento è una posizione dello spazio-tempo):

$$(ds)^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

La distanza, in ambito relativistico, non ha per forza segno positivo. Gli intervalli infatti possono avere un (ds^2) che può essere positivo, negativo, o nullo:

- si parla di “intervalli tipo tempo” se le cose viaggiano più lentamente della luce, come accade nella maggior parte dei casi;
- si parla di “intervalli tipo spazio” se si hanno oggetti che viaggiano più velocemente della luce (cosa non prevista in fisica). In questo caso non si potrebbe comunicare, dal momento che la luce sarebbe più lenta della velocità tra i due oggetti considerati (tutto ciò è solo sulla carta).

Una nota finale: data la segnatura di Lorentz, e la metrica η relativa, si ha che ogni volta che si alza o abbassa un indice, di fatto non è necessario prestare particolare attenzione, essendo lo spazio piatto, se non al segno: alzare o abbassare indici temporali non provoca cambi di segni, mentre toccare un indice temporale provoca un cambio di segno.

5.2 Dal quadrivettore al tensore di Faraday

Precedentemente, per ricavare il campo elettrostatico, si era usato uno scalare come punto di partenza su cui lavorare. Dal momento che tuttavia noi non vogliamo limitarci ai casi statici, partiremo da qualcosa di diverso da un potenziale scalare: da un **quadrivettore**. Il punto di partenza della trattazione sarà dunque **a**, quadrivettore, che, nonostante la scelta della lettera *a*, **non** è il potenziale vettore inteso in senso classico. Scriviamo dunque questo vettore in forma covariante: questo si fa dal momento che le versioni covarianti dei vettori sono le più vicine al linguaggio delle forme differenziali; in altre parole, i covarianti sono delle forme. Si può avere:

$$\mathbf{a} = a_\mu dx^\mu$$

Di questo, dunque, si può costruire il differenziale esterno:

$$d\mathbf{a} = a_{\mu,\nu} dx^\nu \times dx^\mu \triangleq F$$

Abbiamo così definito la forma F come differenziale esterno del quadrivettore. A questo punto, si scrivano esplicitamente le componenti di questo:

$$(0, 1) \longleftrightarrow (ct, x)$$

Da cui:

$$\begin{aligned} F_{0x} &= a_{0,x} dx^0 \times dx - a_{x,0} dx \times dx^0 = \\ &= (a_{x,0} - a_{0,x}) dx^0 \times dx = \\ &= c (a_{x,0} - a_{0,x}) dt \times dx \end{aligned}$$

Sono state utilizzate derivate ordinarie, dal momento che il manifold in questione è piatto; nel caso in cui il manifold fosse curvo, sarebbe semplicemente necessario usare le derivate covarianti invece di quelle ordinarie.

Si propongono ora alcune considerazioni: a cosa assomiglia questa componente? Proviamo a riscriverla:

$$F_{0x} = c \left(\frac{\partial a_x}{c \partial t} - \frac{\partial a_0}{\partial x} \right) = \frac{\partial a_x}{\partial t} - c \frac{\partial a_0}{\partial x}$$

Come noto, in elettrostatica, il campo elettrico è dato da $-\nabla\phi$; nel caso non statico, invece, si ha qualcosa in più: si ha dipendenza anche dal potenziale vettore. Si può dire che:

$$a_0 = \frac{\phi}{c} \quad a_x = A_x$$

dove per A_x si intende la componente lungo l'asse x del potenziale vettore dell'elettromagnetismo classico. Quindi:

$$F_{0x} = E_x = -(\nabla\phi)_x + \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

Si noti che x non è un indice tensoriale: essa è la componente di un tensore di rango 2; in realtà, dunque, x andrebbe considerato come un indice doppio. E_x dunque non è un vettore/tensore di rango 1, e quindi non è possibile trasformare su un solo indice: è necessario trasformare 2 volte, quindi lungo

2 indici, ciascuna componente; l'altro indice, meno implicito (ai tempi di Maxwell), coinvolge un **tempo**: non è possibile trasformare le coordinate senza tenere conto di trasformazioni sia negli indici spaziali, sia negli indici temporali. Per le componenti in y e z si possono poi dire le stesse cose: anche esse, sono le componenti del campo elettrico.

Dato un tensore $F_{\mu\nu}$, è possibile riempirne la prima riga con queste tre componenti, come si scriverà esplicitamente in seguito. Prima di fare ciò, tuttavia, è importante considerare l'altro caso: il calcolo di componenti con 2 indici spaziali. Si consideri il seguente caso di esempio:

$$F_{xy} = \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

Questa componente è legata ancora una volta al potenziale vettore, nel seguente modo:

$$= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = (\nabla \times \mathbf{A})_z$$

Ossia, essa è semplicemente la componente lungo l'asse z del rotore del potenziale vettore classico, in tre dimensioni. Questa non è altri che B_z : la componente z del campo magnetico. Allo stesso modo è possibile trovare le altre componenti:

$$F_{xz} = -(\nabla \times \mathbf{A})_y = -B_y$$

il segno “-” nasce dal fatto che x e z non sono contigui, dunque si ha una permutazione e un cambio di segno. La componente lungo x è del tutto analoga a quella lungo z .

A questo punto è possibile esplicitare l'intero tensore $F_{\mu\nu}$, noto come **tensore di Faraday**:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

Si noti che le componenti del tensore, dimensionalmente, sono coerenti tra loro: i campi elettrici sono infatti dimensionalmente uguali ai campi magnetici, a meno di un fattore di velocità.

Questo è l'oggetto base per la descrizione del campo elettromagnetico; questo oggetto non presenta le ambiguità della fisica classica; dal momento che infatti quando si utilizza un approccio basato su dei potenziali, e dunque sulle loro derivate, i potenziali sono noti a meno di una costante, si ha un'indeterminazione nel punto di partenza.

A questo punto, ci si pone un'ulteriore domanda: le componenti del campo elettrico e quelle del campo magnetico, sono tra loro legate in qualche modo? Per chi conosce le equazioni di Maxwell la risposta è nota, ma è possibile ricavare ciò a partire dal formalismo tensoriale?

Al fine di rispondere a questo quesito, si ricorda che F è definito come differenziale esterno del quadrivettore \mathbf{a} ; quindi:

$$F = d\mathbf{a}$$

F è una forma chiusa, dal momento che il suo differenziale esterno è nullo; nessuno tuttavia vieta di esplicitare il calcolo del differenziale di F , pur sapendone già il risultato:

$$\begin{aligned} dF &= F_{xy,0} - F_{yx,0} - F_{0y,x} + F_{0x,y} + F_{y0,x} - F_{x0,y} = \\ &= 2F_{xy,0} - 2F_{0y,x} + 2F_{0x,y} = 0 \end{aligned}$$

Dove ciascuna è una componente del tensore di Faraday, derivata; andando dunque a recuperare le espressioni delle componenti del tensore di Faraday, ciò che è stato appena ottenuto è:

$$\frac{\partial B_z}{c\partial t} + \left(\frac{\partial E_x}{c\partial y} - \frac{\partial E_y}{c\partial x} \right) = 0$$

questa si può riscrivere in forma più nota come:

$$(\nabla \times \mathbf{E})_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Ricavando le altre componenti, si ottiene:

$$(\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Ossia, la legge di Faraday-Neumann-Lenz. Questa, è derivata semplicemente da un'identità geometrica, ossia dall'applicazione 2 volte del differenziale esterno al quadrivettore; tuttavia, essa è anche una delle ben note equazioni di Maxwell!

A partire dallo stesso ragionamento, considerando però componenti con soli indici spaziali, si ha:

$$(\mathrm{d}F)_{xyz} = F_{xy,z} \mathrm{d}z$$

dunque:

$$\mathrm{d}F = F_{ijk} \mathrm{d}x^k \times \mathrm{d}x^i \times \mathrm{d}x^j$$

Questo va sommato sui vari valori di i, j, k ; quindi, si ha:

$$= F_{xy,z} \mathrm{d}z \times \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z = F_{xy,z} \mathrm{d}x \times \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$$

Quindi, facendo le varie derivate del tensore di Faraday, in maniera analoga a prima si può trovare:

$$2 \left(\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial x} \right) = 0$$

Questo termine è ancora una volta uguale a zero, dal momento che al solito si ricava dal differenziale del differenziale. Raggruppando, questa diventa dunque:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

ossia, un'altra equazione di Maxwell, che dice che la divergenza del campo magnetico è nulla.

5.3 Tensore di Maxwell

Dalle identità geometriche applicate sul tensore di Faraday, è stato possibile ricavare due delle quattro equazioni di Maxwell. Come è possibile ricavare le altre due equazioni? L'idea è abbastanza semplice: a partire dal tensore di Faraday, è possibile ricavare un altro tensore, applicando la coniugazione di Hodge.

Si definisce dunque un tensore M come:

$$M = (*F)$$

da cui, applicando formalmente la coniugazione di Hodge, si ottiene:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{2!} \varepsilon_{\alpha\beta}^{\nu\mu} F_{\mu\nu}$$

Sono stati alzati due indici nel tensore di Levi-Civita, ma in questo caso bisogna stare attenti, perché questa procedura potrebbe non essere indolore: dal momento che l'operazione di alzare e abbassare i segni dipende dalla metrica, essendo il tensore metrico relativistico definito con la segnatura di Maxwell. A prescindere dalle varie permutazioni, che cambierebbero il segno, infatti, come già accennato, alzare o abbassare un singolo indice spaziale provoca un cambio di segno. Quindi:

$$M_{0x} = \frac{1}{2!} \varepsilon_{0x}^{yz} 2F_{yz}$$

da cui:

$$M_{0x} = F_{yz} = B_x$$

Per gli stessi ragionamenti, dunque, si arrivano a trovare B_y e B_z .

Se invece si considerano coppie date da soli indici spaziali, si ha qualcosa come:

$$M_{xy} = \frac{1}{2!} \varepsilon_{xy}^{0z} 2(-F_{0z}) = -F_{0z} = F_{z0} = -\frac{E_z}{c}$$

Allo stesso modo, andando avanti, si può ricavare:

$$M_{xz} = \frac{E_y}{c} \quad M_{yz} = -\frac{E_x}{c}$$

A questo punto, dunque, è possibile scrivere l'intera espressione del tensore di Maxwell:

$$M_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{bmatrix}$$

Dal momento che questo è ricavato come coniugato di Hodge, anche se di una forma chiusa, dM non è nullo! Si definisce dunque la forma:

$$dM = \mathcal{Y}$$

Quindi, se ne calcolano le componenti:

$$\mathcal{Y}_{0xy} = M_{\alpha\beta,\gamma} dx^\gamma \times dx^\alpha \times dx^\beta$$

Dunque:

$$\mathcal{Y}_{0xy} = [M_{xy,0}] = -\frac{\partial E_z}{cc\partial t} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{cc\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial B_x}{\partial x}$$

Questo, sarà in generale diverso da 0, dal momento che come detto deriva da una coniugazione di Hodge. Le parentesi quadre indicano una somma sulle permutazioni dei tre indici, come fatto precedentemente. Non considerando i fattori 2 che derivano dal fatto che permutare gli indici e considerare più volte coppie analoghe, il risultato è:

$$\mathcal{Y}_{0xy} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_z$$

Allo stesso modo, considerando le altre due terne, ossia \mathcal{Y}_{0yz} e \mathcal{Y}_{0xz} , si ottengono le altre due componenti del rotore.

Questo oggetto deriva dalla coniugazione di Hodge di una 2-forma su uno spazio con dimensione $N = 4$, dunque una 2-forma, differenziata; il risultato è una 3-forma. Il coniugato di questa, dunque è un quadrivettore. Facendo il coniugato di Hodge di questo oggetto, dunque, si ottiene:

$$\mathcal{J} = (*\mathcal{Y})$$

Il risultato che si ottiene, dunque, è:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathcal{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

\mathcal{J} dunque è un quadrivettore; di esso, le componenti in gioco sono tutte spaziali; si può dunque pensare che esso sia la proiezione sulla parte spaziale del manifold in gioco di \mathcal{J} . Raccogliendo e sintetizzando, dunque, l'ultima equazione è semplicemente la legge di Ampère-Maxwell, dove:

$$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0$$

Se dunque si definisce:

$$\mathcal{J} = \mu_0 \mathbf{j}$$

La \mathbf{j} è la densità di corrente ordinaria.

A questo punto, manca ancora una equazione di Maxwell; al fine di ricavarla, dunque, è necessario lavorare sulla \mathcal{Y}_{xyz} , ossia sulla ultima 2-forma, differenziata. Si ha, considerando al solito le varie permutazioni:

$$M_{xy,z} = 2 \left(\frac{\partial E_z}{c \partial z} + \frac{\partial E_x}{c \partial x} + \frac{\partial E_y}{c \partial y} \right) \neq 0$$

Questa non è altri che la componente 0-esima, ossia relativa a ct , della 3-forma i cui coefficienti considerati sono xyz . Si ottiene dunque:

$$\frac{1}{c} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\varrho}{c \varepsilon_0} = \mu_0 j_0$$

dove:

$$\varrho = \varepsilon_0 \mu_0 c j_0$$

Quindi, in totale, \mathbf{j} è un quadrivettore, come detto, dove nella Ampère-Maxwell si considerano le sole dimensioni spaziali, e qui la sola dimensione temporale; in globale, tuttavia,

$$\mathbf{j} = (j_0, j_x, j_y, j_z) = (c\varrho, \varrho v^x, \varrho v^y, \varrho v^z)$$

La sorgente in questo caso è dunque rappresentata in 4 dimensioni.

5.3.1 Considerazioni finali

Le equazioni di Maxwell, in forma compatta, sono state ricavate semplicemente a partire da considerazioni geometriche sul manifold dello spazio-tempo:

$$\begin{aligned} dF &= 0 \\ *(d(*F)) &= \frac{\mu_0}{2!} \mathbf{j} \end{aligned}$$

Queste di fatto sono le equazioni di Maxwell, in forma coordinate-free e scritte in maniera estremamente compatta. Questo, è stato semplicemente ricavato ipotizzando che esista un fenomeno fisico descrivibile in questo manifold, a partire da un quadrivettore e studiando le sue proprietà; studiando solo queste proprietà, dunque, si è visto che questo fenomeno deve per forza soddisfare le equazioni di Maxwell.

In realtà, è possibile proseguire con i ragionamenti, e ricavare altre due equazioni; si è infatti finora lavorato su dM , ma non su $d(dM)$, che in questo caso varrebbe 0; se si lavorasse su ciò, si finirebbe per lavorare su $d\mathbf{j}$. Ciò che si otterrebbe lavorando su $d(dM)$ è una relazione tra le derivate di \mathbf{j} , nel dettaglio del tipo.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

Questa è l'equazione di conservazione della carica.

Una cosa che si potrebbe ancora vedere, è il fatto che \mathbf{E} in realtà non è un vettore, per quanto abbia 3 componenti. Se infatti si cambia di coordinate, si deve per forza toccare il tempo, si ha qualcosa del tipo:

$$ct, x, y, z \implies c\tau, \xi, \eta, \zeta$$

dove:

$$\begin{aligned}\tau &= f(t, x, y, z) \\ \xi &= g(t, x, y, z) \\ \eta &= h(t, x, y, z) \\ \zeta &= i(t, x, y, z)\end{aligned}$$

Cambiando le coordinate spaziali, è necessario toccare anche il tempo: quando infatti ho un cambio di coordinate, il solo cambio di coordinate da x a ξ , per esempio, implica comunque una trasformazione che contiene una dipendenza dal tempo. Volendo dunque, da E_x , trovare per esempio il campo E_ξ , si deve partire dalle componenti di F (forma) vecchie, come:

$$E_\xi = F_{\tau\xi} = F_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi}$$

questa combinazione deve essere calcolata come:

$$= F_{0x} \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial x}{\partial \xi} + F_{0y} \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial y}{\partial \xi} + F_{0z} \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial z}{\partial \xi} + F_{xy} \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial y}{\partial \xi} + \dots$$

Non è possibile fermarsi alla sola componente in x : dal momento che si deve contrarre tra α e β , che possono entrambi valere $0, x, y, z$, è necessario considerare tutte le combinazioni.

Quando si fanno le trasformazioni di coordinate, nonostante \mathbf{E} e \mathbf{B} sembrino dei vettori, si hanno delle trasformazioni di coordinate che in realtà mostrano che bisogna stare attenti; essi, inoltre, devono essere combinati tra loro, come si può vedere dalle varie combinazioni degli elementi del tensore di Faraday o di quello di Maxwell.