Introduzione all'Analisi in Tempo-Frequenza

Alberto Tibaldi

8 giugno 2008

L'antenato del tempo-frequenza

Potremmo incominciare a parlare di quest'introduzione all'analisi in tempo-frequenza, provando a cercare di spiegare, in modo qualitativo, di cosa si tratta. Si tratta di una branca dell'ingegneria molto giovane, anche se ha radici risalenti alla fine del 1700, e inizi del 1800: erano gli anni della rivoluzione industriale, erano gli anni delle prime macchine a vapore, che stavano mostrando al mondo il loro enorme potenziale produttivo, potenziale non ancora sfruttabile, in quanto si conosceva molto poco su queste macchine.

Uno dei problemi da affrontare, era uno studio in grado di formalizzare, mediante modelli matematici, la propagazione del calore. Nel 1822 uno scienziato francese, Jean Baptiste Joseph Fourier, con la sua Théorie analytique de la chaleur (Teoria analitica del calore), proponeva una soluzione a questo problema: in quest'opera, lo scienziato proponeva un'interpretazione armonica alla propagazione del calore, ossia una propagazione non isotropa, ma che seguiva una somma di funzioni fondamentali: le sinusoidi. Tra gli altri contenuti del testo, Fourier propose una coppia di funzioni integrali, di trasformate integrali, ossia di operatori in grado di trasformare per l'appunto una funzione, spostandola in un altro dominio. Data una funzione nel dominio del tempo, nella fatispecie, la funzione, passando per la celebre Trasformata di Fourier, diventava una funzione nel dominio della frequenza, ossia veniva scomposta in una somma di armoniche fondamentali, di seni e coseni (espressi come esponenziali complessi):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

Mediante la prima trasformata integrale si può per l'appunto passare da dominio del tempo a dominio della frequenza, mediante la seconda si può passare dal dominio della frequenza al dominio del tempo: nel dominio della frequenza, al posto di considerare un segnale di qualsiasi tipo come grandezza variabile nel tempo, lo si considera come una somma (o più generalmente come un integrale) di infiniti seni e coseni, a diverse frequenze e fasi. Questa trasformata integrale fu destinata a diventare lo strumento matematico fondamentale dell'ingegneria: a causa delle sue numerose proprietà, ha permesso di risolvere problemi fino ad allora molto difficili o assolutamente impossibili da risolvere.

Introduzione al tempo-frequenza

Per quanto geniale, purtroppo la trasformata di Fourier risulta essere anche incompleta, imperfetta, inadatta ad affrontare alcuni problemi nati negli anni a venire: la maggior parte dei segnali (di qualsiasi tipo, da quelli studiati nelle telecomunicazioni a quelli vocali a quelli musicali a quelli di un qualsiasi altro tipo) è a frequenza variabile: la già citata voce umana, piuttosto che l'effetto Doppler, sono eventi basati su di variazioni di frequenza. Nella voce umana, ad esempio, si è soliti studiare 4 frequenze formanti, al variare del tempo: supponendo di avere $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$, al variare del tempo, e con l'andamento di queste, si determina un tipo di messaggio, che viene captato dalle orecchie, trasformato in un segnale elettrico che viene decodificato dal cervello, e quindi da noi ascoltato.

Per affrontare problemi come questo, ed altri che magari saran accennati, serve quindi un nuovo tipo di analisi in frequenza, o meglio una sua nipote, se vogliamo: l'analisi in tempo-frequenza. Questo tipo di analisi è nato verso metà del 1900, e però solo dal 1980 è esplosa, grazie al continuo aumento della potenza computazionale dei calcolatori elettronici (che sta rispettando la nota Legge di Moore, ossia il fatto che ogni 18 mesi vi è un raddoppiamento della potenza di calcolo nei calcolatori elettronici), poichè essa si basa sul calcolo numerico, e sul ricavare equazioni e distribuzioni in modo puramente numerico (risolvere calcoli complessi numericamente è sempre più semplice, inoltre poter usare strumenti come la FFT può tornar molto utile in analisi di segnali).

Di base abbiamo dunque sempre l'analisi classica di Fourier, però sviluppata, in modo particolare: abbiamo detto che abbiamo a che fare con frequenze variabili nel tempo, e dunque quello che vorremmo avere è non più una semplice dislocazione delle frequenze e delle loro ampiezze, bensì un'informazione molto più forte: sapere precisamente (per quanto sia possibile) quali frequenze sono esistite, e in quali tempi.

L'idea di base sulla quale si fonda l'analisi in tempo-frequenza cercare funzioni in grado di rappresentare e descrivere la densit di energia, lo spettro di energia di un segnale contemporaneamente nel tempo e nella frequenza, in un'unica rappresentazione analitica e grafica: quello che si definisce è dunque un diagramma tempo-frequenza: un piano cartesiano le cui ascisse rappresentano posizioni temporali, ossia l'insieme dei tempi in cui viene utilizzata una certa frequenza (appartenente allo spettro del segnale), e le cui ordinate rappresentano lo spettro del segnale, e quindi un insieme di frequenze, che possiamo utilizzare.

Si possono vedere, sull'asse delle ordinate, le frequenze che esistono nel segnale, ossia quelle che vengono effettivamente considerate in esso. Sull'asse di tempi, si vedono tutti i tempi in cui vengono utilizzate delle frequenze. Possiamo pensare quindi semplicemente alle ascisse come il dominio del tempo, alle ordinate come il dominio della frequenza. Sul piano ogni punto o insieme di punti, rappresenta un momento in cui viene utilizzata una determinata frequenza. Si noti che l'analisi tempo-frequenza considera uno studio dell'energia dei segnali, quindi di quello che, nell'analisi in frequenza classica, era il modulo quadro della trasformata di Fourier, dello spettro.

Consideriamo il seguente disegno, per proporre un primo contatto con il piano tempo-frequenza:

Possiamo pensare alle quattro frequenze come quattro note di un pianoforte, supponendo che esso abbia solo loro. Le righe indicano per quanti e quali tempi vengono suonate le note del pianoforte, situate sulle ordinate. Questa rappresenta la prima delle distribuzioni tempo-frequenza (TFD, Time-Frequency Distributions) che osserviamo, ed è detta spettrogramma: essa è in grado di presentare il tempo, la frequenza, e l'intensità con cui si considera una certa frequenza in un certo tempo (in questo caso, la parte più nera implica maggior intensità della frequenza in quel momento, la parte più chiara, tendente grigio, indica un'intensità minore; una zona bianca non contiene frequenze utilizzate sul piano tempo-frequenza). Lo spettrogramma è identificabile, nel piano tempo-frequenza, con una funzione a scala.

Consideriamo ora qualcosa di diverso: supponiamo di ascoltare un virtuoso della chitarra elettrica, come ad esempio David Gilmour dei Pink Floyd, nel pezzo Breathe; nell'introduzione di questo brano, Gilmour effettua uno slide, ossia varia con continuità la frequenza: se prima con il pianoforte potevamo rappresentare mediante una funzione a scala ciò che si ascoltava, ora non è più possibile, in quanto la variazione di frequenza è continua, e non più a tratti come in precedenza:

Supponiamo che dunque le armoniche, le sinusoidi, varino in modo lineare, ossia come una retta. Queste sinusoidi, al variare del tempo, accelerano (o decelerano, se lo slide avviene passando dai tasti bassi a quelli alti della chitarra con lo slide): questo fenomeno, in analisi dei segnali, viene chiamato chirp; tipico segnale di chirp è il seguente:

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \beta\frac{t^2}{2}\right)$$

Il termine quadratico all'interno della funzione sinusoidale è in grado di modificare (di aumentare) linearmente la frequenza. La linearità si nota ad esempio derivando l'argomento dell'armonica variabile nel tempo: considerando $x(t) = \cos(\psi(t))$,

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = 2\pi f_0 + \beta t$$

La variazione dell'argomento del coseno è dunque lineare.

Una distribuzione che si comporta bene per modellizzare fenomeni di chirp nei segnali, è la distribuzione di Wigner (detta anche di Wigner-Ville): nel diagramma tempo-frequenza, essa si rappresenta con una retta.

Altra distribuzione che capita spesso di incontrare in tempo-frequenza, anch'essa molto importante, è la Choi-Williams:

Quello che si può qua osservare è il diagramma tempo-frequenza di un segnale di pressione all'interno di un cilindro JTD, ossia di un propulsore Diesel per motori meccanici. Vediamo uno sfondo prevalentemente blu, per poi avere picchi di giallo, e di rosso: il blu rappresenta una situazione di calma, dove non si ricevono segnali; quando si inizia a tendere verso il giallo, vi sono segnali di intensità relativamente piccola, mentre tendendo al rosso si ha il segnale vero e proprio che si vuole rilevare; in questo diagramma si intravedono due segnali principali: uno è un segnale di introduzione, un primo segnale di iniezione, il secondo è il segnale principale che si intende studiare, l'impulso principale. Esso dovrebbe avvicinarsi a quella che in analisi classica di frequenza era la $\delta(t)$, però qua ha una rappresentazione leggermente diversa: ricordiamo che si definiva come impulso un fenomeno di durata temporale nulla, e altezza infinita, in modo che il suo integrale facesse 1: la durata temporale della $\delta(t)$ era nulla, poichè essa si estendeva nel tempo solo nel punto in cui avveniva il fenomeno impulsivo (tutto questo idealizzando, ovviamente); nel dominio della frequenza, la $\delta(t)$ era una costante: ogni frequenza esisteva, in un segnale impulsivo, in egual misura.

In un diagramma tempo-frequenza, la $\delta(t)$ si rappresenterebbe in modo leggermente diverso: con una retta verticale. Ragionando, l'asse delle ordinate, ossia l'asse verticale, è l'asse delle frequenze, mentre l'asse delle ascisse rappresenta i tempi: il fenomeno impulsivo ideale, di ampiezza infinita e durata nulla, sarebbe rappresentabile, in tempo-frequenza, con una retta verticale centrata nel punto in cui avvien il fenomeno. Quello che si vede nel disegno rappresentante il segnale di pressione nella camera del cilindro, è un impulso non ideale: la sua durata è diversa da 0, e la sua ampiezza è finita, per questo sembra avvicinarsi alla $\delta(t)$, pur non potendola raggiungere a causa di effetti di non-idealità del cilindro. La distribuzione di Choi-Williams fu presentata nell'89, ed è tutt'ora molto valida e utilizzata nell'analisi di fenomeni in tempo-frequenza.

La Classe di Cohen

In una breve introduzione abbiamo già parlato di tre diverse distribuzioni in tempo-frequenza: lo spettrogramma, la Wigner-Ville, la Choi-Williams. Si creò, con la nascita di tutte queste distribuzioni, un notevole caos: non esisteva una classificazione, un metodo di riconoscere, e generalmente un metodo di creare nuove distribuzioni, in base alle proprie esigenze.

Nel 1966 il giovane Leon Cohen (ai tempi ventiseienne) innovò il tempo-frequenza, introducendo una classe di distribuzioni, detta Classe di Cohen (Cohen's Class), in un articolo del Journal of Mathematical Physics. Questa classe era in grado di racchiudere tutte le distribuzioni tempo-frequenza, e classificarle in base ad un parametro: il kernel della distribuzione. Mediante questa classificazione, e l'introduzione del concetto di kernel, Cohen riuscì a dare un senso a tutte queste distribuzioni, e soprattutto a creare un metodo per creare sistematicamente nuove distribuzioni, metodo che da quel momento fu molto utilizzato dagli ingegneri e analisti di segnali.

La classe di Cohen per un segnale $x(t)$ generico si identifica mediante la seguente relazione:

$$C_x(t;\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int\int\int x^*\left(u - \frac{\tau}{2}\right) x\left(u + \frac{\tau}{2}\right) \Phi(\theta;\tau) e^{-j\theta\tau - j\tau\omega + j\theta u} du d\tau d\theta$$

Modificando i parametri di questa funzione, è possibile ottenere ognuna delle distribuzioni appartenenti alla classe; cerchiamo di capire (senza approfondire troppo) quale sia il significato profondo di questa classe di distribuzioni; un modo alternativo di scriverla, è il seguente:

$$C(t;\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int\int A_x(\theta;\tau)\Phi(\theta;\tau) e^{-j\theta\tau - j\tau\omega + j\theta u} d\tau d\theta$$

Dove si identifica la funzione $A_x(\theta;\tau)$ come:

$$A_x(\theta;\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi t\theta} dt$$

Questa A_x a sua volta è legata alla distribuzione di Wigner (collegata con quella che abbiamo già accennato, anche se ciò che abbiam descritto era solo un caso particolare di essa); la distribuzione di Wigner per un segnale $x(t)$ si definisce come:

$$W_x(t;f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(t;\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Dove $R_x(t;\tau)$ è la funzione di autocorrelazione del segnale.

Dopo aver spiegato in modo sicuramente non esaustivo ma quantomeno introduttivo la classe di Cohen, analizziamo brevemente due delle distribuzioni che abbiamo già accennato negli esempi precedenti; durante questa spiegazione, cercheremo di chiarire il concetto di kernel, ossia quell'elemento che marchia ogni singola distribuzione tempo-frequenza, differenziandola dalle altre appartenenti alla classe madre.

Spettrogramma

Lo spettrogramma, distribuzione ideata nei Bell Lab, è una delle più importanti e utili distribuzioni esistenti. Anche se non ce ne rendiamo conto, siamo abituati a studiarlo e guardarlo ogni giorno: l'immagine del Media Player, quando ascoltiamo un disco o un mp3, rappresenta proprio uno spettrogramma. Lo spettrogramma è così definito:

$$P(t;\omega) = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)e^{-j\tau\omega}d\tau\right|^2$$

Come lavora questa distribuzione? Essa prende un segnale, e lo finestra, ossia ne considera solo un tratto nel dominio del tempo, limitando questo tratto mediante una porta, una funzione a finestra, e quindi lo trasforma mediante la trasformata di Fourier. La funzione all'interno dell'integrale, $h(t)$, è quella che compie il processo di finestratura del segnale $x(t)$, permettendoci di ottenere il segnale finestrato, $h(t-\tau)x(\tau)$. Si tratta del metodo più semplice e intuitivo per fare analisi in tempo-frequenza, e in effetti potrebbe ricordare un metodo dell'analisi in frequenza classica: la Short Time Fourier Transform:

$$X(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t}dt$$

Si tratta semplicemente di un metodo di analisi basato sul localizzare mediante una finestra e trasformare; l'unica differenza che si nota, analiticamente parlando, è l'aggiunta del modulo quadro rispetto all'espressione appena presentata.

Questa distribuzione, così facile e intuitiva, presenta però alcune insidie: non è così facile da usare, come potremmo aspettarci e desiderare. Lo spettrogramma si basa infatti sulla scelta di una finestratura idonea al fine di analizzare il segnale, finestratura che può essere scelta più o meno lunga a seconda delle variazioni di frequenza nel segnale al variare del tempo. Quello che capita, però, è qualcosa di questo tipo:

Potrebbe capitare che, se la finestratura fosse troppo corta, ipoteticamente si potrebbe definire bene il segnale, ma c'è un grosso guaio: il principio di indeterminazione della trasformata di Fourier: non è possibile ridurre banda e durata del segnale, perchè una va a scapito dell'altra. Per questo motivo, si può osservare una grossa indeterminazione quando vi è il cambio di frequenza. Al contrario, se si effettua una finestratura troppo lunga, l'indeterminazione è soddisfatta, si han dunque segnali determinati sotto il punto di vista della dispersione nel piano tempo-frequenza, però una finestra troppo lunga finisce per catturare anche le sinusoidi sbagliate, ossia quelle troppo indietro o troppo avanti nel tempo, ottenendo così effetti di sovrapposizione, e più sinusoidi utilizzate nello stesso tempo (effetto indesiderato in questo ambito). L'unico modo per procedere dunque, è andare a tentativi: scegliere una finestratura tale per cui vi sia un buon compromesso tra indeterminazione e sovrapposizione delle armoniche.

Positività e Marginali

Introduciamo a questo punto due parametri per studiare la validità, o più generalmente le caratteristiche di una distribuzione: la positività, ed i marginali.

La positività è semplicemente identica al concetto di analisi matematica: la distribuzione è sempre (o meno) positiva, per qualsiasi t e ω. Risulta molto importante lo studio di questa proprietà, in quanto in tempo-frequenza quello che studiamo è lo spettro di energia, non direttamente il segnale, dunque l'energia negativa, priva di significato fisico, sarebbe difficile da spiegare e motivare.

La validità dei marginali, è una caratteristica che possiamo comprendere riprendendo un concetto di calcolo delle probabilità: data una densità di probabilità congiunta, ossia una funzione in grado di fornire la probabilità che due eventi dotati di due differenti densità di probabilità avvengano, assieme, le marginali sono le singole variabili aleatorie, talvolta derivabili dalla congiunta, a certe condizioni. In ambito di tempo-frequenza, è la stessa cosa: se ricavando i marginali della distribuzione si ottengono lo spettro di energia in frequenza e nel tempo, allora i marginali sono validi.

Verifichiamo dunque se sono validi positività e marginali per lo spettrogramma:

$$P(t; \omega) \geq 0$$

La positività è verificata, poichè abbiamo a che fare con un modulo quadro di una funzione; per quanto riguarda i marginali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t;\omega)d\omega \neq |X(\omega)|^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t;\omega)dt \neq |x(t)|^2$$

I marginali non sono soddisfatti, per quanto riguarda lo spettrogramma.

Distribuzione di Wigner-Ville

La distribuzione di Wigner, detta anche distribuzione di Wigner-Ville, è definita nel seguente modo:

$$W(t;\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} x^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right)x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)e^{-j\tau\omega}d\tau$$

Come vediamo, essa è molto simile alla definizione di classe di Cohen: considerando infatti semplicemente:

$$\Phi(\theta;\tau) = 1$$

Si ottiene esattamente questa distribuzione.

La distribuzione di Wigner-Ville non nasce appostivamente per il tempo frequenza: essa in realtà servì al fisico Wigner, nel 1932, per effettuare correzioni in alcuni studi di meccanica statistica. Essa è in grado di modellizzare un'enormità di fenomeni, ed è una delle più utili distribuzioni, considerata nell'ambito del tempo-frequenza. Purtroppo però essa è bilineare, o anche quadratica: ciò creerà un enorme problema (che poi discuteremo). Per il resto, le sue molteplici proprietà matematiche (che non affronteremo in questa introduzione) e la sua similitudine alla classe di Cohen, la rendono utilissima anche come modello da cui partire per dar vita a nuove distribuzioni in tempo-frequenza.

Il primo dei problemi della distribuzione di Wigner è la non-positività: non abbiamo garanzie sul suo andamento sullo spazio del tempo-frequenza, e dunque essa può presentare anche energie negative. Storicamente la cosa non ha però provocato problemi, quindi, ignorando semplicemente le parti di negatività, è stato possibile utilizzare senza alcun problema questa distribuzione.

Il secondo, e più grosso dei problemi della distribuzione, è la sua quadraticità, e il fatto che, a causa di essa, si ha a che fare con dei termini incrociati (cross-terms). Essi provocano un fortissimo fenomeno di interferenza all'interno del diagramma tempo-frequenza, interferenza impossibile da ridurre e da riconoscere, in caso di diagrammi minimamente complicati.

Possiamo capire facilmente cosa rappresentino la prima e la terza linea, ma quella centrale, cos'è? Essa è il cross-term, l'elemento di interferenza provocato dalla bilinearità della distribuzione. Ciò rende, per ora, praticamente inutilizzabile la Wigner.

Nasce però ora l'idea geniale di Choi-Williams, che proposero la seguente soluzione: filtrare, mediante un filtro di tipo passa basso, la distribuzione di Wigner, perdendo in risoluzione sul diagramma tempo-frequenza, ma anche guadagnando la sparizione del termine del cross-term. Rispetto alla Wigner, la distribuzione di Choi-Williams differisce esclusivamente per il termine $\Phi(\theta;\tau)$:

$$\Phi(\theta;\tau) = e^{-\alpha(\theta\tau)^2}$$

Dove α è un parametro variabile a seconda delle nostre esigenze.

In sostanza, partendo dalla distribuzione di Wigner, proponendo al posto di $\Phi(\theta;\tau) = 1$ un filtro mediante una qualche funzione (per esempio Choi-Williams han proposto un esponenziale decrescente), è possibile eliminare, filtrare il cross-term, a scapito della risoluzione in tempo-frequenza, ma rendendo quantomeno leggibile il diagramma.

Il kernel di cui si parlava prima, il parametro che differenzia dalla classe di Cohen ogni singola distribuzione ad essa appartente, è proprio questo filtro, questo parametro, questa funzione che si sceglie al fine di eliminare il problema del cross-term.

Analisi tempo-frequenza di processi stocastici

Finora abbiamo parlato di analisi in tempo-frequenza di processi determinati. In realtà, un settore molto giovane dell'analisi in tempo-frequenza, riguarda proprio lo studio di processi stocastici. Un esempio di segnale stocastico studiabile mediante tempo-frequenza, è dato dai fotoni inviati dalle stelle doppie nell'universo: le stelle doppie sono stelle formate per l'appunto da due grossi accumuli di materia. Uno di essi, ad un certo punto della sua vita, tende a collassare su se stesso, continuando a ridurre il proprio volume, e a concentrare la propria massa in punti sempre inferiori, aumentando enormemente di densità, fino a raggiungere una singolarità, ossia il buco nero. La materia attorno ad esso finisce per esservi assorbita, e così anche la seconda stella.

Mediante uno studio in tempo-frequenza del fatto, è possibile rilevare variazioni nelle stelle, capire in quale delle fasi della loro vita si trovano, e saper prevedere o meno la possibile nascita di un buco nero, per esempio.