Problemi di Sturm-Liouville

Alberto Tibaldi

11 dicembre 2012

1 Introduzione e definizioni generali

Nell'ambito di problemi fisici/ingegneristici, spesso si ha a che fare con equazioni alle derivate parziali (PDE: *Partial Differential Equations*); uno dei metodi più utilizzati per la soluzione di queste equazioni[1] è il **metodo di separazione delle variabili**; in seguito all'applicazione di questo metodo, molto spesso si ha a che fare con operatori come il seguente $L : \mathcal{D}(L) \to L^2(a,b)$, definito come:

$$Lx(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right) + q(t)x(t) = 0 \qquad (1)$$

dove:

$$\begin{cases} \rho(t), p(t), q(t) \in \mathrm{C}([a,b]) \\ \rho(t), p(t) \geq 0, \, \forall t \in [a,b] \\ p'(t) \in \mathrm{C}([a,b]) \\ \alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad (2)$$

inoltre, per ipotesi, si escludono le combinazioni $\alpha = \alpha' = 0$ o $\beta = \beta' = 0$. Il dominio di questo operatore, $\mathcal{D}(L)$, è definito come:

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ x \, : \, t \in [a,b], \, \exists x''(t), x''(t) \in L^2(a,b), \, x(t) \text{ soddisfa le B.C.} \right\} \qquad (3)$$

(per B.C. si intendono le condizioni al contorno, *Boundary Conditions*, del problema); questo è l'insieme delle funzioni a cui l'operatore L può essere applicato. Per questo operatore è possibile studiare lo spettro puntuale, e dunque risolvere il seguente problema agli autovalori generalizzato:

$$Lx(t) = -\rho(t)\lambda x(t)$$

dove $x(t)$ è un'**autofunzione** di L, e λ è un **autovalore**, relativo all'autofunzione $x(t)$. Il problema appena definito è detto **problema di Sturm-Liouville regolare** (o RSL: *Regular Sturm-Liouville problem*).

Un secondo tipo di problemi con cui si può avere a che fare riguarda la seguente variante: con le stesse equazioni differenziali di (1), si considerino le seguenti condizioni sulle funzioni che definiscono il problema:

[1] ovviamente, qualora il dominio e le equazioni lo consentano

$$\begin{cases} p(t) > 0 \in (a,b) \\ p(a) = 0 \text{ o } p(b) = 0 \text{ o } p(a) = p(b) = 0 \\ x(t) < \infty,\ \forall t \in (a,b) \\ p(t) \text{ soddisfa le condizioni al contorno del RSL, dove non si annulla} \end{cases} \tag{4}$$

dunque, l'equazione differenziale ordinaria, in questo caso, è definita solo sull'intervallo in cui $p(t)$ è una funzione strettamente positiva, e non agli estremi in cui si annulla. Un problema di questo tipo è detto **problema di Sturm-Liouville singolare** (o SSL: *Singular Sturm-Liouville problem*): in questi, si esclude il punto estremo dell'intervallo dove $p(t) = 0$; in altre parole, dividendo tutti i termini per $p(t)$, che è il coefficiente dell'operatore differenziale di ordine più elevato, i coefficienti dell'equazione differenziale diventerebbero funzioni singolari per $t = a$ e/o $t = b$. Questo permette di avere dunque delle singolarità agli estremi dell'intervallo, da qui l'aggettivo *singular*. In questi appunti, si tratteranno nel dettaglio problemi **regolari** di Sturm-Liouville, dove gli operatori in questione sono **autoaggiunti**; una trattazione dei casi singolari può essere trovata per esempio in [3].

Un esempio di problema SSL può essere formulato nella seguente maniera:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right) + (\lambda\rho(t) + q(t))\, x(t) = 0 \\ \beta x(b) + \beta' x'(b) = 0 \\ x(t) < \infty,\ \forall t \in (a,b) \end{cases}$$

con la notazione $x(t) < \infty$ si intende che x deve essere una funzione limitata nell'intervallo in questione.

2 Problemi di Sturm-Liouville agli autovalori

Dato un RSL o un SSL, si è visto che si ha una equazione differenziale del tipo:

$$Lx(t) = -\rho(t)\lambda x(t)$$

in questo contesto, si definisce un'autofunzione $x(t)$ associata allo scalare λ una funzione $x \in C^{(2)}([a,b])$ che soddisfi (1). Se questa funzione esiste, lo scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ è detto **autovalore**. Nella letteratura internazionale, il termine "autovalore" è tradotto *eigenvalue*, mentre il termine "autofunzione" è tradotto *eigenfunction*; questi termini hanno origine germanica, dal momento che autovalori e autovalori erano stati definiti per la prima volta dal matematico David Hilbert, che ha riutilizzato termini usati da Hermann von Helmholtz: il prefisso *eigen* significa *proprio*, dunque gli autovalori sono *valori propri* del problema, mentre le autofunzioni *funzioni proprie*. Il primo vero problema agli autovalori fu risolto da Fourier, nell'ambito dello studio della propagazione del calore, al fine di semplificare la dipendenza dal tempo delle equazioni in questione; solo in seguito venne formalizzata questa teoria.

Verranno ora enunciate alcune proprietà dell'operatore di Sturm-Liouville, e ai suoi autovalori; in verità, questa cosa può essere controintuitiva, dal momento che verranno enunciate proprietà che suppongono il fatto che questi autovalori esistano; la teoria spettrale, tuttavia, si può applicare soprattutto su operatori compatti, ma è evidente che l'operatore L non sia assolutamente né limitato, né dunque compatto; verranno dunque discusse alcune proprietà in via preliminare, per poi discutere, nella sezione successiva, il metodo di applicazione della teoria spettrale all'operatore in questione.

2.1 Proprietà dell'operatore di Sturm-Liouville

In questa sottosezione verranno introdotte alcune proprietà dell'operatore L introdotto nella sezione precedente; a questo fine, sono ora definite $u(t), v(t)$ due funzioni appartenenti al dominio dell'operatore L, $\mathcal{D}(L)$; queste verranno utilizzate nelle varie considerazioni e dimostrazioni che verranno effettuate. Dunque:

$$u(t), v(t) \in \mathcal{D}(L)$$

2.1.1 Identità di Lagrange

La prima proprietà che verrà analizzata e dimostrata è l'**identità di Lagrange**; è possibile dimostrare che:

$$uLv - vLu = (p(uv' - vu'))' \tag{5}$$

Per dimostrare questa identità, si applichi la formula di Leibnitz per la valutazione del prodotto della derivata:

$$\begin{aligned} uLv &= u(t)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right) + q(t)v(t)\right] = \\ &= u(t)\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + u(t)p(t)\frac{\mathrm{d}^2v(t)}{\mathrm{d}t^2} + u(t)q(t)v(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} vLu &= v(t)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\right) + q(t)u(t)\right] = \\ &= v(t)\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} + v(t)p(t)\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2} + v(t)q(t)u(t) \end{aligned}$$

a questo punto, sottraendo questi due termini, si ottiene, effettuando alcune semplificazioni (da qui si sottointenderà la dipendenza dalla variabile indipendente t, presente in ogni termine):

$$uLv - vLu = u\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + up\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} - v\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - vp\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}$$

a questa, si aggiunge e sottrae il termine:

$$p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

si ottiene, sintetizzando ulteriormente la notazione:

$$\begin{aligned} uLv - vLu &= p'(uv' - vu') + p(uv'' - vu'') + pu'v' - pu'v' = \\ &= p'(uv' - vu') + p(u'v' + uv'' - (v'u' + vu'')) = \\ &= (p(uv' - vu'))' \end{aligned}$$

e quindi l'identità è verificata.

2.1.2 Hermitianità dell'operatore di Sturm-Liouville

L'operatore L precedentemente introdotto è autoaggiunto (o hermitiano: l'aggiunto coincide con l'operatore stesso). Questo significa che, date $u, v \in \mathcal{D}(L)$, si ha che:

$$(Lu|v) = (u|Lv)$$

dove il prodotto scalare su $\mathcal{D}(L)$ si definisce come:

$$(x|y) = \int_a^b x(t)\overline{y}(t)\,\mathrm{d}t$$

Si procede con la dimostrazione. Data $v \in \mathcal{D}(L)$, allora $v(t) = \overline{v}(t)$, dal momento che le condizioni al contorno sono dipendenti da numeri reali. Questo significa che dunque, se $\overline{v}(t) \in \mathcal{D}(L)$, allora essa soddisfa le condizioni al contorno, grazie alla definizione (3); inoltre, considerando il caso RSL (2), o il caso SSL (4), si ha che $p(t), q(t), \rho(t)$ sono funzioni a valori reali; di conseguenza:

$$\overline{p}(t) = p(t) \quad \overline{q}(t) = q(t) \quad \overline{\rho}(t) = \rho(t)$$

Al fine di verificare la validità dell'eguaglianza, si calcoli la differenza:

$$(Lu|v) - (u|Lv) = \int_a^b [\overline{v}Lu - uL\overline{v}]\,\mathrm{d}x = \left[p(u\overline{v}' - \overline{v}u')\right]_a^b$$

questo passaggio è stato ottenuto applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale, unito all'identità di Lagrange dimostrata nella sottosezione precedente. Se $p(a) > 0$, sapendo che u $\overline{v}$ soddisfano le condizioni al contorno (1) e (2); queste, possono essere scritte nella seguente forma matriciale, semplicemente raggruppandole:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} u(a) & u'(a) \\ \overline{v}(a) & \overline{v}'(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} = 0$$

dal momento che, per ipotesi, la soluzione banale $\alpha = \alpha' = 0$ non è ammissibile, al fine di avere soluzioni non banali per questo sistema omogeneo, si ha:

$$\det\left\{\underline{\underline{M}}\right\} = u(a)\overline{v}'(a) - \overline{v}(a)u'(a) = 0$$

ma questo è esattamente quanto è scritto nella parentesi tonda; di conseguenza, applicando lo stesso ragionamento sulla seconda condizione al contorno (quella legata a $t = b$, dunque a β e β'), si ottiene che l'integrale valutato nei due estremi è nullo, ma dunque che:

$$(Lu|v) - (u|Lv) = 0$$

come volevasi dimostrare.

2.1.3 Appartenenza degli autovalori al campo dei reali

Vale il seguente teorema: gli autovalori dell'operatore L di Sturm-Liouville sono reali. Per dimostrare ciò, si consideri x un'autofunzione dell'operatore, relativa a un autovalore λ:

$$Lx(t) = -\lambda\rho(t)x(t)$$

Dal momento che l'operatore L è autoaggiunto, come dimostrato nel punto precedente, è possibile scrivere che:

$$0 = (Lx|x) - (x|Lx) = (-\lambda\rho x|x) - (x| - \lambda\rho x) = (\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b \rho(t) \, |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t$$

dal momento che $\rho(t) > 0$ per ipotesi, e dal momento che $x(t)$ è un'autofunzione (questa non può essere nulla, dal momento che un'autofunzione non può essere una soluzione banale, dunque identicamente nulla, di un problema agli autovalori), è necessario che:

$$\lambda = \overline{\lambda}$$

il che coincide con dire che:

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

2.1.4 Ortogonalità delle autofunzioni dell'operatore L

Si può dimostrare che esiste una relazione di ortogonalità delle autofunzioni dell'operatore di Sturm-Liouville L, sia nel caso di problemi RSL, sia nel caso di problemi SSL. Nel dettaglio, date u, v autofunzioni di L, allora $\sqrt{\rho(t)}u(t)$ è ortogonale a $\sqrt{\rho(t)}v(t)$.

Per dimostrare questo fatto, si parte dai due problemi agli autovalori, associati a due autovalori μ, λ distinti:

$$Lu(t) = -\lambda\rho(t)u(t) \quad Lv(t) = -\mu\rho(t)v(t)$$

questo significa che λ è associato all'autofunzione $u(t)$, mentre μ è associato all'autofunzione $v(t)$. A questo punto, è possibile ancora una volta applicare l'hermitianità:

$$\begin{aligned}
0 &= (Lu|v) - (u|Lv) = (-\lambda\rho u|v) - (u| - \mu\rho v) = \\
&= (\mu - \lambda) \int_a^b \rho(t)u(t)\overline{v}(t) \, \mathrm{d}t = \\
&= (\mu - \lambda) \left(\sqrt{\rho(t)}u(t) | \sqrt{\rho(t)}v(t) \right)
\end{aligned}$$

essendo questo prodotto scalare uguale a zero, allora, se $\mu \neq \lambda$ (come da ipotesi), le due funzioni devono essere ortogonali.

La relazione di ortogonalità su queste funzioni diventa una relazione di ortogonalità delle autofunzioni, nel caso $\rho(t) = 1$; inoltre, se si normalizzano le autofunzioni, è possibile ottenere un sistema ortonormale. Questo sarebbe un sistema ortonormale per $L^2(a, b)$.

2.1.5 Cardinalità dell'insieme degli autovalori

Non abbiamo finora discusso "quanti" siano gli autovalori di un problema di Sturm-Liouville: si è visto che essi sono in generale reali, ma a questo punto un dubbio può sorgere spontaneo: ogni numero reale è un autovalore per un problema di Sturm-Liouville? Ossia, gli autovalori di problemi di questo tipo sono un insieme dotato della cardinalità del continuo?

In questa sezione si discuterà questo fatto; vale infatti il seguente teorema: non ogni numero reale è un autovalore per un RSL. Si vuole dunque dimostrare che l'insieme degli autovalori ha cardinalità numerabile. Al fine di dimostrare ciò, è possibile utilizzare i seguenti risultati della teoria degli insiemi e dell'analisi reale (vedi [1], capitolo 12):

- un'unione numerabile di insiemi numerabile è ancora un insieme numerabile;
- l'insieme $\mathbb{R}$ è non numerabile.

A questo punto, si consideri $\{e_n\}$ un sistema ortonormale completo in $L^2(a, b)$; dal momento che $L^2(a, b)$ è uno spazio separabile, questo sicuramente esiste. Si ipotizzi dunque per assurdo che ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ sia un autovalore, e si cerchi una contraddizione.

Per tutto ciò che è stato discusso finora, si ha garanzia che a ogni autovalore sia associato un autovettore; se inoltre $\rho(t) = 1$, ogni coppia di autovettori associati ad autovalori distinti deve avere prodotto scalare nullo; se si effettua una normalizzazione appropriata, si può ottenere l'ortonormalità di questi. Si consideri dunque il sistema ortonormale di autovettori, $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$, che esiste e ha potenza del continuo, dal momento che a ogni λ è associato un autovettore.

A questo punto, si consideri la seguente definizione:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists\, E_n = \{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, (e_n | f_\lambda) \neq 0\}$$

Questo è l'insieme dei λ tali per cui il prodotto scalare con il n-esimo elemento dell'insieme ortogonale numerabile $\{e_n\}$ è non nullo. Si consideri dunque l'insieme:

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, |(g, f_\lambda)| \geq c\}$$

questo insieme è finito; infatti, si supponga per assurdo che non lo sia, ossia che sia infinito, numerabile o non numerabile; di sicuro, indipendentemente dalla sua cardinalità, si avrà una successione $(\lambda_k)_k$ numerabile di elementi appartenenti a esso; si applichi su questa successione la diseguaglianza di Bessel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(g|f_{\lambda_k})\right|^2 \geq ||g||^2$$

si ha che $||g||^2$ è finito, ma dunque la serie converge, e quindi la successione $\left\{(g|f_{\lambda_k})\right\}$ è infinitesima, tende a zero; quindi, essa non potrà, $\forall k$, essere sempre maggiore di una certa costante c fissata, da cui l'insieme è certamente finito. Questo dimostra, prendendo $c = \frac{1}{m}$, che E_n è un insieme numerabile. Di conseguenza, si studi:

$$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_n E_n$$

questo significa che λ appartiene ai reali, in cui il prodotto scalare tra la f_λ, autofunzione a essa associata, con ogni elemento del sistema ortonormale $\{e_n\}$, è nullo (dal momento che da $\mathbb{R}$ si esclude l'unione degli E_n, dove ciascun E_n è l'insieme dei λ non ortonormali). Dal momento che però l'unione numerabile di numerabili (l'unione in n) è numerabile, si avrebbe che da un lato $f_\lambda \perp e_n$ (per costruzione, dunque per quanto è stato finora detto), ma d'altra parte $f_\lambda \neq 0$, e questo va contro il fatto che (e_n) è un set completo.

3 Funzioni di Green

Nella sezione precedente sono state discusse diverse proprietà dell'operatore L. L'ideale, sarebbe dunque applicare il teorema spettrale a questo operatore, al fine di terminare l'analisi. Il teorema spettrale è un teorema di esistenza, che, dato K operatore hermitiano compatto su spazio di Hilbert H, garantisce l'esistenza di una sequenza (finita o infinita), ortonormale, di autovettori di K corrispondente a una successione di autovalori reali, tale per cui, $\forall x \in H$:

$$Kx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x(t), \varphi_n(t)) \varphi_n(t)$$

dove $(\varphi_n(t))_n$ è una successione di autovettori. Volendo introdurre un'analogia con l'algebra lineare, questa operazione è la **diagonalizzazione** dell'operatore L: la sua rappresentazione mediante una base ortonormale, che in questo caso è la base degli autovettori.

Come già accennato nella sezione precedente, c'è un problema: l'operatore L è un operatore **differenziale**, dunque è molto diverso da quelli con cui di solito si utilizza la teoria spettrale: esso non è neanche limitato (o continuo che dir si voglia), tantomeno compatto! Di conseguenza, il teorema spettrale non è applicabile direttamente su di esso. A questo punto, dunque, al fine di trattare questo problema, sono possibili due approcci.

- Costruire una teoria spettrale estesa, basata sullo studio di operatori non limitati.
- Studiare questo problema sotto un punto di vista differente, al fine di ricondurre questo studio allo studio di operatori compatti (tipo Fredholm), e dunque poter applicare tutti i teoremi usuali.

In questa trattazione non si vuole pretendere di costruire una trattazione alternativa alla teoria spettrale classica, e dunque si vuole proporre qualcosa di semplice: ricondurci, in qualche maniera, alla teoria degli operatori compatti. L'idea che ci aiuterà è ora presentata: gli operatori differenziali non sono continui, ma quelli integrali generalmente sì; tuttavia, si può pensare agli operatori integrali come a una sorta di **operatori inversi** degli operatori differenziali: fin dai primi corsi di Analisi Matematica, si propone infatti il concetto di integrale come di una sorta di *inverso della derivata*, senza mai entrare nei dettagli. Ciò che si farà dunque sarà rappresentare in qualche modo l'inverso dell'operatore L di Sturm-Liouville, L^{-1}, vedere che esso è effettivamente compatto, e su di esso applicare la teoria spettrale; si porranno quindi in relazione lo spettro puntuale (l'insieme degli autovalori) dell'operatore L e quello dell'operatore L^{-1}, e in questo modo, lavorando su quest'ultimo, si potranno esportare tutti i risultati su L.

Da qui in poi, si discuterà un metodo generale per invertire l'operatore L, dunque per rappresentare L^{-1}. Si consideri il problema seguente, derivante da (1):

$$Lx(t) = g(t),\ g(t) \in L^2(a, b) \tag{6}$$

Questo è un problema di Sturm-Liouville non omogeneo: si ha infatti a membro destro una funzione $g(t) \in L^2(a, b)$; $x(t) \in \mathcal{D}(L)$, dove $\mathcal{D}(L)$ è al solito il dominio dell'operatore L, come nella forma (3). L'obiettivo di questa sezione è dunque quella di trovare L^{-1}, il che significa trovare una $x(t) \in \mathcal{D}(L)$ tale per cui:

$$x(t) = L^{-1}g(t)$$

3.1 Applicazione del metodo della variazione delle costanti

Si consideri il problema di Sturm-Liouville omogeneo $Lx(t) = 0$, scritto esplicitamente:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right) + q(t)x(t) = 0$$

in questo contesto, è evidente che l'operatore L è un operatore differenziale del secondo ordine; di conseguenza, è ragionevole dire che lo spazio delle soluzioni dell'equazione differenziale appena scritta coincida con l'insieme delle combinazioni lineari finite (span) di un insieme di dimensione 2. Date dunque $u(t)$, $v(t)$ soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea appena riportata, ha senso dire che ogni soluzione $x_\mathrm{h}(t)$ di questa equazione si possa scrivere nella forma:

$$x_\mathrm{h}(t) = c_1u(t) + c_2v(t)$$

ossia, come combinazione lineare per mezzo dei pesi c_1 e c_2 delle due soluzioni indipendenti. Al fine di procedere, si applica il metodo della variazione delle costanti di Lagrange[2], considerando quindi un integrale generale $x(t)$ per l'equazione **non omogenea** nella forma:

$$x(t) = c_1(t)u(t) + c_2(t)v(t) \tag{7}$$

dove dunque c_1, c_2 sono **funzioni** di t, e per ipotesi le si considerino:

$$c_1(t), c_2(t) \in \mathrm{C}^{(1)}([a,b])$$

si può dunque pensare a c_1, c_2 come a due *gradi di libertà*, che possono essere utilizzati per ottenere il risultato ambito. Il prossimo passo è il calcolo esplicito della derivata dell'espressione in (7) (per alleggerire la notazione si sottointende la dipendenza da t):

$$x' = c_1 u' + c_1' u + c_2' v + c_2 v'$$

È possibile ottenere il risultato esatto, senza perdere di generalità[3], imponendo la condizione:

$$c_1' u + c_2' v = 0$$

di conseguenza, è possibile scrivere l'espressione di $x'(t)$ come segue:

$$x'(t) = c_1(t)u'(t) + c_2(t)v'(t) \tag{8}$$

A questo punto, si utilizzino queste espressioni per riscrivere l'equazione del problema di Sturm-Liouville (6); dopo una prima applicazione della regola di derivazione di prodotti di funzione "standard", la si ri-applica, raccogliendo alcuni termini, ottenendo:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right) + q(t)x(t) &= (px')' + qx' = (pc_1u' + pc_2v')' + qc_1u + qc_2v = \\ &= (pu')'c_1 + c_1'(pu') + (pv')'c_2 + c_2'(pv') + qc_1u + qc_2v = \\ &= c_1\left[(pu')' + qu\right] + c_2\left[(pv')' + qv\right] + c_1'pu' + c_2'pv' = \\ &= c_1'pu' + c_2'pv' \qquad (9)\end{aligned}$$

l'ultimo passaggio è motivato dal fatto che tra parentesi quadre si è scritto esattamente l'operatore L applicato a u nel primo caso, e a v nel secondo caso; essendo però u e v soluzioni dell'equazione di Sturm-Liouville per ipotesi, tutto ciò andrà a 0; in sostanza, si è ottenuto:

Dal momento che si sta risolvendo il problema $Lx(t) = g(t)$, in virtù di quanto appena scritto, si ha che:

$$(px')' + qx = c_1'pu' + c_2'pv' = g$$

questo significa che c_1, c_2 soddisfano il seguente sistema di condizioni:

[2]un'applicazione tipica di questo metodo è presente nella dimostrazione della validità della formula di soluzione delle equazioni lineari differenziali ordinarie, dei primi corsi di Analisi Matematica

[3]si può dimostrare che non è necessario imporre questa condizione, ma la cosa renderebbe i conti più complicati

$$\begin{cases} c_1' u + c_2' v = 0 \\ p(c_1' u' + c_2' v') = g \end{cases} \tag{10}$$

A questo punto, per risolvere questo sistema, si ricavi dalla prima:

$$c_1' u = -c_2' v$$

quindi, si moltiplichi per u la seconda equazione, e vi si sostituisca ciò:

$$pc_1' u' + pc_2' v' = g \Rightarrow puc_1' u' + pc_2' uv' = gu$$

quindi, sostituendo:

$$-pc_2' vu' + c_2' v' up = gu$$

da cui, si può raccogliere:

$$c_2' p(uv' - u'v) = gu$$

Per procedere, è necessario definire un operatore M come:

$$Mx(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right) + qx(t)$$

dove però, in questo caso, $g'' \in L^2(a, b)$: l'espressione di M è la stessa di L, ma M è definito su un dominio più largo. Questo operatore si definisce dal momento che è possibile applicare l'identità di Lagrange precedentemente dimostrata:

$$(p(uv' - vu'))' = uMv - vMu = 0$$

infatti, $Mu = Mv = 0$, dal momento che u e v sono soluzioni dell'equazione omogenea associata alla (6). Dunque:

$$(p(uv' - vu'))' = 0 \Longrightarrow p(uv' - vu') = c$$

dove c è una certa **costante**; essa si può scrivere come:

$$c = p(t)W(t)$$

dove $W(t)$ è il **wronskiano** dell'equazione; essendo la derivata nulla, integrando si otterrà una certa costante c. Sostituendo ciò, si ottiene:

$$cc_1' = -vg$$

dal momento che $c \neq 0$, è possibile ottenere, integrando questa espressione:

$$c_1(t) = \frac{1}{c}\int_t^b v(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + A$$

A questo punto, è possibile ripetere gli stessi passaggi sul sistema (10), invertendo l'ordine: si moltiplica la seconda per v e si effettua la sostituzione al contrario, rifacendo questi stessi passaggi; si ottengono dunque, in fine di tutto:

$$\begin{cases} c_1(t) = \dfrac{1}{c} \displaystyle\int_t^b v(\tau) g(\tau) \, \mathrm{d}\tau + A \\ c_2(t) = \dfrac{1}{c} \displaystyle\int_a^t u(\tau) g(\tau) \, \mathrm{d}\tau + B \end{cases} \tag{11}$$

Una volta ottenuta questa rappresentazione delle costanti, si vuole procedere, proponendo alcuni risultati aggiuntivi.

3.1.1 Lemma: rappresentazione soluzione non omogenea

Si considerino $u(t), v(t)$ soluzioni dell'equazione differenziale **omogenea**:

$$Lx(t) = 0$$

si consideri quindi $g(t) \in \mathrm{C}([a, b])$, e una costante $c \neq 0$ tale per cui:

$$c = p(t) W(t)$$

e,

$$x(t) = c_1(t) u(t) + c_2(t) v(t)$$

allora, essa è una soluzione dell'equazione **non omogenea**:

$$Lx(t) = g(t)$$

questo, $\forall A, B$ scalari, scelti in maniera tale da soddisfare le condizioni al contorno di (1).

Questo lemma dunque afferma che è possibile rappresentare la soluzione di un'equazione differenziale non omogenea a partire dalle soluzioni dell'equazione omogenea, per mezzo di termini $c_1(t)$ e $c_2(t)$ nella forma ricavata nella sezione appena conclusa. Date dunque le soluzioni dell'equazione omogenea, ora si dispone di un metodo generale di ricavare le soluzioni dell'equazione non omogenea.

3.2 Costruzione della funzione di Green

3.2.1 Teorema di esistenza e unicità per problemi di Cauchy

Finora, si è ipotizzato che l'equazione differenziale omogenea associata a (6) abbia due soluzioni $u(t)$ e $v(t)$ linearmente indipendenti, ossia tali per cui una non possa essere semplicemente scritta come l'altra, moltiplicata per un certo scalare M. Ora si vuole dare forza a questa ipotesi, verificando che essa abbia fondamento. Si consideri il seguente teorema ai valori iniziali (di Cauchy):

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t} + P(t) \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + Q(t) x(t) = R(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

È risaputo che questo problema, date $P, Q, R \in \mathrm{C}^{(q)}([a, b])$, ha una e una sola soluzione, e questa è a valori reali.

Questo risultato riguarda i problemi ai valori iniziali, e in questa specifica forma; tuttavia, è possibile riscrivere l'equazione di Sturm-Liouville, al fine di ricondurla in questa forma:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right) + q(t)x(t) = \frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} + p(t)\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + q(t)x(t)$$

a questo punto però, se $p(t) > 0$ (e non nulla), è possibile dividere tutto per $p(t)$:

$$= \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{p'(t)}{p(t)}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{q(t)}{p(t)}x(t) = 0$$

A questo punto, si vuole applicare il teorema di esistenza appena discusso sulle funzioni $u(t)$ e $v(t)$; il teorema garantisce, per come è scritto, esistenza e unicità; se tuttavia invece che due condizioni iniziali se ne impone una sola, allora il teorema garantisce ancora l'esistenza, ma non più l'unicità della soluzione. Si consideri dunque, delle condizioni al contorno di (1), la prima per la funzione $u(t)$, la seconda per la funzione $v(t)$:

$$\begin{cases} \alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0 \\ \beta v(b) + \beta' v'(b) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

ossia, per la funzione $u(t)$ si impone solo la condizione al bordo sinistro, mentre per $v(t)$ solo quella al bordo destro. Questo permette di dire che $u(t)$ può essere una di infinite funzioni, tutte che soddisfano la condizione al contorno, multiple tra loro; stessa cosa per $v(t)$; $u(t)$ e $v(t)$ sono ancora indipendenti per ipotesi. Dati K_u, K_v scalari, allora $K_u u(t)$ e $K_v v(t)$ soddisfano ancora sia l'equazione differenziale omogenea, sia le condizioni al contorno (12) (moltiplicando ambo i membri per K_u o K_v o per uno scalare in genere, essendovi zero a membro destro, essendo condizioni al contorno omogenee, le condizioni rimangono soddisfatte). Quindi:

$$x(t) = c_1(t)u(t) + c_2(t)v(t)$$

dove i due gradi di libertà sono scritti nella forma (11); si può scegliere $A = B = 0$. Si osservi che:

$$c_2(a) = 0$$

infatti:

$$c_2(a) = \frac{1}{c}\int_a^a u(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$$

questo, in virtù del fatto che $B = 0$! Inoltre, dalle (7) e (8):

$$x(a) = c_1(a)u(a) + c_2(a)v(a) = c_1(a)u(a)$$

$$x'(a) = c_1(a)u'(a) + c_2(a)v'(a) = c_1(a)u'(a)$$

da cui, dunque:

$$\alpha x(a) + \alpha' x'(a) = \alpha c_1(a)u(a) + \alpha' c_1(a)u'(a) = c_1(a)(\alpha u(a) + \alpha' u'(a)) = 0$$

dal momento che u, essendo soluzione del problema omogeneo (1), soddisfa la condizione al contorno:

$$\alpha u(a) + \alpha' u'(a) = 0$$

lo stesso ragionamento può essere iterato per $t = b$, usando le funzioni v, e sfruttando il fatto che $c_1(b) = 0$. Questo dimostra che $x(t)$ costruita in questo modo soddisfa le condizioni al contorno per $t = a$, e per $t = b$ (quest'ultimo non è stato esplicitamente dimostrato ma è banalmente analogo al caso $t = a$). Si osservi che è stata ancora dimostrata l'unicità di questa soluzione dell'equazione non omogenea.

3.3 Esistenza e unicità della soluzione dell'equazione non omogenea

Si supponga a questo punto che $\lambda = 0$ **non** sia un autovalore di un problema RSL. Allora, data $g \in \mathrm{C}([a,b])$, il problema non omogeneo tipo (6), la cui equazione è:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right) + q(t)x(t) = g(t)$$

ha soluzione **unica**, che si può scrivere come:

$$x(t) = \int_a^b G(t,\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

dove $G(t,\tau)$ è detta **funzione di Green**, ed è il nucleo integrale dell'operatore K definito come:

$$Kx(t) = \int_a^b G(t,\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Questo nucleo integrale è definito come:

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{c}v(t)u(\tau), & a \leq \tau \leq t \leq b \\ \frac{1}{c}u(t)v(\tau), & a \leq t \leq \tau \leq b \end{cases}$$

dove u, v sono soluzioni non nulle dell'equazione omogenea, con le condizioni al contorno, c è la costante definita ai punti precedenti, e si suppone che $x'' \in \mathrm{C}([a,b])$.

Un'osservazione su $G(t,\tau)$: si è detto precedentemente che su $u(t)$ si è applicata solo la condizione al contorno in $t = a$, mentre su $v(t)$ solo quella per $t = b$; questo fatto è ora motivabile, dal momento che nella prima parte dell'espressione appena scritta di $G(t,\tau)$, si ha che $t \geq \tau$, di conseguenza t può essere pari ad a solo nel caso limite di $\tau = a$; stesso discorso per $v(t)$ nella seconda equazione; questo motiva il fatto che su $u(t)$ è stata imposta solo la condizione in $t = a$, e in $v(t)$ solo quella in $t = b$: è utile attribuire, in un primo momento, solo queste condizioni, al fine di lasciare sia per $u(t)$ sia per $v(t)$

un *grado di libertà in più*, al fine di poter *raccordare* le due soluzioni in $t = \tau$; si è comunque dimostrato precedente che, anche imponendo quelle sole due condizioni, $x(t)$, ossia la soluzione dell'equazione **non omogenea**, soddisferà le condizioni al bordo!

Questo teorema garantisce l'esistenza e l'unicità di questa soluzione, scritta in termini dei risultati precedentemente discussi, definendo in via preliminare il concetto di funzione di Green. Prima di procedere con la dimostrazione del teorema, si discuterà ora un lemma di questo teorema.

3.3.1 Lemma

Considerate le ipotesi del teorema appena enunciato, si può dimostrare che:

$$uv' - vu' \neq 0 \, \forall t \in [a, b]$$

Si vuole dimostrare questo fatto. Il termine $uv' - vu'$ può essere visto come determinante della seguente matrice:

$$uv' - vu' = \det \begin{bmatrix} u & v \\ u' & v' \end{bmatrix}$$

ora, si ipotizzi che questo determinante sia uguale a 0, per un $t_0 \in [a, b]$; questo significherebbe che esistono κ, μ diversi da zero tali per cui il sistema:

$$\begin{bmatrix} u & v \\ u' & v' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ha soluzione: se il determinante fosse nullo in $t = t_0$, vorrebbe dire che il sistema avrebbe soluzione non banale. Questo sistema si può riscrivere come:

$$\begin{cases} \kappa u(t_0) + \mu v(t_0) = 0 \\ \kappa u'(t_0) + \mu v'(t_0) = 0 \end{cases}$$

Data la funzione $x(t)$ definita come:

$$x(t) = \kappa u(t) + \mu v(t)$$

soddisfacente $x(t_0) = x'(t_0) = 0$, questa sarebbe soluzione dell'equazione omogenea: sostituendola nell'equazione differenzia omogenea associata al problema non omogeneo, tutte le condizioni al contorno sarebbero soddisfatte, e u, v sarebbero singolarmente soluzioni, quindi tutto sarebbe coerente: anche una loro combinazione lineare (per linearità dell'operatore L) è soluzione dell'equazione differenziale omogenea. È evidente che $x(t) = 0$, $\forall t \in [a, b]$ è soluzione dell'equazione differenziale; esiste però il teorema di unicità applicato al problema di Cauchy con condizioni iniziali $x(t_0) = x'(t_0) = 0$, che dice che questa soluzione banale è anche unica: l'unica soluzione ammissibile, sarebbe dunque quella identicamente nulla. Perché $x(t) = 0$, con $u(t)$, $v(t)$ non nulle, si deve avere che:

$$0 = \kappa u(t) + \mu v(t) \Longrightarrow u(t) = \frac{\mu}{\kappa} v(t)$$

ossia, $u(t)$ e $v(t)$ dovrebbero essere una multiplo di un'altra. Supponendo che questo sia possibile (anche se va contro le ipotesi), si avrebbe che dunque $u(t)$ soddisfa la condizione al contorno:

$$\beta u(b) + \beta' u'(b) = 0$$

infatti, se $v(t)$ soddisfa questa condizione (presa da (12)), allora lo fa anche $u(t)$, essendo le due una il multiplo dell'altra per mezzo di un certo scalare); questo significa che a entrambi i bordi, $u(t)$ dovrebbe soddisfare questa condizione. In altre parole, si avrebbe che:

$$Lu(t) = 0$$

essendo infatti $u(t)$ sia una soluzione dell'equazione differenziale omogenea, sia soddisfacente entrambe le condizioni al contorno; questo, presentando dunque due condizioni al contorno omogenee (sia quella in $t = a$ sia quella in $t = b$), può essere visto come il seguente problema agli autovalori:

$$Lu(t) - \lambda u(t) = 0$$

dove $\lambda = 0$. Questo ammetterebbe soluzione, per tutti i discorsi fatti prima, ma ciò non ha senso: $\lambda = 0$ **non è** per ipotesi un autovalore. Di conseguenza, siamo caduti in un assurdo.

3.3.2 Dimostrazione del teorema

Sia p sia $uv' - vu'$ sono forzatamente diversi da zero, $\forall t \in [a, b]$; di conseguenza, c è una costante, ma essa è per forza diversa da zero (questo fatto, precedentemente ipotizzato, ora è motivato grazie al lemma appena scritto). Considerando dunque l'equazione non omogenea

$$Lx(t) = g(t)$$

questa ha al più una soluzione in $\mathcal{D}(L)$. Si consideri:

$$x(t) = c_1(t)u(t) + c_2(t)v(t)$$

si può scrivere dunque, espandendo c_1 e c_2, come:

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t)\frac{1}{c}\int_a^b v(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + v(t)\int_a^t u(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_a^b G(t,\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Inoltre, $x(t)$ ha due derivate continue, ossia $x \in \mathrm{C}^{(2)}([a, b])$; si ha infatti che u'' (e v'') è soluzione di una equazione differenziale ordinaria del secondo ordine; essa, dunque, esiste; inoltre, scrivendo in maniera più rapida e riarrangiando i termini dell'equazione omogenea associata a (6), si ha:

$$u'' = -\frac{p'u'}{p} - \frac{qu}{p}$$

Applicando il teorema di esistenza, sull'equazione di Sturm-Liouville omogenea modificata (questa, appena riportata), si può dire che u'' è continua. Inoltre, ricordando i passaggi precedentemente proposti, si ha che:

$$
\begin{aligned}
cc_2 &= ug \\
cc_1 &= -vg
\end{aligned}
$$

dove le funzioni c_1, c_2 sono continue, dal momento che a membro sinistro si ha una costante moltiplicata per c_1 o c_2, ma a destra il prodotto di due funzioni continue, di conseguenza essendoci l'eguaglianza anche a sinistra si ha continuità. Dunque, dal momento che:

$$x'(t) = c_1(t)u'(t) + c_2(t)v'(t)$$

e che ogni funzione al membro destro ha derivata continua, allora che x' avrà derivata continua (il che significa che $x''(t)$ è continua).

Per quanto riguarda il kernel integrale $G(t, \tau)$, ossia per quanto riguarda la funzione di Green per il RSL, u e v sono *almeno* continue, dunque $c^{-1}u(t)v(\tau)$ e $c^{-1}u(\tau)v(t)$ saranno altrettanto continue nei rispettivi intervalli in cui sono valutate. Inoltre, esse sono pure continue nel punti in comune: $t = \tau$. Questa cosa si dimostra dal momento che i domini:

$$a \leq \tau \leq t \leq b$$

e

$$a \leq t \leq \tau \leq b$$

disegnati su un piano, sono domini triangolari chiusi, con una diagonale in comune; sulla diagonale comune, è evidente che le funzioni assumono gli stessi valori, dunque esse coincidono, dunque $G(t, \tau) \in \mathrm{C}([a, b] \times [a, b])$; questo è un sottospazio chiuso e limitato, dunque, essendo sottospazio di $\mathbb{R}^2$, esso è anche compatto, applicando il teorema di Heine-Borel. Dal momento che la funzione è continua in un compatto, si può applicare Heine-Cantor, e dire che essa è anche uniformemente continua, dunque limitata, e dunque ammette, per il teorema di Weierstrass, massimo e minimo assoluti. Data M una certa costante, si può dunque dire che:

$$|G(t, \tau)| \leq M, \ \ a \leq t, \tau \leq b$$

ossia, questo vale sul rettangolo dato dall'unione dei due sottodomini triangolari appena discussi. In altre parole, usando questa maggiorazione, è possibile scrivere che:

$$\int_a^b \int_a^b |G(t, \tau)|^2 \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\tau \leq M \, (b-a)^2$$

Questo conclude la dimostrazione, e permette di mettere a fuoco due proprietà di questo operatore.

- Questo è un operatore di Hilbert-Schmidt; di conseguenza, esso è **compatto**.

- Le funzioni che si stanno considerando sono tutte a valori reali; dunque, questo operatore è anche hermitiano.

3.4 Teorema di rappresentazione delle soluzioni

Si vuole aggiungere un tassello al puzzle: il teorema che si discuterà ora afferma che, se $\lambda = 0$ non è un autovalore, data $G(t, \tau)$ discussa precedentemente, e l'operatore K su $L^2(a, b)$ definito come:

$$Kg(t) = \int_a^b G(t, \tau) g(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

allora, K è un operatore hermitiano e, per ogni $g \in \mathrm{C}([a, b])$, la soluzione dell'equazione non omogenea

$$Lx(t) = g(t)\, f \in \mathcal{D}(L)$$

è:

$$x(t) = Kg(t)$$

Si osservi che questo teorema permette di dire che ogni soluzione dell'equazione differenziale, $x(t)$, ha forma $Kg(t)$; tuttavia, mancano due dettagli, per completare la teoria:

- $g(t) \in \mathrm{C}([a, b])$, per ipotesi; tuttavia, questa è un'ipotesi sovrabbondante, dal momento che non è necessario che g sia continua: essa può, più in generale, essere in $L^2(a, b)$;
- si è trovata una rappresentazione per ogni soluzione, dunque si è in grado di rappresentare ogni punto di $\mathcal{D}(L)$ mediante l'operatore K; tuttavia, non si è discusso range $\{L\}$, ossia non si è discusso $\mathcal{D}(K)$: esso è $L^2(a, b)$.

Non è necessario che $x''(t)$ sia continua, come finora detto: è sufficiente che essa esista, e appartenga a $L^2(a, b)$; questo richiede una modifica dell'operatore L, che però permette di dire che esso, alla fine, diventa suriettivo in $L^2(a, b)$: ogni elemento di $L^2(a, b)$ è anche nell'immagine dell'operatore L in cui si è *rilassata* l'ipotesi sulla continuità di x'', chiedendo solo che essa sia a quadrato sommabile. A queste condizioni:

$$K = L^{-1}$$

come stiamo per discutere.

L'ipotesi su $\lambda = 0$ è ragionevole, dal momento che, volendo legare L e K mediante un'inversione, allora intuitivamente (la cosa verrà dimostrata in seguito), ogni autovalore di K è un inverso di L; se si avesse $\lambda = 0$, non sarebbe possibile calcolarne il reciproco; d'altra parte, in questa condizione, è ovvio (pensando al caso finito-dimensionale) che l'operatore non sarebbe nemmeno invertibile.

3.4.1 Lemma

Si propone a questo punto un lemma del teorema appena riportato. Supponendo che $\lambda = 0$ non sia un autovalore del RSL, e che K sia l'operatore integrale definito nella solita maniera, con la funzione di Green $G(t, \tau)$, allora, $\forall g \in L^2(a, b)$, si ha che $Kg(t)$ è derivabile, e:

$$(Kg)' = c_1(t)u'(t) + c_2(t)v'(t)$$

Si dimostra a questo punto questo risultato.

Per come K è definito, si ha che:

$$Kg(t) = x(t) = c_1(t)u(t) + c_2(t)v(t)$$

dove $u(t), v(t)$ sono funzioni derivabili, in virtù del teorema di esistenza delle soluzioni del problema ai valori iniziali precedentemente discusso. Se dunque g è continuo, Kg sarà derivabile, dal momento che l'operatore K è un operatore integrale (e dunque a esso si può applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale); $(Kg)'$ si può dunque trovare mediante la regola di derivazione del prodotto di due funzioni.

Un'osservazione: nulla ci vieta di supporre che $g \in L^2(a, b)$: infatti, nell'espressione appena scritta di $Kg(t)$ non compaiono né $c_1'(t)$ né $c_2'(t)$, che non potrebbero esistere, se g fosse solo integrabile: $c_1(t)$ e $c_2(t)$ infatti sono calcolate con le formule (11), che contengono g al loro interno; se g appartenesse a $L^2(a, b)$, essa potrebbe essere discontinua, e dunque la derivata delle c_1, c_2 potrebbe non esistere; il fatto che queste derivate non siano presenti nelle nostre formule, ci danno *speranza* di poter estendere i risultati per $g(t) \in L^2(a, b)$. Dunque, essendo:

$$(Kg(t))' = c_1(t)u'(t) + c_2(t)v'(t)$$

per ricavare $Kg(t)$, è sufficiente integrare membro a membro, ottenendo:

$$\begin{aligned} Kg(t) &= Kg(a) + \int_a^t (c_1u' + c_2v')(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \\ &= u(a)\frac{1}{c}\int_a^b v(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \int_a^t (c_1u' + c_2v')(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$

l'ultimo passaggio semplicemente è stato scrivere esplicitamente $Kg(a)$ utilizzando la definizione dell'operatore K, valutando il tutto in $t = a$; si osservi che questa formula vale per ogni $t \in [a, b]$, e non *quasi ovunque*.

Si procede ora con il passo successivo della dimostrazione: si definiscono le seguenti applicazioni lineari, $\tilde{K}$, M, N, come:

$$\begin{aligned} \tilde{K}g(t) &= Kg(t) \\ Mg(t) &= u(a)\frac{1}{c}\int_a^b v(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ Ng(t) &= \int_a^t (c_1u' + c_2v')(\tau)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Si vuole dimostrare che ciascuno di questi tre operatori, date funzioni $g \in L^2(a,b)$, producono funzioni **continue**, motivando la frase prima detta. Se $g(t) \in L^2(a,b)$, allora, per vedere che la sua immagine è in $C([a,b])$, bisogna cercare di studiarne la continuità rispetto alla norma di $L^2(a,b)$ e alla norma del sup (rispetto a cui lo spazio delle funzioni continue è di Banach). Dunque:

$$Ng(t) \leq |Ng(t)| = \left| \int_a^t (c_1 u' + c_2 v')(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \leq \int_a^t \left| (c_1 u' + c_2 v')(\tau) \right| \, \mathrm{d}\tau \leq$$
$$\leq (b-a) \left\{ ||c_1||_\infty \left| \left| u' \right| \right|_\infty + ||c_2||_\infty + \left| \left| v' \right| \right|_\infty \right\}$$

nel primo passaggio si è solo detto che $Ng(t)$ è maggiorabile col modulo, si è scritto esplicitamente tutto ciò e si è applicata la diseguaglianza triangolare; nel secondo passaggio, ogni funzione è stata maggiorata con il proprio sup, dunque ottenendo solo costanti dentro l'integrale da a a t; essendo $t \in [a,b]$, il massimo di questo integrale è per $t = b$, dunque si è maggiorato tutto l'integrale con le varie norme del sup, moltiplicando per la larghezza dell'intervallo $[a,b]$. Ripetendo ragionamenti simili:

$$|c_1(t)| = \frac{1}{c} \left| \int_t^b v(\tau) g(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right| \leq \frac{1}{c} \int_a^b |v(\tau)| \, |g(\tau)| \, \mathrm{d}\tau \leq \frac{1}{c} \, ||v||_{L^2} \, ||g||_{L^2}$$

la stessa cosa vale per $c_2(t)$:

$$|c_2(t)| \leq \frac{1}{c} \, ||u||_{L^2} \, ||g||_{L^2}$$

questo ci dice che:

$$||c_1||_\infty \leq \frac{1}{c} \, ||v||_{L^2} \, ||g||_{L^2}$$
$$||c_2||_\infty \leq \frac{1}{c} \, ||u||_{L^2} \, ||g||_{L^2}$$

(infatti, il fatto di appartenere a L^2 è più generale rispetto ad appartenere a C). Effettuando queste ultime maggiorazioni, si può dunque dire che:

$$||Ng||_\infty \leq \frac{b-a}{c} \left\{ ||v||_{L^2} \, ||g||_{L^2} \left| \left| u' \right| \right|_\infty + ||v||_{L^2} \, ||g||_{L^2} + \left| \left| v' \right| \right|_\infty \right\}$$

Questo significa che, date $g \in L^2(a,b)$ (dunque la loro norma in L^2 è finita), la norma di Ng del sup è maggiorata da tutte costanti (infatti, le norme del sup di u' e v' sono finite, dal momento che si è visto che u' e v' sono certamente continue, e su un intervallo limitato, dunque per Weierstrass ammettono massimo), quindi è stato dimostrato che $Ng(t)$ è un operatore limitato da $L^2(a,b)$ a $C([a,b])$: questo operatore mappa funzioni a quadrato integrabile in funzioni continue.

Segue dunque che l'applicazione lineare

$$\tilde{K} - M - N$$

è una applicazione continua. Inoltre, se si parte da funzioni già continue, $\tilde{K}$ coincide con $M + N$, dunque il mapping non agisce (dal momento che la funzione è già continua, e non deve essere "toccata").

3.4.2 Teorema legante autovalori di K e L

Ciò che si sta cercando di ottenere è un legame tra gli operatori L di Sturm-Liouville e K, inverso definito mediante un'opportuna funzione di Green. Il teorema che sta per essere discusso dimostra questo legame. Se $\lambda = 0$ non è un autovalore di un operatore L di un RSL, e K è il solito operatore integrale, allora:

1. $\lambda = 0$ non è un autovalore per l'operatore K;
2. λ sia un autovalore di L se e solo se λ^{-1} è un autovalore di K.

inoltre, gli autovettori di L relativi a un autovalore λ coincidono con gli autovettori di K corrispondenti a λ^{-1}.

3.4.3 Dimostrazione del punto 1

Si consideri il caso:

$$Kg(t) = 0 \Longrightarrow Kg(t) = x(t) = c_1(t)u(t) + c_2(t)v(t)$$

precedentemente era stato discusso un lemma che affermava che:

$$c_1(t)u'(t) + c_2(t)v'(t) = 0 = (Kg(t))'$$

d'altra parte, discutendo il lemma in questione, si era detto che:

$$\det \begin{bmatrix} u & v \\ u' & v' \end{bmatrix} \neq 0$$

ma dunque, se:

$$\begin{bmatrix} u & v \\ u' & v' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = 0$$

allora, per forza, è necessario che:

$$c_1(t) = c_2(t) = 0$$

questo significa dunque, recuperando le (11):

$$\left\{ \int_t^b v(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad \int_a^t y(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0 \right.$$

questo, per i risultati della teoria della misura, implica che vg e ug sono funzioni nulle quasi ovunque su $L^2(a, b)$. Dal momento che è impossibile che $u = 0$ e $v = 0$ assieme per ipotesi (sono soluzioni non banali), si deve avere per forza che $g = 0$; se tuttavia $g = 0$, si ha che $\lambda = 0$, e questo è un assurdo, dal momento che per ipotesi $\lambda \neq 0$.

3.4.4 Dimostrazione del punto 2

Si supponga che λ sia un autovalore dell'operatore L; si consideri dunque $x(t) \in \mathcal{D}(L)$, dove $x(t)$ è l'autovettore relativo a λ; si ha dunque che:

$$Lx(t) = \lambda x(t)$$

Ma, se $x(t) \in \mathcal{D}(L)$, allora $x(t) \in \mathrm{C}([a,b])$; applicando il teorema precedente, si ha dunque che x è rappresentabile come una funzione derivante dall'applicazione di K su una certa $g(t)$:

$$g(t) = Lx(t) = \lambda x(t)$$

$$x(t) = Kg(t) = K(\lambda x(t))$$

ossia, la $g(t)$ in questione è la $x(t)$ mappata da L nell'immagine; essendo però un problema agli autovalori, si ha il risultato scritto. Questo significa, invertendo:

$$Kx(t) = \lambda^{-1} x(t)$$

questo significa dunque che λ^{-1} è autovalore dell'operatore K, con autovettore $x(t)$ relativo a esso.

A questo punto, si ragioni al contrario: si consideri μ autovalore di K con autovettore $g \in L^2(a,b)$; dunque:

$$Kg(t) = \mu g(t)$$

dove $g(t) \neq 0$, $\mu \neq 0$. Banalmente, si può scrivere che:

$$g(t) = \mu^{-1} Kg(t)$$

si osservi però che non si può effettuare la sostituzione precedentemente fatta nel caso in cui si partiva da $x(t)$, dal momento che, per ora, **ogni funzione in $\mathcal{D}(L)$ si può scrivere come una certa $g(t) \in L^2(a,b)$, ma non è chiaro quale sia l'immagine dell'operatore L**. Si può però osservare quanto segue: dal momento che $Kg(t)$ è derivabile, certamente $g(t)$ è continua, come si è visto nel lemma appena dimostrato; dal momento che:

$$Lx(t) = g(t)$$

ha una soluzione $x(t) = Kg(t)$, allora è possibile dire che:

$$LKg(t) = g(t)$$

tuttavia, $g(t)$ per ipotesi è autovettore di K con autovalore μ, dunque:

$$LKg(t) = L(\mu g(t)) = g(t) \Longrightarrow Lg(t) = \mu^{-1} g(t)$$

Questo termina la dimostrazione: data $g(t) \in L^2(a,b)$, abbiamo dimostrato che ogni $g(t)$ è associato a una qualche $x(t) \in \mathcal{D}(L)$; quindi è possibile dire che effettivamente L è sia iniettivo sia suriettivo.

3.4.5 Conclusioni

Si vuole riassumere, in queste conclusioni, quanto fatto finora.

1. Si è compreso che la via corretta per applicare la teoria spettrale all'operatore L di Sturm-Liouville è quella di invertirlo, in qualche modo, al fine di risolvere il problema non omogeneo

$$Lx(t) = g(t)$$

2. Mediante il metodo di Lagrange della variazione delle costanti, è stato introdotto un operatore K, e se ne è ricavata una formula esplicita al variare di $g(t)$.

3. Mediante alcuni risultati noti sui problemi di Cauchy, è stata discussa l'unicità della soluzione.

4. I risultati precedenti hanno fornito indizi inducenti a credere che K fosse in qualche senso l'inverso dell'operatore L; è stato dimostrato che dunque L è a tutti gli effetti l'inverso dell'operatore K.

4 Proprietà delle funzioni di Green

Le funzioni di Green $G(t, \tau)$ permettono, mediante l'operatore integrale di Frobenius che ha esse come kernel integrale, di costruire le soluzioni di un'equazione differenziale non omogenea a partire dalle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea ad essa associata, con le manipolazioni precedentemente discusse.

In primo luogo verranno discusse proprietà *semplici*, per poi passare a discuterne una molto più importante, dal momento che attribuisce un significato fisico di considerevole rilevanza alla funzione di Green.

4.1 Condizioni al contorno e simmetria

La funzione $G(t, \tau)$ ha la seguente proprietà:

- per $t > \tau$, si ha che:

  $$G(t, \tau) = \frac{1}{c} v(t) u(\tau)$$

  di conseguenza, osservando la variazione in t, si ha che, per τ fissato e soddisfacente la condizione:

  $$G(t, \tau) \propto v(t)$$

- ragionando in maniera analoga, per $t < \tau$, si ha:

  $$G(t, \tau) = \frac{1}{c} v(\tau) u(t)$$

  ossia:

$$G(t,\tau) \propto u(t)$$

Dal momento che $G(t,\tau)$ è sempre proporzionale a una delle soluzioni del problema di Sturm-Liouville omogeneo, è evidente che la funzione di Green soddisfi sempre le condizioni al contorno del problema.

Allo stesso modo, dalle espressioni appena scritte, è assolutamente evidente che:

$$G(t,\tau) = G(\tau,t)$$

questo permette di dimostrare il fatto che l'operatore K è hermitiano.

4.2 Continuità della funzione di Green e discontinuità della derivata

Si vuole ora discutere la continuità di una funzione di Green di un problema di Sturm-Liouville; questo argomento è già stato toccato, ma lo si vuole approfondire. Per $t = \tau$, si definisce:

$$G(\tau^+,t) = \lim_{t\to\tau^+} G(t,\tau), t, > \tau$$

e

$$G(\tau^-,t) = \lim_{t\to\tau^-} G(t,\tau), t, > \tau$$

Ora, usando le relazioni (11) nei rispettivi domini, valutandole per $t = \tau$, si ha:

$$\frac{u(\tau)v(\tau)}{c} = \frac{v(\tau)u(\tau)}{c}$$

e dunque la continuità è effettivamente presente.

Sebbene la funzione sia continua, essa presenta una discontinuità della derivata nel punto $t = \tau$. Per fare ciò, si effettui la seguente valutazione, ricordando che $c = p(t)W(t)$, dove $W(t)$ è il wronskiano associato all'equazione:

$$\left.\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right|_{t\to\tau^+} - \left.\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right|_{t\to\tau^-} = -\frac{1}{p(\tau)W(\tau)}v'(\tau)u(\tau) + \frac{1}{p(\tau)W(\tau)}v(\tau)u'(\tau)$$

ricordando però che $W(\tau) = uv' - vu'$, si ha che (valutando tutto in $t = \tau$):

$$= -\frac{u'(\tau)v(\tau) - u(\tau)v'(\tau)}{p(\tau)(u(\tau)v'(\tau) - v(\tau)u'(\tau))} = \frac{1}{p(\tau)}$$

Questo significa che la derivata ha una discontinuità di prima specie (tipo *salto*), di ampiezza pari a $(p(\tau))^{-1}$. Questa proprietà è molto importante, per la proprietà che si sta per discutere.

4.3 Soddisfacimento di un'equazione differenziale

La proprietà che segue permette di attribuire alla funzione di Green un importante significato fisico. Si raggiungerà la conclusione utilizzando concetti intuitivi, e poi la si giustificherà passo-passo, mostrando alcune sue conseguenze. Si è precedentemente detto che la funzione di Green è proporzionale, in entrambi i sottodomini triangolari, alle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea, $u(t)$ e $v(t)$. Questo permette di motivare il fatto che la funzione di Green può soddisfare un'equazione differenziale del tipo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right) + q(t)G(t,\tau) = 0, t \neq \tau$$

con le condizioni al contorno. Chiaramente, per $t = \tau$, questa informazione non è sufficiente, dal momento che si vuole anche specificare cosa accade alla derivata per $t = \tau$; per questo motivo, per ora si è escluso il punto $t = \tau$.

La derivata della funzione nell'intorno di $t = \tau$ si comporta come la funzione di Heaviside $U(t)$:

$$U(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

dalla Teoria delle Distribuzioni è noto che:

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t)$$

Si consideri per ipotesi valido questo risultato, al fine di considerare le nostre elucubrazioni. Se $G(t,\tau)$ è continua ma non derivabile, a causa di una discontinuità tipo salto, significa che:

$$\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}$$

ha una discontinuità tipo salto, dunque ha un comportamento come $U(t)$, ma dunque la derivata seconda di $G(t,\tau)$ rispetto a t sarà uguale a una delta di Dirac $\delta(t)$. Ha dunque senso scrivere l'equazione differenziale soddisfatta dalla funzione di Green come:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right) + q(t)G(t,\tau) = \delta(t-\tau) \tag{13}$$

Data questa equazione differenziale, è evidente che essa coincide con dire che:

$$LG(t,\tau) = \delta(t-\tau) \tag{14}$$

Questo permette di attribuire il significato fisico di cui si è fatto cenno: applicando l'operatore di Sturm-Liouville L alla funzione di Green $G(t,\tau)$, ciò che si ottiene è $\delta(t-\tau)$; riprendendo in mano le precedenti espressioni, questo coincide con dire che:

$$K\delta(t-\tau) = \int_a^b G(t,\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

in altre parole, la funzione di Green, $G(t,\tau)$, è la **risposta all'impulso** dell'equazione differenziale[4]. In Fisica, la soluzione omogenea di un'equazione differenziale è associata alla risposta libera del sistema, mentre la soluzione particolare è relativa alla forzante che si assegna all'equazione differenziale: la forzante è il termine noto usualmente posto a membro destro, finora chiamato $g(t)$, in questa trattazione; la soluzione particolare è dunque la risposta del sistema descritto mediante l'equazione differenziale a un'eccitazione $g(t)$; in questo specifico caso, si ha che:

$$g(t) = \delta(t-\tau)$$

di conseguenza, tutto ciò non è altro che studiare la risposta del sistema, ossia la soluzione dell'equazione differenziale, data un'eccitazione *a impulso*.

Una volta discusso questo punto cruciale, si vuole lavorare sull'equazione appena proposta, al fine di motivarne la validità. È noto che l'equazione non omogenea (6) si può scrivere sinteticamente:

$$Lx(t) = g(t) \tag{15}$$

$$LG(t,\tau) = \delta(t-\tau) \tag{16}$$

A questo punto, si effettui la seguente operazione: si moltiplichi la (15) per $G(t,\tau)$, e la (16) per $x(t)$; quindi:

$$G(Lx) - x(LG) = g(t)G(t,\tau) - \delta(t-\tau)x(t)$$

si integri nell'intervallo $[a,b]$ questa equazione:

$$\int_a^b \left[G(t,\tau)(Lx(t)) - x(t)(LG(t,\tau))\right] \mathrm{d}t = \int_a^b \left[g(t)G(t,\tau) - \delta(t-\tau)x(t)\right] \mathrm{d}t$$

per quanto riguarda il membro destro, si può scrivere immediatamente, sfruttando la *sifting property* della delta di Dirac:

$$\int_a^b \left[g(t)G(t,\tau) - \delta(t-\tau)x(t)\right] \mathrm{d}t = \int_a^b x(t)G(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau - y(\tau)$$

Per quanto riguarda invece l'integrale a primo membro, è possibile prendere due strade (equivalenti): una, è riconoscere che si può applicare la terza identità di Green e arrivare direttamente al passaggio finale; qui, invece di fare ciò, si utilizza un'integrazione per parti, in maniera tale da raggiungere lo stesso obiettivo. Prima di tutto, si scrive esplicitamente $G(Lx)$:

$$\begin{aligned} G(t,\tau)(Lx(t)) &= G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right) + G(t,\tau)p(t)x(t) + \\ &\quad - \left[x(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right) + G(t,\tau)p(t)x(t)\right] = \\ &= G(t,\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right) - y(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

[4]ossia, l'antitrasformata di Fourier/Laplace della funzione di trasferimento del sistema descritto mediante l'equazione differenziale

si integri questo, ottenendo:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b G(t,\tau)\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t - \int_a^b x(t)\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right)\mathrm{d}t = \\
&= \left\{p(t)\left[G(t,\tau)\frac{\partial x(t)}{\partial t} - x(t)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right]\right\}_a^b + \\
&- \int_a^b \frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}p(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \int_a^b \frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}p(t)\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \left\{p(t)\left[G(t,\tau)\frac{\partial x(t)}{\partial t} - x(t)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right]\right\}_a^b
\end{aligned}$$

Mettendo insieme i due membri, si ottiene:

$$x(\tau) = \int_a^b g(t)G(t,\tau)\,\mathrm{d}t - \left\{p(t)\left[x(t)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t} - G(t,\tau)\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right]\right\}_a^b$$

A questo punto, si supponga che $x(a) = x(b) = 0$; in questo caso, dunque, $G(a,\tau) = G(b,\tau) = 0$, e dunque si ottiene:

$$x(\tau) = \int_a^b g(t)G(t,\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

questa, scambiando le variabili t e τ, diventa (ricordando che la funzione di Green è sempre simmetrica):

$$x(t) = \int_a^b g(\tau)G(t,\tau)\,\mathrm{d}t$$

Invece, se le condizioni al contorno non fossero omogenee, si avrebbe qualcosa di diverso, che verrà ora discusso. Si ha, effettuando la sostituzione $t \leftrightarrow \tau$:

$$y(t) = \int_a^b g(\tau)G(t,\tau)\,\mathrm{d}t - \left\{p(\tau)\left[x(\tau)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial \tau} - G(t,\tau)\frac{\partial x(\tau)}{\partial \tau}\right]\right\}_a^b$$

Si ipotizzi $x(a) = \alpha$, $x'(b) = \beta$ (per esempio), dunque $G(a,\tau) = 0$, $G'(b,\tau) = 0$. Si ottiene, in questo caso:

$$\begin{aligned}
\left[p(\tau)(x(\tau)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial \tau} - G(t,\tau)x'(\tau)\right]_a^b &= \left[p(b)(x(b)\frac{\partial G(t,b)}{\partial \tau} - G(t,b)x'(b)\right] + \\
&- \left[p(a)(x(a)\frac{\partial G(t,a)}{\partial \tau} - G(t,a)x'(a))\right] = \\
&= -\beta p(b)G(t,b) - \alpha p(a)\frac{\partial G(t,a)}{\partial \tau}
\end{aligned}$$

da cui:

$$x(t) = \int_a^b g(\tau)G(t,\tau)\,\mathrm{d}t + \beta p(b)G(t,b) + \alpha p(a)\frac{\partial G(t,a)}{\partial \tau}$$

Tutto ciò ha perfettamente senso, e questo è possibile dal momento che è stata introdotta la δ di Dirac nell'equazione differenziale.

4.3.1 Verifica a posteriori della validità dell'equazione differenziale

Per validare l'equazione differenziale, si vuole ora vedere che l'introduzione della delta di Dirac a membro destro permette di tenere in conto il fatto che la funzione di Green, $G(t, \tau)$, ha una discontinuità della derivata di tipo "salto", per $t = \tau$. Per vedere ciò, si consideri l'equazione (13), qui riportata:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right) + q(t)G(t,\tau) = \delta(t-\tau)$$

Si integri questa equazione in $t \in [\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon]$, per poi considerare il caso $\varepsilon \to 0$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(p(t)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t} + q(t)G(t,\tau)\right)\right] \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} \delta(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

dal momento che $q(t) \in \mathrm{C}([a,b])$, e che $G(t,\tau) \in \mathrm{C}([a,b] \times [a,b])$, il termine qG dà contributo nullo all'integrale, dal momento che si integra in un intervallo infinitesimo dove, per continuità, ha variazione circa nulla; rimane:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[p(t)\frac{\partial G(t,\tau)}{\partial t}\right]_{\tau-\varepsilon}^{\tau+\varepsilon} = 1$$

Questo è esattamente la discontinuità tipo salto presente nella funzione di Green, motivando quando si era detto precedentemente.

4.4 Esempio di calcolo della funzione di Green: equazione dei telegrafisti

Si vuole a questo punto proporre un esempio di calcolo della funzione di Green, a partire da un'equazione semplice ma molto spesso frequente nella Fisica o nell'Ingegneria. Si consideri il seguente problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 V(z)}{\mathrm{d}z^2} + k_z^2 V(z) = f(z) \\ V(0) = 0 \\ V(1) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

dove k_z si considera noto.

Questa equazione venne introdotta da Lord Kelvin nel 1853, e deriva dalle **equazioni dei telegrafisti**: questa equazione permette di studiare la propagazione lungo una direzione z della tensione su di un cavo, in situazioni in cui è necessario tenere conto degli effetti distribuiti di questo; questa equazione è stata poi validata nel decennio del 1880 dal modello di Heaviside del calcolo simbolico.

Un'equazione di questo genere si può ottenere anche nell'ambito dei problemi di trasporto di neutroni, quando si ha dipendenza dal tempo (passando poi alla trasformata di Fourier temporale); alternativamente, questa è un'equazione d'onda unidimensionale, oppure ancora l'equazione dell'oscillatore armonico (a seconda di come si interpreta fisicamente la funzione $V(z)$).

Come già discusso, la funzione di Green serve per fornire una soluzione di un'equazione differenziale non omogenea, rappresentandola a partire da soluzioni omogenee. $f(z)$ è il termine non omogeneo, e può essere fondamentalmente qualsiasi funzione a quadrato integrabile (in $L^2(0,1)$); un esempio potrebbe essere quello di usare come $f(z)$ una δ di Dirac, posizionata in uno (o in entrambi) gli estremi, in maniera tale da imporre un valore specifico di tensione a un capo della linea[5].

Aldilà di queste elucubrazioni fisiche, si vuole proporre un esempio di calcolo della funzione di Green per questa equazione differenziale, ottenuta imponendo man mano le proprietà matematiche precedentemente discusse e dimostrate.

4.4.1 Soluzioni omogenee del problema

Il primo passo consiste nel ricavare la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata a (17); in questo caso la soluzione è ben nota, dal momento che è una combinazione lineare di seni e coseni; la soluzione omogenea $V_\mathrm{h}(z)$ (dove h sta per *homogeneous*) è:

$$V_\mathrm{h}(z) = c_1 \sin(k_z z) + c_2 \cos(k_z z)$$

Dalla teoria precedentemente discussa, applicando il metodo di variazione delle costanti di Lagrange, si può dunque scrivere che la soluzione del problema non omogeneo è:

$$V(z) = c_1(\zeta) \sin(k_z z) + c_2(\zeta) \cos(k_z z)$$

4.4.2 Soddisfacimento delle condizioni al contorno

Per *dare la forma giusta* alla nostra funzione di Green, è ora necessario garantire che essa soddisfi le condizioni al contorno; per fare ciò, è necessario considerare separatamente i due sottodomini: per ciascun sottodominio si impone solo una delle due condizioni al contorno, dal momento che poi sarà necessario avere i gradi di libertà rimanenti per *raccordare*. Si osservi inoltre che c_1 e c_2 sono diverse nei due sottodomini, dal momento che, fino a questo punto, si stanno risolvendo separatamente due problemi, che verranno poi per l'appunto raccordati nelle sezioni precedenti.

$$\begin{cases} G(0,\zeta) = 0, & 0 \leq z \leq \zeta \\ G(1,\zeta) = 0, & \zeta \leq z \leq 1 \end{cases}$$

quindi, ci si focalizza nei due sottocasi.

- Per quanto riguarda il primo sottodominio, ossia $0 \leq z \leq \zeta$, che significa $\zeta \geq z$, si ha:

$$G(0,\zeta) = \left[c_1^{(1)}(\zeta) \sin(k_z z) + c_2^{(1)}(\zeta) \cos(k_z z) \right] \Big|_{z=0} = c_2^{(1)}(\zeta) \cos(k_z z) = 0$$

[5]questo è un approccio alternativo all'imposizione di una condizione al contorno non omogenea: imporre una condizione omogenea ai bordi, e definire il valore della tensione mediante un'introduzione di una (o più) delta di Dirac agli estremi del dominio

da cui, in questo sottodominio, si può scrivere che:

$$G(z,\zeta) = c_1^{(l)}(\zeta)\sin(k_z z)$$

- Per quanto riguarda il secondo sottodominio, si avrà:

  $$G(1,\zeta) = \left[c_1^{(r)}(\zeta)\sin(k_z z) + c_2^{(r)}(\zeta)\cos(k_z z)\right]\Big|_{z=1} = 0$$

  questa condizione si traduce in un legame tra c_2 e c_1 del tipo:

  $$c_2^{(r)}(\zeta) = -c_1^{(r)}(\zeta)\tan(k_z)$$

  da qui si può ottenere:

  $$\begin{aligned} G(z,\zeta) &= c_1^{(r)}(\zeta)\sin(k_z z) - c_1^{(r)}(\zeta)\tan(k_z)\cos(k_z z) = \\ &= \frac{c_1^{(r)}(\zeta)}{\cos(k_z)}\left[\sin(k_z z)\cos(k_z) - \sin(k_z)\cos(k_z z)\right] = \\ &= -\frac{c_1^{(r)}(\zeta)}{\cos(k_z)}\sin[k_z(1-z)] = \\ &= d_1^{(r)}(\zeta)\sin[k_z(1-z)] \end{aligned}$$

  la costante è arbitraria, di conseguenza le si è attribuito un nome $d_1^{(r)}(\zeta)$; per arrivare a ciò, sono stati usati alcuni passaggi utilizzanti la trigonometria (formule di addizione del seno).

Nella sottosezione successiva si sintetizzerà quanto ottenuto fino a questo punto.

4.4.3 Proprietà di simmetria (e conseguente continuità)

Al punto precedente, è stato ottenuto quanto segue:

$$G(z,\zeta) = \begin{cases} c_1^{(l)}(\zeta)\sin(k_z z), & 0 \le z \le \zeta \\ d_1^{(r)}(\zeta)\sin[k_z(1-z)], & \zeta \le z \le 1 \end{cases}$$

A questo punto, $c_1^{(l)}(\zeta)$ e $d_1^{(r)}(\zeta)$ costituiscono due gradi di libertà; è necessario spendere uno di questi al fine di imporre la condizione di simmetria in $G(z,\zeta)$, ossia imporre:

$$G(z,\zeta) = G(\zeta,z)$$

Per procedere a questo punto, si devono **scegliere** c_1 e d_1 in modo tale da imporre alla simmetria, osservando l'attuale funzione di Green e simmetrizzandola. Si può vedere *a occhio* che la scelta opportuna è:

$$\begin{aligned} c_1^{(l)}(\zeta) &= C\sin[k_z(1-\zeta)] \\ d_1^{(r)}(\zeta) &= C\sin(k_z\zeta) \end{aligned}$$

dove C è un grado di libertà ancora non sfruttato. Sostituendo queste espressioni, si è ottenuto:

$$G(z,\zeta) = \begin{cases} C\sin[k_z(1-\zeta)]\sin(k_z z), & 0 \le z \le \zeta \\ C\sin(k_z\zeta)\sin[k_z(1-z)], & \zeta \le z \le 1 \end{cases}$$

Ora, questa è evidentemente simmetrica: scambiando ζ e z, si ottiene la stessa funzione. Inoltre, è possibile notare che, per $z = \zeta$, con questa scelta, la funzione risulta essere in questo caso anche continua. Ora, la soluzione è stata *raccordata*.

4.4.4 Discontinuità della derivata

Dalla teoria, rimane solo più una proprietà da imporre: per $z = \zeta$, la funzione di Green presenta una discontinuità della derivata, di tipo **salto**; dunque:

$$\left.\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z}\right|_{z\to\zeta^+} - \left.\frac{\partial G(z,\zeta)}{\partial z}\right|_{z\to\zeta^-} = \frac{1}{p(\zeta)}$$

si osservi che $p(z) = 1, \forall z$. A questo punto, per ricavare C, è possibile calcolare esplicitamente il termine appena scritto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{p(\zeta)} = 1 = &\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[C\sin[k_z(1-z)]\sin(k_z\zeta)\right]\right\}_{z=\zeta} - \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[C\sin[k_z(1-\zeta)]\sin(k_z z)\right]\right\}_{z=\zeta} = \\ &= -k_z C\cos[k_z(1-\zeta)]\sin(k_z\zeta) - Ck_z\sin[k_z(1-\zeta)]\cos(k_z\zeta) = \\ &= -k_z C\sin[k_z(1-\zeta+\zeta)] = -k_z C\sin(k_z)\end{aligned}$$

Di conseguenza, per imporre che la discontinuità abbia un salto pari a $\frac{1}{p(\zeta)} = 1$, si ha:

$$C = -\frac{1}{k_z\sin(k_z)}$$

A questo punto, l'esercizio è terminato; infatti, è stata ricavata l'espressione esplicita della funzione di Green:

$$G(z,\zeta) = \begin{cases} -\frac{\sin[k_z(1-\zeta)]\sin(k_z z)}{k_z\sin(k_z)}, & 0 \le z \le \zeta \\ -\frac{\sin(k_z\zeta)\sin[k_z(1-z)]}{k_z\sin(k_z)}, & \zeta \le z \le 1 \end{cases}$$

4.4.5 Osservazione finale

La funzione di Green per l'equazione (17) è stata ricavata utilizzando un metodo intuitivo, che ha permesso di enfatizzare il ruolo di ciascuna proprietà generale delle funzioni di Green nel calcolo della medesima. Tuttavia, è possibile svolgere più *rapidamente* questo calcolo: riconoscendo immediatamente come soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea

$$u(z) = \sin(k_z z) \quad v(z) = \sin[k_z(1-z)]$$

dove $u(0) = 0, v(1) = 0$, allora è possibile calcolare esplicitamente:

$$C = \frac{1}{p(z)W(z)}$$

dove:

$$\begin{aligned} W(z) &= u(z)v'(z) - u'(z)v(z) = \\ &= -k_z \sin(k_z z) \cos[k_z(1-z)] - k_z \cos(k_z z) \sin[k_z(1-z)] = \\ &= -k_z \sin(k_z) \end{aligned}$$

ottenendo lo stesso risultato, senza cercare di imporre esplicitamente il valore della costante C, ma solamente richiedendo la simmetria dell'equazione.

4.5 Rappresentazione per serie della funzione di Green

Non sempre calcolare in maniera esplicita la funzione di Green di un problema di Sturm-Liouville è banale. È tuttavia possibile rappresentare la funzione di Green in un modo diverso, facendo uso del concetto di espansione in serie di autofunzioni. Considerando il (1),

$$L\,\phi_n(t) = -\lambda_n \rho(t)\phi_n(t)$$

dove $\phi_n(t)$ è l'autofunzione relativa a λ.

Fatta questa premessa, si consideri ora il problema non omogeneo

$$Lx(t) = g(t)$$

quindi, si espanda $x(t)$ mediante una serie di autofunzioni:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(t)$$

semplicemente, questo significa rappresentare $x(t)$, mediante una combinazione delle autofunzioni $\phi_n(t)$, pesando ciascuna funzione con i coefficienti $(a_n)_n$. Quindi, si sostituisca ciò:

$$Lx(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(L\phi_n(t)) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \rho(t)\phi_n(t) = g(t)$$

Ossia, l'applicazione dell'operatore su ogni autofunzione si può considerare come fatto, quindi ottenere la serie di Fourier generalizzata

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho(t)\phi_n(t)$$

dove:

$$c_n = -\lambda_n a_n$$

A questo punto, si moltiplichi per $\phi_k(t)$ e si integri in $t \in [a,b]$, ottenendo (si considera direttamente il passaggio dell'integrale sotto al segno di limite):

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \int_a^b \phi_n(t)\rho(t)\phi_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\phi_k(t)\,\mathrm{d}t$$

Per quanto riguarda il membro destro:

$$\int_a^b g(t)\phi_k(t)\,\mathrm{d}t = (g(t)|\phi_k(t))$$

Si osservi a questo punto che:

$$\int_a^b \phi_n(t)\rho(t)\phi_k(t)\,\mathrm{d}t = (\sqrt{\rho(t)}\phi_n(t)|\sqrt{\rho(t)}\phi_k(t)) = N_k\delta_{nk}$$

dove per δ_{nk} si intende il **simbolo di Kronecker**:

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}$$

A questo punto, si osservi che:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \int_a^b \phi_n(t)\rho(t)\phi_k(t)\,\mathrm{d}t = N_n\lambda_n a_n$$

Cosa significa ciò: la sommatoria si riduce a un singolo numero, dal momento che, per $n \neq k$, il simbolo di Kronecker vale 0; questo significa che da n sommatorie si ricavano n equazioni, nella forma:

$$-N_n\lambda_n a_n = (g(t)|\phi_k(t))$$

L'obiettivo è determinare i coefficienti dell'espansione: N_n è una costante nota in seguito all'integrazione delle autofunzioni tra loro, λ_n è l'autovalore del problema e lo si suppone noto, mentre il membro destro è un integrale di termini noti:

$$a_n = -\frac{(g(t)|\phi_k(t))}{N_n\lambda_n}$$

Questa è la cosiddetta **espansione modale**: una volta risolto il problema agli autovalori associato all'equazione di Sturm-Liouville, si ha, *automaticamente*, anche la funzione di Green di questo: mediante integrazione (che può essere condotta analiticamente o numericamente), è possibile ricavare come appena visto i coefficienti a_n dell'espansione modale, ossia dell'espansione in serie di autofunzioni, ricavando in maniera alternativa a quella precedentemente mostrata la funzione di Green della struttura. È dunque possibile scrivere:

$$G(t,\tau) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\phi_n(t)\phi_n(\tau)}{\lambda_n N_n}$$

La sostanziale differenza tra questo metodo e quello precedente, sta nel fatto che questo metodo richiede la soluzione del problema agli autovalori, ma non richiede di conoscere le soluzioni esplicite del problema omogeneo; se si conosce l'operatore per mezzo di autovalori e autovettori, ossia per mezzo della sua **diagonalizzazione**, della sua decomposizione, questo metodo è certamente più indicato rispetto al precedente.

4.5.1 Relazione di completezza

Un'osservazione finale che può essere ottenuta mischiando i risultati appena ricavati, è la seguente: si può vedere la δ di Dirac come una sovrapposizione di autofunzioni. Questa è la cosiddetta **relazione di completezza**, del sistema ortonormale scelto (ossia, della base di autovettori). Infatti, dai risultati precedenti:

$$G(t,\tau) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \frac{\phi_n(t)\phi_n(\tau)}{\lambda_n N_n}$$

Ma è anche noto che:

$$LG(t,\tau) = \delta(t-\tau)$$

di conseguenza, sfruttando la linearità dell'operatore L:

$$L\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(t)\phi_n(\tau)}{\lambda_n N_n}\right] = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n N_n} L\left[\phi_n(t)\phi_n(\tau)\right] = \delta(t-\tau)$$

Questo significa che, combinando con una opportuna combinazione lineare (con pesi $(\lambda_n N_n)^{-1}$) le autofunzioni, a cui è stato applicato l'operatore L, è possibile ottenere la $\delta(t-\tau)$; man mano che si considerano più funzioni, l'approssimazione di questa diventerà sempre migliore.

Riferimenti bibliografici

[1] Binmore K. G. , *The Foundations of Analysis: Logic, Sets and Numbers Bk. 1*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[2] Dudley D. G. , *Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory*, Oxford University, Oxford, 1994.

[3] Hanson G. W. , Yakovlev A. B. , *Operator Theory for Electromagnetics - An Introdution*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[4] Stakgold I. , *Green's Functions and Boundary Value Problems*, John Wiley & Sons, 1979.

[5] Young N. , *An introduction to Hilbert space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.