

Analisi dei Segnali

Alberto Tibaldi

19 luglio 2008

Indice

1	Introduzione all'Analisi dei Segnali	4
1.1	Classificazione dei Segnali	6
1.1.1	A Tempo continuo/discreto	6
1.1.2	Deterministici / Stocastici	6
1.1.3	Stazionari / Non-stazionari	7
1.2	Caratterizzazione dei segnali mediante Energia e Potenza	7
1.2.1	Motivazione Elettronica	8
1.2.2	Motivazione geometrica	8
1.2.3	Esempio teorico/pratico	10
1.2.4	Potenza di Segnali Periodici	11
1.3	Note conclusive all'introduzione	12
2	Analisi in Frequenza di Segnali	13
2.1	Introduzione Storica	13
2.2	Spazio dei Segnali	14
2.2.1	Prodotto Scalare	15
2.2.2	Energia	16
2.3	Serie di Fourier	17
2.3.1	Osservazioni qualitative	20
2.3.2	Esempio Pratico	23
3	Trasformata di Fourier	26
3.1	Dalla Serie alla Trasformata di Fourier	26
3.2	Alcune Domande e Relative Risposte	31
3.2.1	Quali segnali sono trasformabili?	31
3.2.2	Qual è il significato fisico delle frequenze negative?	32
3.2.3	Abbiamo più armoniche nella serie o nella trasformata?	33
3.3	Introduzione ai segnali generalizzati: la Delta di Dirac	33
3.3.1	Proprietà della Delta di Dirac	34
3.3.2	Esempio Pratico 1	37
3.3.3	Esempio Pratico 2	37

3.3.4	Esempio Pratico 3	38
3.4	Proprietà della Trasformata di Fourier	38
3.4.1	Proprietà di Linearità	38
3.4.2	Proprietà di Parità	39
3.4.3	Proprietà di Anticipo/Ritardo	40
3.4.4	Proprietà di Modulazione	41
3.4.5	Proprietà dello Scalamento	42
3.4.6	Dimostrazione	43
3.4.7	Proprietà di Derivazione	45
3.4.8	Principio di Indeterminazione della trasformata di Fourier	47
3.4.9	Proprietà del Supporto	51
3.4.10	Proprietà della Variabilità nel Tempo	52
3.4.11	Proprietà di Dualità	54
4	Teoria dei Sistemi	56
4.1	Classificazioni dei Sistemi	57
4.1.1	Sistemi lineari / non lineari	57
4.1.2	Sistemi tempo-varianti / tempo-invarianti	58
4.1.3	Sistemi con memoria / senza memoria	58
4.2	Sistemi Lineari Tempo-Invarianti (LTI)	59
4.3	Prodotto di convoluzione	61
4.4	Filtri ideali	63
4.5	Condizioni per la progettazione di un sistema	64
4.6	Risposta in Frequenza	67
4.7	Interconnessione di sistemi tra loro	69
4.8	Fenomeni di distorsione nei sistemi	73
5	Segnali Periodici	76
6	Funzione di Autocorrelazione	80
6.1	Interpretazione fisica della funzione di autocorrelazione	84
6.1.1	Funzione di mutua correlazione	86
6.2	Spettro di potenza e funzione di autocorrelazione	87
7	Segnali a tempo discreto	89
7.1	Teorema del Campionamento	90
7.2	Trasformata di Fourier Discreta: DFT	96
7.2.1	Criteri per la scelta dei parametri liberi	102

8	Processi Stocastici	105
8.1	Analisi semplificata dei processi stocastici	106
8.1.1	Valore Atteso o Media	107
8.1.2	Varianza dal Valore Atteso	108
8.1.3	Funzione di autocorrelazione	109
8.2	Analisi in frequenza di processi stocastici	111
8.3	Esempio Teorico: Il Rumore Bianco	112
8.3.1	Rumore Bianco Gaussiano	113

Capitolo 1

Introduzione all'Analisi dei Segnali

Lo studio dell'elaborazione dei segnali si può dividere in due grandi branche:

- **Processamento del segnale:** disciplina che studia come modificare le proprietà del segnale tramite un sistema (elettronico, ad esempio) affinché il segnale possa presentare caratteristiche che verifichino un insieme di proprietà. Per esempio, un DSP (Digital Signal Processor) è un dispositivo in grado di processare segnali: un circuito in grado di modificare un segnale digitale (come per esempio una canzone), in modo da stabilirne determinate caratteristiche (come ad esempio, nel caso della canzone, farla sembrar suonata in un club jazz piuttosto che in uno stadio);
- **Analisi del segnale:** è la parte che più ci interesserà: dato un segnale, estrarne delle informazioni, nonostante esso possa presentare caratteristiche a noi ostili (come per esempio rumori di vario genere). Un esempio non elettronico di analisi del segnale, è lo studio di un elettrocardiogramma: leggendo anomalie in esso, è possibile dedurre indirettamente malattie o anomalie al cuore o ad altri organi del corpo umano.

Abbiamo finora parlato di segnali, ma non li abbiamo ancora definiti. In effetti definire un segnale non è compito così facile, come può sembrare; possiamo dire che i seguenti oggetti facciano parte della categoria dei segnali:

- Funzioni unidimensionali (1D, ossia funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), bidimensionali (ossia funzioni 2D, quali immagini ad esempio: l'immagine processing è un'importantissima branca dell'analisi dei segnali), n-dimensionali (ad esempio come i video, che si possono proprio pensare come vettori nD);

- Distribuzioni, ossia funzioni generalizzate: un'estensione del concetto di funzione; la più celebre delle funzioni generalizzate è la Delta di Dirac ($\delta(t)$), ossia una modellizzazione ideale di un segnale di tipo impulsivo; in natura l'idealità non esiste ovviamente, tuttavia un buon modello, con il quale approssimare determinate situazioni.

Si parla in questo ambito di segnali generalizzati (generalized signals), ossia di una classe contenente sia le distribuzioni che le funzioni.

- Processi casuali: segnali dei quali conosciamo il passato, ma non il futuro, o almeno non deterministicamente. Un esempio classico di processo casuale è l'andamento dei titoli di borsa: ne conosciamo l'andamento passato, non quello futuro, e possiamo solo fare assunzioni basandoci su tecniche statistiche e sulla conoscenza del loro passato.

Quando parliamo di studio dei segnali, consideriamo sempre due assunzioni:

1. Quelli che studiamo e chiamiamo segnali $x(t)$ sono funzioni x al variare del tempo t . Si tratta dunque semplicemente di grandezze variabili nel tempo. Un segnale in realtà può dipendere non solo dal tempo, ma da qualsiasi grandezza, anche da altri segnali; per comodità studieremo solo segnali funzione del tempo, ma si sappia che non è detto che sian gli unici tipi di segnali esistenti in natura.
2. Come segnali consideriamo quantità complesse, ossia $x(t)$ si può pensare come:

$$x(t) = |x(t)| e^{j\angle x(t)}$$

Ossia come modulo e fase. Nella realtà si possono solo misurare segnali reali, grandezze reali, ossia o solo il modulo, o solo la fase, separatamente; dal momento che i numeri complessi sono molto semplici da studiare, si utilizza comunque una notazione di questo tipo, anche se non è possibile misurare, nella realtà, nel mondo fisico in cui viviamo, un segnale complesso: studiando prima il solo modulo, e poi la solita fase, è comunque possibile esprimere un segnale mediante la notazione complessa.

Fisicamente, potremmo dunque provare a fornire una definizione di segnale: essa è una grandezza variabile in funzione di un'altra grandezza (come ad esempio il tempo, o lo spazio).

1.1 Classificazione dei Segnali

Esistono molte classificazioni che permettono di distinguere diversi tipi di segnali; introduciamo le principali, eventualmente completandole in seguito, una volta apprese più nozioni.

1.1.1 A Tempo continuo/discreto

Come abbiamo già detto, una grandezza che può far variare un segnale è lo scorrere del tempo; nel nostro mondo fisico, possiamo in buona approssimazione considerare il tempo una grandezza che varia con continuità, tuttavia talvolta potrà tornare utile considerare solo un numero finito e discreto di eventi temporali. Dunque, si classificano in questo modo i segnali, considerando le seguenti definizioni:

- I segnali a tempo continuo sono segnali continui, ossia che variano con continuità nel loro dominio di definizione, che sarà una retta (reale, quindi), dove ciascun punto identifica un istante di tempo;
- I segnali a tempo discreto sono segnali definiti solo in precisi punti dell'asse reale (e nel 99 % dei casi che studieremo, saranno periodici); molto, molto spesso, studieremo segnali il cui dominio è costituito da un insieme di punti a due a due equidistanti, o 'a passo costante': il passo tra un impulso ed un altro sarà detto 'tempo di campionamento' (come vedremo molto meglio in seguito);
- I segnali event-based sono segnali che avvengono ed esistono in un dominio discreto, seguendo però una certa distribuzione statistica.

1.1.2 Deterministici / Stocastici

Vediamo in breve in cosa si differenziano le due classificazioni appena riportate:

- I segnali deterministici sono quelli dei quali conosciamo il passato, il presente, ed il futuro, rispetto all'istante temporale in cui ci troviamo; siamo quindi in grado di determinarne i valori in un qualsiasi istante.

Esempio pratico:

$$x(t) = \cos(\omega t)$$

Altro esempio pratico:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} + \xi\omega \frac{\partial x(t)}{\partial t} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Quest'equazione differenziale (rappresentante un oscillatore armonico), una volta risolta, permette di trovare una sinusoide smorzata esponenzialmente; nonostante la sua difficoltà di calcolo, sarà dunque possibile risolverla e considerarla come deterministica;

- I segnali stocastici sono segnali dei quali possiamo conoscere il passato, ma non il futuro, a meno di previsioni, predizioni, che si possono attuare mediante mezzi statistici, e con un'incertezza. Un esempio pratico potrebbe essere l'andamento dollaro/yen : possiamo supporre, studiando la storia passata, quale potrebbe essere il suo andamento futuro, ma non possiamo saperlo con certezza.

1.1.3 Stazionari / Non-stazionari

Descriviamo un po' più nei dettagli questa classificazione:

- Per segnali stazionari, a livello intuitivo, possiamo dire che si parli di segnali le cui proprietà non variano nel tempo. Ad esempio, un seno è un segnale stazionario, poichè, al variare del tempo, non variano nè l'ampiezza, nè la fase, nè la frequenza (ossia nessuna delle sue caratteristiche principali); esistono anche processi casuali stazionari: un esempio è il rumore bianco;
- Segnali non-stazionari: si tratta di segnali le cui proprietà variano nel tempo (per esempio, lo scatto di un orologio atomico rispetto ad uno ancora più preciso, si può considerare non-stazionario): un esempio di processi non-stazionari che noi analizzeremo sono le cosiddette 'passeggiate casuali'; altro esempio è la voce umana: la sua frequenza continua a variare nel tempo, come anche la sua intensità; per questo motivo, si può considerare come un segnale non-stazionario.

1.2 Caratterizzazione dei segnali mediante Energia e Potenza

Una classificazione fondamentale per quanto riguarda l'analisi dei segnali si basa sulla definizione delle grandezze di energia e di potenza; questa classificazione è la più utilizzata sia in ambito di analisi classica dei segnali sia

in ambito di materie più applicative quali le telecomunicazioni, quindi merita di essere trattata separatamente. Si tratta di una classificazione di tipo matematico, molto più formale rispetto alle precedenti, che ora cercheremo di presentare in modo intuitivo, dopo una premessa.

Cosa si intende per energia di un segnale? Vediamo una definizione:

$$\varepsilon_x \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Si tratta dunque semplicemente dell'integrale sulla retta reale del modulo quadro del segnale, della quantità complessa.

Così facendo, dato un segnale, geometricamente possiamo pensare di ribaltare le parti negative, mediante il quadrato, e calcolarne l'area.

Perché la chiamiamo energia? Cerchiamo di fornirne alcune motivazioni, intuitive, che ci permettano di ricondurci ad esempi legati alla fisica.

1.2.1 Motivazione Elettronica

Supponiamo di avere un forno, e di dover cuocere per esempio una pizza. Un forno si può di fatto modellizzare mediante un resistore, collegato ad un generatore di tensione:

La potenza dissipata sarà, come sappiamo dall'Elettrotecnica:

$$P = \frac{v^2(t)}{R}$$

Se noi sommiamo in questo modo tutti i contributi di questa potenza nel tempo, supponendo ad esempio di dover cuocere per 10 minuti la nostra pizza, faremo:

$$\int_0^{12'} p(t)dt = \frac{1}{R} \int_0^{12'} v^2(t)dt \simeq \varepsilon_v$$

Ossia, abbiamo ottenuto l'energia dissipata dal forno per cuocere la pizza.

1.2.2 Motivazione geometrica

Consideriamo un semplice problema di geometria; dati due vettori:

$$\vec{x} = (x_1; x_2)$$

$$\vec{y} = (y_1; y_2)$$

Vogliamo calcolare la distanza tra i due vettori.

Come possiamo risolvere questo problema? Consideriamo il vettore differenza \vec{z} come:

$$\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$$

Di questo vettore vogliamo calcolare solo la norma, la distanza:

$$\|\vec{z}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

Questo, utilizzando il semplice teorema di Pitagora. Pitagora ai suoi tempi vedeva solo tre dimensioni (in questo caso ne abbiamo utilizzate solo 2), ma non pensò che il tuo teorema potesse essere valido per spazi vettoriali di dimensione qualsiasi, per esempio di dimensione n ; quella che nasce dunque è la norma, che tra poco definiremo: dati $\vec{x} = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, $\vec{y} = (y_1; y_2; \dots; y_n)$, il vettore differenza \vec{z} sarà:

$$\vec{z} = \vec{x} - \vec{y}$$

Il modulo di \vec{z} sarà la norma della differenza, ossia:

$$\|\vec{z}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Abbiamo però finora parlato ancora di casi finiti e discreti, senza far cenni ai segnali continui, che sono quelli che ci interesseranno per la maggior parte della trattazione! Ciò che abbiamo detto è sinora intuitivo e utile in quanto i segnali si comportano sostanzialmente in maniera simile a ciò che stiamo facendo.

Consideriamo un segnale di questo tipo:

Dividiamo il segnale in diversi intervalli di tempo ΔT : abbiamo quindi a che fare con un vettore in cui ogni k -esimo elemento si ha il valore $x(k\Delta T)$, in cui $k \in \mathbb{Z}$; questo vettore e le sue caratteristiche saranno sempre e comunque studiabili mediante il solito nostro teorema di Pitagora generalizzato; dati i due segnali:

$$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\varepsilon_{x-y}}$$

Abbiamo così definito un concetto di similitudine tra segnali, basandoci sul concetto di energia.

Nel mondo fisico in cui studiamo, esistono solo segnali 'a energia finita', ossia segnali in cui:

$$\varepsilon_x < +\infty$$

Spesso in elettronica capita tuttavia di trattare segnali sinusoidali, ossia segnali non a energia finita: prendendo ad esempio il nostro solito coseno:

$$x(t) = \cos(\omega t)$$

Se ne facciamo il quadrato e calcoliamo l'integrale sulla retta reale, il tutto tenderà a divergere verso $+\infty$.

Per casi come questo, si introduce una nuova definizione, ossia quella di potenza media (o potenza), come:

$$p_x \triangleq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

Un altro modo di interpretare ciò è il seguente:

$$p_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt$$

Dove $x_T(t)$ è definito come:

$$x_T(t) \triangleq x(t)p_T(t)$$

Dove $p_T(t)$ è il segnale porta rettangolare centrato in $t = 0$ di ampiezza T .

Possiamo notare che:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon_{x_T}}{T}$$

Da qua il nome 'potenza media': si può pensare alla potenza proprio come ad un'energia mediata nel tempo, dal $\frac{1}{T}$: questo termine schiaccia la funzione, estendendo il numero di segnali rientranti in essa rispetto a quelli ad energia finita (come si può immaginare, conoscendo il teorema della media integrale).

1.2.3 Esempio teorico/pratico

Consideriamo un segnale a porta $x(t) = Ap_{T_0}(t)$:

L'energia ε_x del segnale si può pensare come una 'base per altezza', dove l'altezza sarà il quadrato di A , A^2 , e la base il dominio della funzione, ossia T_0 :

$$\varepsilon_x = A^2 T_0$$

La potenza, invece, sarà:

$$p_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \cdot A^2 T_0 = 0$$

Questo esempio pratico, ci insegna in realtà una cosa molto interessante:

- Un segnale a energia finita, ha potenza nulla;
- Un segnale a potenza finita e non nulla, ha energia infinita;

1.2.4 Potenza di Segnali Periodici

Come abbiamo accennato, un segnale periodico ha energia infinita; possiamo dire tuttavia che essi abbiano potenza finita, e anche semplice da quantificare! Nella fattispecie, si può dimostrare che la potenza di un segnale periodico di periodo T_0 valga:

$$p_x = \frac{\varepsilon_{xT}}{T_0}$$

Ossia l'energia del segnale valutata solo in un suo periodo T , normalizzata per il periodo T . Dimostriamolo!

Dimostrazione

Consideriamo la definizione di potenza e di energia:

$$\varepsilon_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$p_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Osserviamo che, se il segnale è periodico, il periodo T_0 è costante, ma possiamo pensare che, andando ad ∞ , si continuano ad aumentare i periodi che consideriamo; possiamo dunque dire che $T = NT_0$, dove T_0 è il periodo del segnale periodico, e T il periodo-variabile che si utilizza per mediare la funzione di energia. Vediamo dunque sotto questo punto di vista le espressioni:

$$\varepsilon_x = \lim_{N \rightarrow +\infty} = N \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x_{T_0}(t)|^2 dt$$

$$p_x = \lim_{N \rightarrow +\infty} = \frac{1}{NT_0} \cdot N \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x_{T_0}(t)|^2 dt$$

Poichè anzichè var tendere il periodo-variabile T ad infinito facciamo tendere N , ossia il numero di volte per cui moltiplichiamo il periodo-base T_0 , il limite convergerà al risultato desiderato; stessa cosa per quanto riguarda la scomposizione degli estremi dell'integrale: si ottiene dunque, sfruttando la periodicità di T_0 , il risultato desiderato:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N}{NT_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} |x_{T_0}(t)|^2 dt = \frac{\varepsilon_{xT}}{T_0}$$

1.3 Note conclusive all'introduzione

Abbiamo introdotto alcune definizioni in grado di permetterci di classificare diversi tipi di segnali; la più interessante, senza dubbio, è l'ultima, ossia quella sfruttante le definizioni di energia e potenza media. Esistono segnali a potenza media infinita, come ad esempio il tanto famigerato rumore bianco, del quale parleremo meglio in seguito.

Ciò che vedremo durante la trattazione è che l'analisi dei segnali viene effettuata utilizzando metodi trasformativi: i segnali sono come dei contenitori, all'interno dei quali vi è racchiusa un'informazione che potrebbe servirci per diversi scopi (dei quali non ci interesseremo); mediante alcuni operatori, alcune trasformate, sarà possibile osservare i segnali come attraverso delle lenti, che permetteranno di guardare, sotto altri punti di vista, il segnale.

Le più note trasformate sono le seguenti:

- Trasformata di Fourier
- Trasformata di Laplace
- Trasformata di Hilbert
- Trasformata Z
- Trasformate Wavelet
- Trasformate Tempo-Frequenza (classe di Cohen)

In questa trattazione ci occuperemo solo ed esclusivamente della trasformata di Fourier, della quale il tempo-frequenza rappresenta una naturale estensione.

Capitolo 2

Analisi in Frequenza di Segnali

Il tipo di analisi più utilizzato e più importante per quanto riguarda i segnali è l'analisi in frequenza. Anche se non ce ne rendiamo conto, siamo circondati da analisi di questo tipo: consideriamo ad esempio l'equalizzatore grafico di un media player, di un programma per ascoltare musica (ad esempio in Mp3); sulle ascisse abbiamo una certa frequenza, tipicamente espressa in kHz, sulle ordinate le ampiezze delle frequenze, ossia quanto una particolare frequenza sia esaltata nel suono che ascoltiamo. Tra breve, capiremo meglio cosa significa tutto ciò, e che senso abbia l'analisi in frequenza.

2.1 Introduzione Storica

Prima di tutto, una breve introduzione storica, che ci permetterà di comprendere da dove derivano, come sono nate, le tecniche di analisi in frequenza che stiamo per trattare.

L'analisi in frequenza trova le sue radici nel 1800, in un contesto molto diverso da quello che possiamo immaginare studiando questa materia: verso gli inizi del 1800 era in pieno corso la rivoluzione industriale, alla cui base vi erano macchine sfruttanti principi della termodinamica, ai tempi poco noti. Il matematico francese Jean-Baptiste Joseph Fourier propose, nel 1807, uno studio assolutamente rivoluzionario per l'epoca: Fourier, studiando la propagazione del calore, partendo da un anello metallico per metà incandescente e per metà a temperatura ambiente, si accorse che il raffreddamento, ossia la propagazione del calore dell'anello, non avveniva in modo uniforme, bensì in modo armonico: zone calde e zone fredde si alternavano sull'anello, avendo così una configurazione in un certo modo 'armonica'. Fourier dunque trovò, al variare dell'angolo θ col quale si 'tagliava' l'anello, una funzione $x(\theta)$, tale per cui:

$$\begin{cases} x(\theta) = 1 \leftarrow \text{caldo} \\ x(\theta) = 0 \leftarrow \text{freddo} \end{cases}$$

L'armonicità delle funzioni suggerì al matematico che di fatto si sarebbero potuti interpretare i segnali termici come combinazioni lineari di sinusoidi e dunque, a partire dallo studio di queste funzioni della propagazione del calore, elaborò lo studio di uno sviluppo in serie di queste funzioni, come somma di infiniti seni e coseni: la Serie di Fourier.

Fourier propose questo lavoro ad una commissione di tre matematici francesi tra i più grandiosi dell'epoca: Joseph-Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, Adrien-Marie Legendre. Essi bocciarono questo lavoro, probabilmente poichè esso risultava essere troppo innovativo: la serie di Fourier infatti era in grado di rappresentare, garantendo a seconda del tipo di norma mediante alcune condizioni sulla funzione, la convergenza (soprattutto enorme era la classe di funzioni convergenti in norma quadratica, ossia quella di cui ci interesseremo; neanche troppo pretenziose le ipotesi per un'eventuale convergenza in norma ∞ , ossia convergenza del sup) ad una somma di infinite funzioni sinusoidali.

La cosa assurda è che questa serie dunque poteva addirittura convergere in funzioni discontinue a tratti (come l'onda quadra, definita da Fourier precedentemente per quanto riguarda la caratterizzazione di zone calde e zone fredde), cosa ai tempi assurda (nel 1807, infatti, l'unico sviluppo in serie noto era quello di Taylor): si sarebbe dunque riusciti a rappresentare funzioni discontinue, mediante una somma di funzioni di classe $C^{(\infty)}$.

Nonostante la bocciatura Fourier nel 1812 vinse, sempre all'Ecole Normale Supérieure, con lo stesso scritto, un concorso di pubblicazione. Lo scritto tuttavia, in quanto privo di formalismo secondo la giuria, non venne nuovamente pubblicato.

Solo nel 1821 Fourier (divenuto uno dei capi dell'Ecole Normale) pubblicò la sua opera definitiva: la *Theorie Analytique de la Chaleur* (Teoria analitica del calore), nella quale formalizzava la Serie di Fourier, ed altri studi ancora più innovativi (che vedremo tra breve).

2.2 Spazio dei Segnali

Terminata l'introduzione storica, presentiamo il formalismo sul quale si possono introdurre le basi matematiche dell'analisi in frequenza dei segnali: lo spazio dei segnali.

Si tratta di una sorta di caratterizzazione vettoriale dei segnali, come interpretati mediante idee geometriche, utilizzando concetti della geometria

analitica e dell'algebra lineare. Ciò che di fatto faremo, dunque, è ricostruire i segnali in una rappresentazione sostanzialmente vettoriale. Per ipotesi considereremo di aver a che fare con segnali ad energia finita, esistenti su di un supporto limitato.

Dato un segnale $\eta(t)$, si definisce il suo sviluppo su di una base ortonormale, $\hat{\psi}_j(t)$, dove j è un intero che varia da 1 a n , come:

$$\eta(t) = \sum_{j=1}^N a_j \hat{\psi}_j(t)$$

Quello che si fa, cercando di riprendere concetti noti dal corso di geometria, è cercare di considerare $\eta(t)$ come scomposto in diversi $\hat{\psi}_j(t)$, che saranno gli elementi della base (ortonormale), ossia elementi in grado di generare, pur essendo linearmente indipendenti, la funzione (segnale) $\eta(t)$.

Parliamo di basi ortonormali, ma cosa significa ortonormale? Semplice: dati i vettori $\hat{\psi}_j(t)$, essi sono ortonormali se:

$$\langle \hat{\psi}_i(t) | \hat{\psi}_j(t) \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

La cosa veramente interessante di questa rappresentazione è la seguente: data una base ortonormale completa, è possibile considerare il segnale $\eta(t)$ semplicemente con gli a_j , ossia con i coefficienti scalari per i quali moltiplichiamo i vari elementi della base sommati tra loro, al fine di ottenere la combinazione lineare in grado di rappresentare il segnale in questione:

$$\eta(t) \longrightarrow (a_1; a_2; \dots; a_n)$$

Possiamo quindi non considerare la dipendenza dal tempo, poichè essa è intrinseca alla base ortonormale, escludendo dunque i coefficienti: in questa maniera, possiamo ricondurre i nostri problemi ad un semplice calcolo vettoriale, escludendo la parte continua di tutto. Vedremo che ciò sarà molto utile, parlando di serie di Fourier.

Questo spazio è molto interessante, dal momento che qui si possono facilmente riportare i concetti di base già visti in ambito geometrico, ed in ambito di analisi dei segnali.

2.2.1 Prodotto Scalare

Sappiamo dalla geometria e dall'analisi complessa che il prodotto scalare si può definire come:

$$\langle \eta(t) | \xi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(t) \xi^*(t) dt \longrightarrow \sum_{j=1}^N (a_j \cdot b_j^*)$$

Dove a_j e b_j sono i coefficienti dei vettori di scalari rappresentanti i due segnali.

L'operazione di prodotto scalare, come vedremo, è fondamentale ai fini di determinare una base, come vedremo in seguito, accennando al procedimento di Gram-Schmidt.

2.2.2 Energia

Sappiamo che, dato un segnale $\eta(t)$, la sua energia, ε_η , vale:

$$\varepsilon_\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta(t)|^2 dt$$

Poichè nello spazio dei segnali consideriamo N componenti, gli a_j , dato j intero appartenente a $[1; N]$, possiamo dire che:

$$\varepsilon_\eta = \sum_{j=1}^N |a_j|^2$$

Proviamo a dare a ciò un'interpretazione geometrica: lo spazio dei segnali che stiamo introducendo è di fatto uno spazio vettoriale a N dimensioni; questo calcolo dell'energia rappresenta una sorta di generalizzazione in N dimensioni, come già visto, del teorema di Pitagora, e dunque ε_η rappresenta di fatto la distanza al quadrato rispetto all'origine del vettore degli a_j (avevamo già proposto in precedenza una stessa interpretazione senza ancora proporre nel dettaglio il formalismo dello spazio dei segnali). Questo concetto si può riprendere e generalizzare in una distanza tra due segnali, $\eta(t)$ e $\xi(t)$: la distanza al quadrato tra due vettori dunque si può definire come:

$$d^2 [\eta(t); \xi(t)] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta(t) - \xi(t)|^2 dt$$

Se entrambe le funzioni sono però rappresentabili mediante la stessa base ortonormale, ossia essa è completa rispetto a entrambe le funzioni, allora è possibile discretizzare l'integrale, come:

$$d^2 [\eta(t); \xi(t)] = \sum_{j=1}^N |a_j - b_j|^2$$

Lo spazio dei segnali è uno spazio metrico, poichè è possibile, al suo interno, a partire dalle considerazioni appena effettuate, definire una metrica, ossia un concetto di distanza (come quello appena introdotto). Le condizioni tali per cui deve esistere questa metrica, $d(x; y)$, sono le seguenti:

- La distanza è sempre e comunque un numero non negativo:

$$d(x; y) \geq 0 \forall x, y$$

- La distanza di un punto da se stesso è nulla:

$$d(x; x) = 0$$

- La distanza gode di una proprietà di simmetria: vista dai due punti, la distanza è sempre la stessa:

$$d(x; y) = d(y; x)$$

- Vale la disuguaglianza di Minkowski (o disuguaglianza triangolare):

$$d(x; z) \leq d(x; y) + d(y; z)$$

2.3 Serie di Fourier

Facciamo un gioco, una sorta di prova di ciò che abbiamo imparato leggendo la scorsa sezione. Prendiamo i segnali ortonormali:

$$\hat{\psi}_j(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j \frac{2\pi}{T} nt}$$

Si può dimostrare che i segnali appena presentati possano costituire una base completa per tutti i segnali complessi ad energia finita definiti su di un intervallo $(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2})$, e quindi che possiamo rappresentare un segnale complesso $x(t)$ come:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j \frac{2\pi}{T} nt}$$

I coefficienti c_n si possono calcolare mediante il procedimento di Gram-Schmidt, e quindi utilizzando il prodotto scalare:

$$c_n = \langle x(t) | \hat{\psi}_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \hat{\psi}_j^*(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

Utilizziamo l'uguaglianza di Parseval, dicendo che:

$$\varepsilon_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Lo sviluppare i segnali semplicemente utilizzando la base ortonormale da noi appena introdotta, non è altro che la tanto famigerata serie di Fourier! (piccola nota storica: nel 1807 l'analisi complessa era abbastanza arretrata: proprio in quegli anni, quasi in parallelo, si stavano scoprendo i teoremi interessanti riguardo a questa branca dell'Analisi Matematica; si può supporre che Fourier vi sia arrivato mediante altre vie; questa garantisce comunque un ottimo formalismo, dunque si è scelto di 'passar per di qui').

La serie di Fourier si definisce dunque, prendendo tutto ciò cui siamo finora arrivati, in questo modo:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

Dove i coefficienti μ_n , chiave dello sviluppo in serie, e praticamente unico elemento che ci interesserà (come abbiamo anche precedentemente detto), saranno banalmente:

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{T}} c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

Possiamo dunque supporre, banalmente, utilizzando la teoria dello Spazio dei Segnali, che:

$$\mu_n = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2$$

Come possiamo immaginare, conoscendo la formula di Eulero, un modo più classico di vedere la serie di Fourier è il seguente:

$$\mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = \mu_n \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) \right]$$

Concludiamo un discorso aperto e da lì trascurato al momento di parlare della storia dell'analisi in frequenza: la rappresentabilità dei segnali

in Serie di Fourier. Poniamoci dunque una domanda: quali sono i segnali rappresentabili in serie di Fourier?

La risposta è abbastanza semplice, ma richiede un minimo di riflessione e precisazione: prima di tutto, quello che a noi interessa è avere una convergenza in norma quadratica, ossia solo per quanto riguarda l'energia del segnale. Per ottenere una convergenza di questo tipo, ciò che ci interesserà sarà esclusivamente l'energia del segnale, ma dunque per avere convergenza, sarà sufficiente che il segnale che intendiamo rappresentare mediante la base da noi scelta, quella della serie di Fourier, sia a energia finita! Parlare di energia finita sembra restrittivo, ma se ci pensiamo un attimo al suo interno vi sono segnali assolutamente assurdi e irregolari, quali onde quadre, denti di sega, e funzioni discontinue di qualsiasi genere: l'insieme di convergenza in norma quadratica è infatti \mathcal{L}^2 , ossia l'insieme delle funzioni in modulo quadro integrabili in senso di Lebesgue.

Ciò che abbiamo ottenuto è il fatto che si può avere corrispondenza tra l'esponenziale complesso, e le sinusoidi reali (dividendo in parte reale e parte immaginaria). Noi abbiamo scelto di usare da subito l'esponenziale perchè meglio si adatta al nostro spazio dei segnali, e perchè è facile da usare: se in natura come già detto non esistono segnali complessi, di cui si possono misurare al contempo modulo e fase, questo tipo di presentazione è comunque molto interessante, e conveniente. Una singola sinusoidale, sia essa guardata con il formalismo dei numeri complessi o mediante funzioni reali, è sempre caratterizzata da tre parametri:

- Frequenza
- Ampiezza
- Fase

La forma più comune con cui tratteremo un semplice segnale sinusoidale sarà:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \psi), \omega = 2\pi f$$

Ai fini di avere conti facili, in questa trattazione considereremo sempre, come argomento del seno, una funzione del tempo mediante frequenze f , e non mediante pulsazioni ω ; proponiamo alcuni esempi per procedere, e riportarci alla nostra forma canonica, sulla quale ci baseremo.

Esempio 1

$$x(t) = \cos(t)$$

La forma generica della funzione, come sappiamo, è:

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

Qua, abbiamo che:

$$2\pi f_0 = 1 \implies f_0 = \frac{1}{2\pi} \iff T = \frac{1}{f_0} = 2\pi$$

L'ampiezza inoltre è 1.

Esempio 2

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \psi)$$

Come procediamo qui? Effettuiamo un raccoglimento:

$$x(t) = \cos \left[2\pi f_0 \left(t + \frac{\psi}{2\pi f_0} \right) \right] = \cos \left[2\pi f_0 \left(t + \frac{\psi}{2\pi} T \right) \right]$$

Parliamo di $\alpha = \frac{\psi}{2\pi}$: α è la porzione di angolo giro di cui ci spostiamo sull'asse del tempo. Poichè la frequenza non è 'comprensiva del 2π ', bisogna in questo modo raccogliere, al fine di avere conti semplificati e riportarci alla forma canonica da noi introdotta e che verrà da noi utilizzata. α indica dunque in sostanza di quanto trasliamo la sinusoidale, rispetto al periodo totale, facciamone un esempio:

Se $\psi = \frac{\pi}{2}$, abbiamo che:

$$\alpha = \frac{\psi}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4}$$

2.3.1 Osservazioni qualitative

Abbiamo introdotto già un discreto formalismo, fino a qua, per introdurre le serie di Fourier; ciò che probabilmente è successo facendo ciò, è quello di aver messo troppa carne al fuoco senza aver messo abbastanza legna: tanti concetti, ma che non sono stati spiegati probabilmente in maniera adeguata. Proveremo qua a spiegare, in maniera intuitiva, che senso hanno tutte le cose che abbiamo fino a qua spiegato.

Abbiamo detto che la serie di Fourier sviluppante il segnale $x(t)$ a tempo limitato ha una forma del tipo:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

Dove i coefficienti μ_n si definiscono come:

$$\mu_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

In generale, come possiamo vedere, i μ_n saranno numeri complessi, poiché derivano da un integrale di una funzione complessa; possiamo dunque esprimere mediante notazione esponenziale i μ_n , presentandoli come:

$$\mu_n = |\mu_n| e^{j\angle\mu_n}$$

Proviamo a riscrivere la nostra serie di Fourier, come:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n| e^{j\frac{2\pi}{T}nt + \angle\mu_n}$$

L'argomento della sommatoria è chiamato 'frequenza pura': si tratta di una sinusoidale, o meglio di una singola armonica. Per questo motivo, l'argomento della sommatoria si può pensare come una successione di sinusoidi:

$$w_n(t) = |\mu_n| \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt + \angle\mu_n\right)$$

Ognuna di queste sinusoidi, appartenenti alla successione $w_n(t)$, è un'armonica, è un contributo in frequenza alla costruzione del segnale. In generale, in $w_n(t)$, la frequenza n -esima è:

$$f_n(t) = \frac{n}{T}$$

Ossia è un multiplo di $\frac{1}{T}$, ossia dell'inverso del periodo della prima delle frequenze.

Viene chiamata 'armonica principale' o 'frequenza fondamentale' l'armonica il cui n è 1, e quindi:

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

Si noti che per $n = 0$ si avrebbe $f_0 = 0$, tuttavia spesso diremo che f_0 sarà la frequenza fondamentale, anche se in realtà intenderemo, formalmente parlando, f_1 . Si ha dunque, osservando le equazioni precedenti, che:

$$f_n = nf_0 \iff T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{T}{n}$$

Ora forse possiamo meglio comprendere l'idea geniale di Fourier: al variare di n , decompongo il segnale in una somma di armoniche, ognuna di frequenza $f_n = nf_0$ (multiple di una stessa armonica fondamentale f_0).

Un segnale nel tempo si può dunque interpretare come una somma di segni di diverse frequenze (e quindi di diversi periodi), ciascuna delle quali avrà un'ampiezza (ossia un coefficiente μ_n) diverso. Quanto più l'ampiezza è grande in modulo, tanto più l'armonica cui l'ampiezza è associata è influente nel segnale: il modulo di μ_n , $|\mu_n|$, rappresenta quello che potremmo definire il 'volume dell'armonica'. Ciò che la serie di Fourier permette di fare è dunque osservare lo stesso segnale, classicamente analizzato nel dominio del tempo, ossia considerando tutte le armoniche 'accese' ed i vari contributi tra di loro sommati in un singolo istante di tempo, in un dominio dove il tempo non conta più, perchè si analizza esclusivamente in ogni istante di tempo quanto conta, per l'intero segnale, il valore di una sola di tutte le armoniche.

La serie di Fourier è la lente che permette di passare dal mondo del tempo a quello della frequenza: il segnale di fatto è sempre lo stesso, ma possiamo analizzarlo sotto punti di vista diversi (e con mezzi diversi), e carpirne diverse proprietà.

Dal segnale nel dominio del tempo, possiamo capire come siano ordinate e contenute le varie frequenze nel pezzo che ascoltiamo. Un pezzo basso ad esempio avrà armoniche di ampiezza elevata vicino all'origine, un pezzo acuto al contrario avrà armoniche più elevate lontano dall'origine.

Qual è il ruolo della fase in tutto ciò? Si può pensare alla fase come una sorta di 'attacco', di 'ritardo': le sinusoidi devono sì suonare tutte assieme, ma una potrebbe dover 'suonare' dopo un'altra, essere ritardata quindi, o al contrario anticipata. Solitamente la fase varia da $-\pi$ a $+\pi$.

Cerchiamo di rispiegare il concetto in modo un po' più stravagante: nel 2006-2007 andava di moda un tormentone su Internet, tratto dalla Leva's Polka, pezzo dei Loituma (noto coro Finlandese), che continuava a ripetersi periodicamente come sottofondo di un video a cartoni animati. Il pezzo dunque è a durata finita, e che si ripete periodicamente nel tempo. Possiamo immaginare che questo pezzo venga suonato da un'enorme orchestra formata da infiniti musicisti, ciascuno suonante un'armonica, ciascuno in grado di premere un certo tasto di una tastiera emanante sole armoniche, seguendo lo spartito μ_n , che dirà quanta forza dovrà metterci nel suonare questa nota, quest'armonica. Il suo attacco, il suo punto di partenza nel suonare l'armonica, sarà $\angle\mu_n$. Questo esempio divertente può probabilmente essere utile per

assimilare questo concetto, fondamentale per comprendere il passaggio da dominio del tempo a dominio della frequenza.

2.3.2 Esempio Pratico

Consideriamo il seguente esempio pratico: il calcolo della serie di Fourier di ampiezza A e lunghezza τ :

$$x(t) = Ap_\tau(t)$$

Consideriamo un generico periodo T , chiuso in $[-\frac{T}{2}; +\frac{T}{2}]$, con $T > \tau$; la nostra $x(t)$ avrà questo andamento:

Calcolare la serie di Fourier significa semplicemente calcolare i coefficienti delle armoniche, i μ_n :

$$\mu_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} Ap_\tau(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt =$$

Da qua, usando le tecniche di Analisi I:

$$\begin{aligned} &= \frac{A}{T} \left[\frac{e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}}{-j\frac{2\pi}{T}n} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{+\frac{\tau}{2}} = \frac{A}{T(-j\frac{2\pi}{T}n)} \left(e^{j\frac{2\pi}{T}n\frac{\tau}{2}} - e^{-j\frac{2\pi}{T}n\frac{\tau}{2}} \right) = \\ &= \frac{A}{n\pi} \sin\left(\pi n \frac{\tau}{T}\right) \end{aligned}$$

Abbiamo trovato un'espressione analitica in grado di fornirci i μ_n : essa ci dice che, al variare di $n \in \mathbb{Z}$, le ampiezze delle sinusoidi saranno distribuite secondo un seno cardinale, ossia ad una funzione del tipo:

$$\mu_n = A \frac{\sin\left(\pi n \frac{\tau}{T}\right)}{\pi n}$$

Prima di studiare questa funzione e ciò che ne deriva, le sue proprietà, un piccolo trucco: noi avremo sempre a che fare con funzioni di questo tipo, in questa trattazione; spesso converrà utilizzare il trucco precedentemente proposto nell'ambito della trattazione delle sinusoidi secondo la nostra forma canonica, e quindi sarà buona cosa ottenere, come argomento della sinusoidale, una forma del tipo:

$$2\pi \cdot X \cdot n f_0$$

Una volta ricondotti a ciò, sappiamo che l'elemento X sarà la frequenza del seno. Nel nostro caso, ad esempio:

$$\sin\left(\pi n \frac{\tau}{T}\right) = \sin\left(2\pi n \frac{\tau}{2} n f_0\right)$$

La frequenza, dunque, sarà $\frac{\tau}{2}$.

Si noti che τ è un tempo, quindi il suo inverso, moltiplicato per un numero, sarà una frequenza, dimensionalmente parlando. Si noti che però noi stiamo lavorando nel dominio di Fourier, considerando dunque sulle ascisse, come variabile indipendente, la frequenza f . Fatta quest'osservazione, vogliamo capire quale sia il 'passo di campionamento', ossia di quanto ci si sposta, sull'asse delle frequenze, al variare di ogni n in \mathbb{Z} . Il numero n è un parametro che cambia in modo discreto, e quindi vogliamo capire quale sia in questo contesto la f_0 , ossia la minima variazione percepibile passando da un n al successivo $n + 1$. Supponiamo di conoscere il rapporto $\frac{\tau}{T}$, pensiamo per esempio che esso sia uguale a 4:

$$\frac{\tau}{T} = 4$$

In questo modo:

$$\frac{\tau}{T} = 4 \longrightarrow T = 4\tau \longrightarrow f_0 = \frac{1}{4\tau}$$

Cerchiamo di capire il senso di questi ultimi passi:

L'involuppo del segnale che troveremo a partire dallo sviluppo in serie di Fourier sarà un seno cardinale; ciò che noi considereremo sarà soltanto un numero discreto di punti, percorrenti l'involuppo, il cui campo di esistenza è determinato dai numeri n . Poichè abbiamo che:

$$f_0 = \frac{1}{4\tau}$$

Abbiamo che il minimo salto, la distanza tra due di questi punti, è pari a f_0 , nel dominio di Fourier (che come abbiamo detto sulle ascisse ha le frequenze). I μ_n si possono pensare proprio come i punti della curva involuppo, presi ciascuno a distanza f_0 dal precedente. μ_0 è il valore dell'ampiezza della componente in continua, ossia a frequenza nulla; ognuna delle $n f_0$ è un'armonica secondaria, in questo caso, rispetto alla continua.

Si è soliti tracciare di solito modulo e fase dei μ_n : per i moduli, si farà il diagramma del modulo della curva involuppo, tracciando i punti in prossimità delle $n f_0$ armoniche; per le fasi, che consideriamo variabili da $-\pi$ a $+\pi$, tratteremo un punto su $\pm\pi$ se i numeri sono negativi, su 0 se sono positivi, come potrebbe suggerire un'analisi del piano di Gauss per quanto riguarda i numeri reali (possiamo infatti immaginare i numeri complessi semplicemente come un'estensione del concetto di segno per qualsiasi fase; dal momento che

spesso i segnali saranno reali, $x(t) \in \mathbb{R}$, possiamo pensare che la fase sia 0 o π).

Spesso capiterà la seguente cosa, che meglio formalizzeremo solo in seguito: avendo a che fare con segnali reali, si può dimostrare (e lo dimostreremo in seguito) che il modulo dei μ_n sia una funzione pari, la fase dei μ_n sia una funzione dispari.

Capitolo 3

Trasformata di Fourier

Introduciamo ora un'analisi più complessa, ma anche più completa della precedente, a partire da alcune osservazioni aggiuntive sulla serie di Fourier.

Perchè vogliamo un mezzo più potente della già eccellente serie? La risposta è semplice: limite che abbiamo annunciato, ma non sufficientemente evidenziato, è il fatto che la serie di Fourier è in grado di sviluppare, di rappresentare, solo e unicamente segnali con dominio del tempo limitato, ossia a tempo di vita nel dominio del tempo limitato. Supponendo di avere tuttavia un segnale per esempio del tipo:

$$x(t) = u(t)e^{-kt}$$

Questo segnale è utilissimo: esso rappresenta la soluzione dell'equazione differenziale modellante un circuito RC, e quindi di sicuro potrebbe essere studiata molto spesso quantomeno in ambito elettronico. Si ricordi che la soluzione di equazioni differenziali a coefficienti costanti ha comunque una forma contenente esponenziali di questo tipo, quindi moltissimi sistemi modellizzati mediante oscillatori armonici avrebbero bisogno, per un'analisi in frequenza, di avere un mezzo matematico di analisi come quello che vogliamo ottenere.

Come potremmo fare? Questo segnale non ha dominio limitato, infatti è non nullo su tutto il semiasse di tempo positivo. Servirà un qualcosa in grado di esprimere, nel dominio delle frequenze, anche un segnale a tempo di vita non limitato. Vediamo come arrivarci in modo quantomeno intuitivo.

3.1 Dalla Serie alla Trasformata di Fourier

Prima di gettarci in pasto ai formalismi (che comunque purtroppo in questo ambito potranno non essere soddisfacenti ai cultori della matematica for-

male), cerchiamo di capire una nuova cosa dalla serie di Fourier, o meglio di interpretare meglio il risultato dello sviluppo. Prima abbiamo sviluppato in serie una porta, un segnale a finestra rettangolare. Sviluppando in serie di Fourier questo segnale, cosa troviamo? Nel dominio delle frequenze troviamo non solo la funzione limitata nel suo tempo di esistenza, $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$, ma della stessa funzione prolungata per periodicità su tutto l'asse dei tempi. Spieghiamoci meglio: si considera un singolo periodo, ma di fatto il risultato che si ottiene è sviluppare la funzione per periodicità, ossia continuare a 'ripetere' questo periodo, per tutto l'asse dei tempi, da $-\infty$ a $+\infty$.

Ciò che la serie di Fourier rappresenta non vale solo per un periodo, bensì per tutto l'asse reale; prima abbiamo infatti calcolato la serie di Fourier di una porta, ma quello che abbiamo di fatto ottenuto è la serie di Fourier di un'onda quadra: limitando l'onda quadra su di un suo periodo, infatti, si ottiene un singolo impulso rettangolare. Di qui, calcolando i coefficienti, si troverà una rappresentazione in serie di Fourier non solo della porta, bensì dell'intera onda quadra (o treno di impulsi) su tutta la retta reale \mathbb{R} .

Si può banalmente dimostrare che la serie di Fourier rispetta la definizione di periodicità, e dunque è periodica! Ricordando che:

$$x(t + T) = x(t)$$

Il segnale $x(t + T)$, sviluppato in serie di Fourier, varrà:

$$x(t + T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}n(t+T)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} e^{j\frac{2\pi}{T}nT}$$

Semplificando l'argomento dell'esponenziale, vediamo che si ottiene:

$$x(t + T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} e^{j2\pi n}$$

Ma $2\pi n$ è multiplo di 2π , dal momento che $n \in \mathbb{Z}$, e quindi possiamo dire che esso valga sempre 1:

$$x(t + T) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = x(t)$$

In poche parole, abbiamo appena dimostrato che con la serie di Fourier si possono trattare tutti i segnali periodici che sull'intervallo-periodo base sono a energia finita. Ciò però vale ovviamente per un T finito, ossia per un periodo finito, tale per cui si possa riprodurre continuamente il contenuto di un singolo periodo sull'asse reale.

Proviamo a pensare ad una cosa un po' particolare: abbiamo appena detto che T deve essere finito, al fine di poter calcolare tutto con la serie di Fourier. Ma se provassimo a raddoppiarlo? Cosa otterremmo? Vediamo un po': definiamo un nuovo periodo $T' = 2T$, e calcoliamo i relativi μ_n :

$$\mu'_n = \frac{1}{T'} \int_{-\frac{T'}{2}}^{+\frac{T'}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T'}nt} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) e^{-j\frac{\pi}{T}nt} dt$$

Cosa abbiamo ottenuto? Vediamo, osservando semplicemente l'espressione precedente, che per n pari, i μ_n saranno gli stessi di prima; gli n dispari saranno invece nuovi, ed avranno dei μ_n nuovi: abbiamo infatti diminuito il passo di campionamento, ossia la distanza minima sull'asse delle frequenze nel dominio di Fourier, e nella fatispecie dimezzato. Ciò che abbiamo fatto, dunque, raddoppiando il periodo, è stato 'infittire' l'asse dei tempi, renderlo più fitto, aumentare i punti del dominio di esistenza. Nella fatispecie abbiamo raddoppiato il numero di punti esistenti:

$$f'_0 = \frac{1}{T'} = \frac{1}{2} \frac{1}{T} = \frac{1}{2} f_0$$

La nuova 'griglia' sarà doppiamente più fitta della precedente, poichè il passo si è dimezzato: nei punti pari ritroviamo i vecchi μ_n , nei dispari troviamo nuovi μ_n , che vanno a campionare sempre la stessa curva involuppo, ma aumentando la precisione e la qualità del campionamento.

Cosa possiamo fare ora, in maniera del tutto intuitiva? Se raddoppiando T abbiamo dimezzato il tempo di campionamento, proviamo a pensare cosa capiterebbe se continuassimo ad aumentare il periodo T dell'ipotetico segnale da analizzare: sicuramente il passo di frequenza diventerebbe minimo, infinitesimo; ciò che si otterrebbe, idealmente parlando, sarebbe passare da un insieme numerabile di punti, discreto, ad uno più che numerabile, ad un insieme completo, con la potenza del continuo: aumentare all'infinito il periodo farebbe tendere a 0 il tempo di campionamento, e quindi ad un infinitesimo. Cerchiamo, per quanto sia possibile, di introdurre un po' di formalismo in tutto ciò:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{T}nt'} dt' \right) e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

Se il periodo $T \rightarrow +\infty$, avvengono i seguenti fatti, intuitivamente parlando:

- L'integrale più interno verrà valutato da $-\infty$ a $+\infty$, poichè il limite prolunga all'infinito l'intervallo di integrazione;

- Definendo le seguenti grandezze:

$$\frac{1}{T} = f_0$$

$$\frac{n+1}{T} - \frac{n}{T} = \frac{1}{T} = \Delta f$$

Dove Δf dunque è il passo di campionamento in frequenza, dal momento che T cresce tendendo a ∞ , il Δf tende a diventare un differenziale, ossia un df ;

- Non effettuiamo più passi discreti al variare di un $n \in \mathbb{Z}$, ma variamo nel continuo:

$$nf_0 = f, f \in \mathbb{R}$$

Tenendo conto di tutte queste espressioni, di tutto questi cambiamenti, otterremo che:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t') e^{-j2\pi f t'} dt' \right] e^{j2\pi f t} df$$

L'integrale più interno, tra parentesi quadre, viene definito $X(f)$, ossia la Trasformata di Fourier del segnale $x(t)$, e sarà identificato come:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

L'integrale più esterno riesce ad invertire la trasformata, tornando al segnale di partenza nel dominio del tempo $x(t)$:

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Gli operatori che abbiamo appena introdotto, ossia la coppia trasformata/antitrasformata di Fourier, permettono di passare dal dominio del tempo al dominio delle frequenze segnali a tempo di vita non limitato, aperiodici. La trasformata di Fourier $X(f)$ viene detta anche 'spettro delle frequenze' o 'spettro in frequenza' (frequency spectrum) di un segnale, poichè rappresenta la naturale estensione per segnali aperiodici della serie di Fourier: se prima potevamo analizzare il contributo solo di frequenze n -esime, ora sarà possibile selezionare una qualsiasi frequenza appartenente all'asse reale, e studiarne il

contributo, mantenendo le stesse idee precedentemente utilizzate e proposte per quanto riguarda lo studio mediante serie di Fourier.

Dal momento che $X(f)$ si definisce mediante un integrale complesso, possiamo banalmente intuire che essa sia una funzione complessa. Possiamo dunque esprimerla mediante la nostra solita notazione, come modulo e fase:

$$X(f) = |X(f)| e^{j\angle X(f)}$$

La trasformata di Fourier ci permette di analizzare segnali appartenenti ad una classe molto più ampia rispetto a quelli sviluppabili in serie di Fourier; vi è tuttavia qualche analogia tra i due strumenti, come vogliamo ora dimostrare mediante un esempio pratico.

Esempio Pratico

Dato il segnale:

$$x(t) = Ap_T(t)$$

Calcolarne la trasformata di Fourier.

Utilizzando la definizione, possiamo semplicemente dire che:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{Ap_T(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} Ap_T(t)e^{-j2\pi ft} dt = A \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{-j2\pi f} e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{A}{-j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} - e^{j2\pi f \frac{T}{2}} \right) = \frac{A}{j2\pi f} \left(e^{j2\pi f \frac{T}{2}} - e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} \right) = \\ &= \frac{A \sin(\pi f T)}{\pi f} \end{aligned}$$

Cosa abbiamo ritrovato? Un seno cardinale, esattamente come ci era capitato nel calcolo mediante serie di Fourier ! Abbiamo ottenuto dunque lo stesso risultato che avevamo ottenuto precedentemente, cosa che conferma la validità della trasformata da noi ricavata: i nostri ragionamenti, fino a qui, funzionano.

Esempio Pratico

Proviamo ora a fare qualcosa di diverso, cercando di applicare la trasformata di Fourier per il motivo per cui l'abbiamo creata: studiare segnali non

periodici, a tempo di vita non limitato, e quindi non sviluppabili in serie di Fourier; consideriamo in questo esempio pratico il segnale:

$$x(t) = u(t)e^{-kt}$$

Calcoliamo al solito mediante la definizione:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-kt}e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(k+j2\pi f)} dt = \\ &= \frac{e^{-(k+j2\pi f)t}}{-(k+j2\pi f)} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{k+j2\pi f}\end{aligned}$$

Beh, abbiamo calcolato la trasformata, calcoliamone modulo e fase! Utilizzando le proprietà dei numeri complessi, vediamo:

$$\begin{aligned}|X(f)| &= \frac{1}{\sqrt{k^2 + 4\pi^2 f^2}} \\ \angle X(f) &= -\arctan\left(\frac{2\pi f}{k}\right)\end{aligned}$$

Nota, errore che può capitare spesso: il '-' si introduce davanti all'arcotangente dal momento che prima portiamo la funzione al numeratore, elevandola alla '-1', e poi calcoliamo l'angolo a partire dalla tangente così ricavata.

Osservando i grafici delle funzioni, potremmo vedere che le armoniche dell'esponenziale, per quanto riguarda il loro modulo, sono concentrate sulle basse frequenze (poichè $|X(f)|$ è molto elevata in un intorno di $f = 0$, e tende a decrescere all'aumentare di f).

3.2 Alcune Domande e Relative Risposte

Poniamoci alcune domande, riguardo ciò che abbiamo appena presentato e visto, cercando di rispondere, al fine di fornire idee e chiarire concetti.

3.2.1 Quali segnali sono trasformabili?

Alla domanda 'quali segnali sono trasformabili?' potremmo rispondere molto banalmente: la trasformata di Fourier esiste sempre per segnali ad energia finita, ossia per i segnali del mondo fisico. Vorrei far notare che esistono molti dibattiti sulle condizioni minimali di convergenza della trasformata di Fourier, che vengono affrontati, in Analisi Matematica, introducendo la Teoria delle Distribuzioni, ed un determinato formalismo generalizzante il

concetto di 'funzione' nel concetto di 'distribuzione', ed introducendo spazi distribuzionali di convergenza. Noi non considereremo tutto questo, anche perchè per quanto teorica questa trattazione vuole essere rivolta ad un lettore in cerca di 'pratica', non di formalismi (cercando di non andare troppo al di sotto dei limiti imposti dal 'buon gusto' della matematica). Per noi, quindi, i segnali trasformabili mediante trasformata di Fourier saranno semplicemente tutti i segnali a energia finita. Vale, come per quanto riguarda la serie di Fourier, l'eguaglianza di Parseval, affermando che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

L'energia del segnale nel dominio del tempo, e nel dominio della frequenza, resta sempre la stessa. Questo significa 'convergenza in norma quadratica': abbiamo la garanzia di avere la stessa energia, in entrambi i domini di studio.

3.2.2 Qual è il significato fisico delle frequenze negative?

Domanda interessante su di un argomento che non abbiamo ancora toccato: trasformando mediante la trasformata di Fourier un segnale, nel dominio delle frequenze avremo (praticamente sempre) tanti valori sul semiasse negativo quanti sul semiasse positivo. Ma quindi significa che si hanno contributi delle frequenze negative! Quello che ci chiediamo è: quale significato fisico hanno le frequenze negative?

La risposta è molto semplice: nessuno: fisicamente, non è possibile interpretare in alcun modo una frequenza negativa.

Abbiamo però un notevole vantaggio: i segnali del mondo fisico sono tutti reali, e quindi funzioni del tipo:

$$x(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Per questo motivo, come dimostreremo, il modulo della trasformata di Fourier è una funzione pari, la fase della trasformata di Fourier è dispari, e quindi le frequenze negative non aggiungono informazione, non dicono niente di nuovo sul segnale (niente che non si possa capire guardando la parte positiva del segnale e conoscendo la relazione di parità/disparità rispettivamente di modulo e fase).

3.2.3 Abbiamo più armoniche nella serie o nella trasformata?

Domanda che potremmo porci, volendo, è la seguente: abbiamo più armoniche, cioè più punti da studiare, nella serie di Fourier o nella trasformata di Fourier? Quello che noi facciamo ogni volta è studiare i contributi delle singole armoniche, delle singole $e^{j2\pi ft}$, ossia degli esponenziali complessi. Quello che vogliamo capire è: ci sono più armoniche nella serie, o nella trasformata?

In entrambe le espressioni, abbiamo infinite armoniche. Il problema è che non tutti gli infiniti sono uguali! Nell'ambito della serie di Fourier, abbiamo che ciascun μ_n varia con $n \in \mathbb{Z}$, dove \mathbb{Z} è un insieme numerabile, cioè che ha la potenza del discreto. La trasformata di Fourier lavora su \mathbb{R} , e ha quindi la potenza del continuo, che è molto più che numerabile! Si tratta di due infiniti, ma di potenza molto diversa! Dalla topologia, infatti, possiamo sapere che \mathbb{R} è un insieme 'completo', poichè copre tutti i vari 'buchi' tra un razionale ed un altro. Senza andare troppo nel dettaglio, si sappia dunque che, pur essendo entrambe infinite, le armoniche fornite dalla trasformata di Fourier sono molto maggiori di quelle fornite dalla serie di Fourier.

3.3 Introduzione ai segnali generalizzati: la Delta di Dirac

Il concetto di distribuzione (o di funzione generalizzata) nasce nel 1900 circa dal fisico Paul Adrien Maurice Dirac, che necessitava di una modellizzazione ideale di particolari fenomeni, su tutti di quelli impulsivi. Dirac introdusse così la Delta, ossia il modello di un segnale impulsivo. Più avanti matematici del calibro di Schwartz, Sobolev e altri, introdussero un formalismo matematico per la teoria, estendendola notevolmente.

Il segnale generalizzato più interessante è la Delta di Dirac della quale stiamo facendo molte lodi: $x(t) = \delta(t)$. Possiamo dire che $\delta(t)$ sia il metodo di misura ideale per un fenomeno: un metodo di misura preciso, senza incertezze e latenze.

Impropriamente la definizione di Delta che si introduce è quella come integrale, anche se sarebbe più corretto parlare della più formale definizione mediante funzionale. Utilizzando dunque una sorta di prodotto scalare, considerato in ambito distribuzionale, definiamo la Delta di Dirac applicata su di un segnale $x(t)$ come:

$$\langle \delta(t) | x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t) dt \triangleq x(0)$$

Cosa significa tutto ciò? Cerchiamo di capirlo! Dato un segnale, vorremmo farne la misura in un punto, ossia rilevare, campionare il suo valore in un dato punto. Ciò che uno strumento di misura dunque fa, è effettuare la misura di $x(t_0)$, con una certa incertezza T sul valore catturato. Possiamo modellizzare la misura come il calcolo dell'area di una porta di altezza pari al segnale:

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) p_T(t - t_0) dt$$

Due accorgimenti:

- Scegliamo di considerare una misura mediata, ossia di normalizzare l'integrale di un divisore T , dividendo dunque tutto per T (teorema della media integrale);
- Poichè T è piccolo, dato che utilizziamo (o almeno ipotizziamo di utilizzare) uno strumento accuratissimo, l'area del tratto di rettangoloide si può circa approssimare con l'area della porta di altezza $x(t_0)$, ossia del segnale valutato nel punto, poichè ci si trova in un intorno di questo punto e si può considerare ciò una buona approssimazione:

$$\hat{x}(t) \sim \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t_0) p_T(t - t_0) dt = \frac{x(t_0)}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} 1 dt = T \cdot \frac{x(t_0)}{T} = x(t_0)$$

Ciò è vero, se la larghezza della porta, T , tende a 0: con uno strumento privo di indeterminazione, e quindi ideale. Come vedremo tra breve, questa è un'interpretazione, una definizione di $\delta(t)$.

3.3.1 Proprietà della Delta di Dirac

Elenchiamo qui un insieme proprietà od osservazioni riguardanti la Delta di Dirac, dimostrando quelle non banali che presenteremo.

Definizione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

Definizione come limite di una porta per larghezza infinitesima

Come già detto, una possibile definizione di $\delta(t)$, è il limite della porta per $T \rightarrow 0$: se infatti T si stringe, e l'ampiezza della porta rimane costante, poichè l'integrale della porta deve sempre valere 1, possiamo immaginare che più lo 'spessore', la 'larghezza' della porta diventi infinitesima, più si elevi l'altezza, mantenendo sempre costante l'integrale, che varrà sempre 1:

$$\lim_{T \rightarrow 0} p_T(t) = \delta(t)$$

Nota: esistono altre definizioni asintotiche di δ , che forse definiremo in seguito.

Riscaldamento di una Delta

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) = \frac{1}{|a|} x(0) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

Dimostrazione: dalla teoria delle distribuzioni, utilizzando un po' di quel formalismo che ci sta così simpatico:

$$\langle \delta(at) | x(t) \rangle \triangleq \langle \delta(t) | \frac{1}{|a|} x(t) \rangle = \frac{1}{|a|} x(0) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

Scaricando tutto come di solito si fa sulla funzione test, che in questo caso è il nostro 'misurando', il segnale $x(t)$, si ottiene facilmente questa proprietà. Le motivazioni derivano dalla Teoria delle Distribuzioni, e si possono facilmente dimostrare estendendo i risultati ottenuti dalle distribuzioni regolari sullo spazio \mathcal{D} . In una dispensa di Teoria delle Distribuzioni sicuramente saranno formalizzati tutti i passaggi.

Lemma della precedente proprietà

La Delta di Dirac è una funzione pari (funzione generalizzata, ma chiamiamola senza troppi problemi funzione):

$$\delta(-t) = \delta(t)$$

Dimostrazione: dalla proprietà appena vista:

$$\delta(-t) = \frac{1}{|-1|} \delta(t) = \delta(t)$$

Supporto della Delta

$$\delta(t) = 0 \forall t \neq 0$$

La $\delta(t)$ è una funzione generalizzata il cui supporto è esclusivamente $t = 0$.

Proprietà di Campionamento

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

Questa proprietà ha in sé probabilmente un alone di misticismo, ma in realtà è molto intuitiva; inoltre, è assolutamente fondamentale perchè permette di 'campionare' (come suggerito nel nome che le è stato scelto) un valore. La proprietà è intuitiva per il seguente motivo: se ad una funzione moltiplichiamo una Delta di Dirac (in questo caso supposta centrata in 0), capita che tutto ciò che sta fuori dal supporto della Delta viene annullato (moltiplichiamo infatti la funzione per 0 per qualsiasi punto, come immaginiamo dalla proprietà del supporto appena presentata); tutto ciò che resta della funzione sarà dunque il valore presente sull'intersezione dei supporti delle due funzioni, e quindi solo nel punto in cui esiste la delta, ottenendo così banalmente questa formula.

Proprietà della Trasformata di Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\pm j2\pi ft} dt = \delta(f)$$

Questa proprietà è veramente importantissima, ed anche interessantissima, poichè deriva da una considerazione non ancora fatta sulla trasformata di Fourier. Prima di parlarne, diamone una dimostrazione basata sul formalismo della Teoria delle Distribuzioni.

Dimostrazione: consideriamo, dalla Teoria delle Distribuzioni, la Trasformata di Fourier di una $\delta(t)$, come:

$$\langle \delta(t) | e^{-j2\pi ft} \rangle = \langle \delta(t) | e^{-j2\pi f0} \rangle = 1$$

Anticipando la proprietà di simmetria, valida per la trasformata di Fourier (che dopo discuteremo e dimostreremo ampiamente):

$$\mathcal{F}\{1\} = \delta(f) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \delta(f)$$

Questo fatto ha un'interpretazione fisica veramente affascinante: se noi trasformiamo mediante Fourier una costante ($f = 0$), troveremo una $\delta(f)$, ossia un impulso fissato alla frequenza nulla. Se ci pensiamo, se il segnale nel

tempo è una costante, significa che si ha solo ed esclusivamente una continua, e dunque solo una componente a frequenza nulla! Supponendo ora di avere invece una sinusoidale come esponenziale complesso a frequenza f_0 , allo stesso modo avremo, nel dominio di Fourier, solo una $\delta(f - f_0)$, ossia una delta di Dirac centrata in f_0 . Questo perchè la sinusoidale ha una sola componente in frequenza, perchè si può esprimere come una sola sinusoidale, e dunque è sufficiente una delta, una riga spettrale nel dominio di Fourier.

Derivata del gradino di Heavyside

Si può dimostrare, mediante la Teoria delle Distribuzioni, che:

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = \delta(t)$$

Essendo materia di Teoria delle Distribuzioni, si sceglie di trascurare qui la dimostrazione formale.

3.3.2 Esempio Pratico 1

Consideriamo, al fine di meglio comprendere le proprietà della Delta appena introdotte, tre esempi pratici, di cui questo è il primo. Questo esempio riguarderà la proprietà 6, e vuole essere esplicativo sul come applicarla 'al meglio': tutto ciò che sta tra ' $j2\pi$ ' e ' t ' sarà argomento della δ dopo aver calcolato l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi[QUALCOSA]t} dt = \delta([QUALCOSA])$$

Ad esempio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(x^3+x)t} dt = \delta(x^3 + x)$$

Nota: questa proprietà vale solo e soltanto se l'integrale viene calcolato su tutta la retta reale! Se così non fosse la proprietà non è valida, e bisogna calcolare con metodi più 'classici' il tutto.

3.3.3 Esempio Pratico 2

Dato il segnale $x(t)$:

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$$

Calcolarne la trasformata di Fourier.

Molto semplice:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi(f-f_0)t} dt = \delta(f - f_0)$$

3.3.4 Esempio Pratico 3

Nota: questo esempio pratico è a dir poco fondamentale, e sarà usatissimo in tutta la trattazione. Si conosca dunque molto bene, data la sua enorme importanza.

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale $x(t)$:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$$

Utilizziamo la formula derivante da quella di Eulero, ottenendo:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} [e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}]$$

Niente di più banale! Riutilizzando l'esempio pratico 2, otterremo semplicemente:

$$X(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Ossia, la trasformata di Fourier di un coseno è uguale alla somma di due δ , traslate di $+f_0$ e $-f_0$. Si ricordi sempre questo esempio, in quanto fondamentale.

3.4 Proprietà della Trasformata di Fourier

Al fine di poter studiare efficacemente l'analisi dei segnali, è necessario conoscere molto bene le proprietà della trasformata di Fourier. Per questo, ora elencheremo le prime proprietà, proponendo per ciascuna una dimostrazione, corredando il tutto con riflessioni che permettano di meglio coglierne l'essenza.

3.4.1 Proprietà di Linearità

Dato segnale $y(t)$ definito come:

$$y(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$$

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = a\mathcal{F}\{x_1(t)\} + b\mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

Dimostrazione

Essendo l'integrale un operatore lineare operante su spazi vettoriali, si ha che:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [ax_1(t) + bx_2(t)] e^{-j2\pi ft} dt = a \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) e^{-j2\pi ft} dt + b \int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t) e^{-j2\pi ft} dt = a\mathcal{F}\{x_1(t)\} + b\mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

3.4.2 Proprietà di Parità

Dato un segnale reale $x(t)$, allora il modulo della sua trasformata di Fourier, $|X(f)|$ è una funzione pari, mentre la fase della sua trasformata di Fourier è una funzione dispari.

Dimostrazione

In senso molto generale, potremmo interpretare $x(t)$ come modulo e fase nel piano complesso:

$$x(t) = |x(t)| e^{j\angle x(t)}$$

Poichè tuttavia ci troviamo in \mathbb{R} , abbiamo che:

$$x(t) = \pm |x(t)|$$

Poichè, trovandoci sull'asse reale, la fase può essere 0 o π , se i numeri sono rispettivamente o positivi o negativi.

Possiamo dunque pensare alla quantità $e^{j2\pi ft}$, mediante la formula di Eulero, come:

$$e^{j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) + j \sin(2\pi ft)$$

Possiamo dunque calcolare la trasformata di Fourier come somma di due contributi: quello della parte reale, e quello della parte immaginaria, partendo da ciò che abbiamo ottenuto:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = \text{Re}[X(f)] + j \text{Im}[X(f)]$$

Possiamo fare alcune considerazioni: si vede molto bene, da queste ultime definizioni, che, in caso di funzioni reali (come secondo le ipotesi che abbiamo finora seguito per arrivare a questo risultato), che la parte reale sia una funzione pari, e la parte immaginaria una funzione dispari. Vediamo perchè:

$$\Re [X(-f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi(-f)t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt = \Re [X(f)]$$

$$\Im [X(-f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi(-f)t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt = -\Im [X(f)]$$

Poichè sappiamo dall'algebra che una funzione dispari al quadrato diviene pari, che la somma di funzioni pari è ancora una funzione pari, e che la radice di funzioni pari è ancora una funzione pari, avremo che:

$$|X(f)| = \sqrt{[\Re [X(f)]]^2 + [\Im [X(f)]]^2}$$

Senza dubbio è pari.

Per quanto riguarda la fase:

$$\angle X(f) = \arctan \left(\frac{\Im [X(f)]}{\Re [X(f)]} \right)$$

Notoriamente, nel suo dominio, l'arcotangente è una funzione dispari, dunque abbiamo dimostrato la relazione di parità tra le trasformate.

Ci siamo dilungati tanto su questa proprietà perchè essa è fondamentale: come abbiamo già accennato, essa elimina, per quanto riguarda segnali reali, la presenza di informazione nelle frequenze negative, perchè introduce concetti di simmetria che ci permettono ricavare tutte le informazioni dalle sole frequenze positive. Si noti che ciò vale su segnali reali solo perchè $\angle X(f) = 0; \pi$: in questo modo valgono le proprietà trigonometriche che hanno permesso la proprietà. Uno sfasamento sul piano complesso annullerebbe la proprietà di parità, anche se ciò nei segnali è impossibile da verificarsi, in quanto i segnali con cui si ha a che fare nel mondo fisico sono grandezze reali.

3.4.3 Proprietà di Anticipo/Ritardo

Dato un segnale $y(t)$ definito come:

$$y(t) = x(t - T)$$

La sua trasformata è:

$$Y(f) = \mathcal{F} \{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(f) e^{-j2\pi fT}$$

In altre parole un ritardo, nel dominio della frequenza, si può interpretare come il prodotto per un fattore lineare di fase, ossia per un'armonica. Si parla di fattore lineare di fase poichè esso non provoca di fatto variazioni nello spettro di energia del segnale:

$$x(t) \longrightarrow \mathcal{S}_x(f) = |X(f)|^2$$

$$y(t) \longrightarrow \mathcal{S}_x(f) = |X(f)e^{-j2\pi fT}|^2 = |X(f)| \cdot e^{-j2\pi fT^2} = |X(f)|^2$$

Un ritardo del segnale nel dominio del tempo, non provoca alcuna variazione nello spettro di energia in frequenza.

Dimostrazione

Dato $y(t) = x(t - t_0)$:

$$Y(f) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0)e^{-j2\pi ft} dt$$

Mediante un cambio di variabili, abbiamo:

$$s = t - t_0; t = s + t_0; dt = ds$$

Da qua:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi f(s+t_0)} ds = e^{-j2\pi ft_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi fs} ds = X(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

3.4.4 Proprietà di Modulazione

Si tratta di una proprietà assolutamente duale alla precedente, molto utilizzata in ambito di telecomunicazioni. Essa ci dice che, dato un segnale $x(t)$:

$$\mathcal{F}\{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = X(f - f_0)$$

Intuitivamente, cosa capita? Se moltiplichiamo nel dominio del tempo un segnale per un'armonica, il segnale al variare del tempo varierà seguendo il profilo precedente, ma anche la curva inviluppo 'dettata' dall'armonica. Ciò che facciamo è simile all'accelerare la $x(t)$, facendole seguire l'inviluppo della sinusoide, dell'armonica.

A cosa può servire questa cosa? Supponiamo di avere due segnali nel tempo, ad esempio due comunicazioni, che devono 'parlare' tra loro sullo stesso filo. Supponiamo di avere questi $x_1(t)$ e $x_2(t)$, e di doverli mettere sullo stesso doppino. Per fare ciò, dovremo moltiplicare per una certa armonica i due, e così sintonizzarli a frequenze diverse, in modo da farli parlare sullo stesso filo, senza far sì che si sovrappongano e creino problemi ed interferenze l'uno sull'altro. In questo modo, nel tempo, moltiplicheremo così:

$$x_1(t)e^{j2\pi f_1 t}$$

$$x_2(t)e^{j2\pi f_2 t}$$

Si noti che noi effettuiamo riscalamanti mediante prodotto per esponenziali complessi, ma nella pratica si moltiplica, nelle applicazioni di telecomunicazioni (ad esempio), per dei coseni. Dal momento che l'esponenziale complesso non esiste, la migliore cosa che possiamo fare è accontentarci del coseno, e ottenere:

$$Y(f) = x_1(f) \cos(2\pi f_1 t) + x_2(f) \cos(2\pi f_2 t)$$

Dimostrazione

La dimostrazione è abbastanza banale e simile alla precedente; vediamo che se moltiplichiamo la funzione per $e^{j2\pi f_0 t}$, otteniamo:

$$X_0(f) = \mathcal{F} \{x(t)e^{j2\pi f_0 t}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi t(f-f_0)} dt = X(f-f_0)$$

3.4.5 Proprietà dello Scalamento

Dato un segnale $x(t)$, uno scalamento nel tempo corrisponde ad uno scalamento opposto in frequenza:

$$\mathcal{F} \{x(kt)\} \longleftrightarrow \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{k}\right)$$

Prima di dimostrare tutto ciò, alcune osservazioni. Prima di tutto, ricordiamo che:

- Se $|k| > 1$, si ha una compressione nel tempo;
- Se $|k| < 1$, si ha una dilatazione nel tempo.

Qual è il significato di tutto ciò? Ad una compressione nel tempo corrisponde una dilatazione nel dominio delle frequenze, ad una dilatazione nel dominio del tempo corrisponde una compressione nel dominio delle frequenze.

Cosa significa 'comprimere' un segnale? Significa, se vogliamo guardare sotto questo punto di vista, 'variare la velocità di percorrenza': moltiplicando t per un fattore positivo e maggiore di 1, con lo stesso 'tempo' avremo 'percorso' una maggior porzione di segnale, e avremo quindi una velocità maggiore! Per 'aumentare la velocità di percorrenza', quindi, intendiamo semplicemente aumentare la pendenza dei tratti di curva.

Prendendo ad esempio una finestra triangolare, aumentando la velocità di percorrenza ci mettiamo meno tempo a 'salire' su per il triangolo, ma quindi esso sarà più compresso. Ciò che capita in frequenza, è il fatto che serviranno sinusoidi più ripide, con frequenze più elevate, poichè una sinusoidale a bassa frequenza è di fatto piatta, e quindi non in grado di presentare ripide pendenze. In questo modo, se servono sinusoidi a frequenza più alta, lo spettro si dilaterà: serviranno armoniche a frequenza più alta, ma quindi più lontane dall'origine, e quindi a compressione nel tempo, capiamo che ha senso pensare che ci sia una dilatazione in frequenza.

La riduzione dell'ampiezza sulle basse frequenze è dovuta al fatto che abbiamo sempre e comunque convergenza in norma quadratica, e quindi la stessa energia rispetto al tempo! Vale sempre e comunque l'eguaglianza di Parseval, dunque il fattore di normalizzazione è giustificato, dal momento che così si avrà sempre la stessa energia in entrambi i domini.

3.4.6 Dimostrazione

$$\mathcal{F}\{x(kt)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(kt)e^{-j2\pi ft} dt$$

Effettuiamo a questo punto un cambio di variabili:

$$s = kt; t = \frac{s}{k}; dt = \frac{1}{k}$$

Da qua avremo:

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)e^{-j2\pi \frac{f}{k}s} \cdot \frac{1}{k} ds$$

Facciamo un'osservazione: se $k > 0$, tutto regolare; se $k < 0$, allora l'esponentiale avrebbe segno negativo, ma ciò va contro la definizione di trasformata di Fourier: l'esponente deve avere sempre segno negativo davanti. Dobbiamo dunque distinguere due casistiche:

$$\begin{cases} k, k > 0 \\ -k, k < 0 \end{cases}$$

Ma questa definizione ricorda proprio la definizione di funzione modulo! Al posto di k , molto banalmente, useremo $|k|$, che sostituisce esattamente il comportamento che ricerchiamo:

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} x(s) e^{-j2\pi \frac{f}{|k|} s} ds = \frac{1}{|k|} X\left(\frac{f}{|k|}\right)$$

Proprietà della Convoluzione

Prima di introdurre questa proprietà, riprendiamo la definizione di prodotto di convoluzione da Analisi Matematica II; dati due segnali, $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$y(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) x_2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

Il prodotto di convoluzione è un operatore commutativo. In seguito, vedremo la sua utilità nell'analisi dei segnali.

La cosa interessante di questa proprietà è che quest'operazione, così difficile da calcolare (nella maggior parte dei casi reali), nel dominio di Fourier diviene un semplice prodotto algebrico!

$$x_1(t) \otimes x_2(t) \longleftrightarrow X_1(f) \cdot X_2(f)$$

Dimostrazione

Dato $y(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$, vediamo che:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) x_2(\tau) d\tau$$

La sua trasformata di Fourier, $Y(f)$, sarà:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) x_2(\tau) e^{-j2\pi f t} d\tau dt =$$

Utilizziamo un piccolo artificio algebrico: moltiplichiamo per l'esponenziale complesso con variabile τ , ossia per $e^{j2\pi f \tau}$; otteniamo così:

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) x_2(\tau) e^{-j2\pi f (t - \tau + \tau)} dt d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) e^{-j2\pi f(t-\tau)} x_2(\tau) e^{-j2\pi f\tau} dt d\tau$$

Utilizziamo ora un cambio di variabili: $t - \tau = s$; da qua, $dt = ds$; otterremo in questo modo da un singolo integrale doppio due integrali semplici, moltiplicati tra loro, dal momento che le funzioni di integrazione dipenderanno da variabili differenti, e potremo così dire che:

$$\Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(s) e^{-j2\pi fs} ds \right) \cdot \left(x_2(\tau) e^{-j2\pi d\tau} d\tau \right) = X_1(f) \cdot X_2(f)$$

Si noti che, come formalizzeremo meglio dopo, vale anche la proprietà duale (come spesso per l'appunto capiterà, a causa di una proprietà ancora da definirsi, nelle trasformate di Fourier): una convoluzione in frequenza diviene un prodotto algebrico nel tempo; dato $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$,

$$Y(f) = X_1(f) \otimes X_2(f)$$

3.4.7 Proprietà di Derivazione

Dato un segnale $y(t)$ definito come:

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x'(t)$$

La sua trasformata di Fourier, $Y(f)$, sarà:

$$Y(f) = j2\pi f X(f)$$

Questa proprietà è una delle più classiche ed importanti sotto il punto di vista della risoluzione di sistemi differenziali (anche se più spesso si fa uso, allo stesso fine, della trasformata di Laplace che ora non trattiamo): l'operazione di derivazione nel dominio del tempo coincide, nel dominio della frequenza, ad una moltiplicazione per la variabile indipendente f . Ciò significa che mediante la trasformata di Fourier è possibile ricondurre un'equazione differenziale di ordine generico ad un'equazione algebrica, e dunque molto più semplice da risolvere.

Dimostrazione

Dato $y(t) = x'(t)$, abbiamo che:

$$\mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)e^{-j2\pi ft} dt =$$

Integrando per parti, otteniamo:

$$= x(t)e^{-j2\pi ft} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - (-j2\pi f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Sappiamo che come al solito $x(t)$ è trasformabile, ad energia finita, e dunque:

$$x(t) \in \mathcal{L}^2$$

Dove \mathcal{L}^2 è lo spazio di funzioni il cui modulo quadro è integrabile in senso di Lebesgue. Per essere integrabile in tal senso, deve essere a supporto compatto, o quantomeno infinitesima all'infinito (in realtà la definizione richiederebbe il fatto che l'insieme sia a misura nulla, cosa che comunque noi supponiamo per vera; a parte funzioni particolari come la funzione di Dirichlet, possiamo immaginare che quest'ipotesi sia sempre verificabile); ciò che possiamo dunque dire è che:

$$x(+\infty) = x(-\infty) = 0$$

Da qua il primo termine sparisce, e dunque potremo dire che:

$$Y(f) = j2\pi f X(f)$$

Una nota: applicando iterativamente questo ragionamento, questa dimostrazione, alle derivate n -esime, si può dimostrare che, dato $y(t)$ così definito:

$$y(t) = \frac{d^n x(t)}{dt^n}$$

Abbiamo:

$$Y(f) = (j2\pi f)^n X(f)$$

Esempio Pratico

Vogliamo provare questa proprietà per la più classica ed utilizzata delle equazioni differenziali: l'oscillatore armonico con termini di smorzamento:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \xi\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = x(t)$$

Questa così complicata equazione differenziale, rappresentante l'oscillatore armonico nella sua forma più completa, può essere risolta passando nel dominio di Fourier:

$$-4\pi^2 f^2 Y(f) + \xi \omega_0 j 2\pi f Y(f) + \omega_0^2 Y(f) = X(f)$$

Questa è un'equazione algebrica di secondo grado banalissima, mediante gli artifici algebrici insegnati alle scuole superiori.

3.4.8 Principio di Indeterminazione della trasformata di Fourier

Prima di introdurre l'enunciato del principio di indeterminazione riguardante la trasformata di Fourier, definiamo due quantità fondamentali che ci serviranno:

- Estensione temporale del segnale (o durata) d :

$$d^2 \triangleq \frac{1}{\varepsilon_x} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt$$

- Estensione in frequenza o 'banda' D del segnale:

$$D^2 \triangleq \frac{4\pi^2}{\varepsilon_x} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |X(f)|^2 df$$

Nota: abbiamo chiamato D la banda del segnale, ma si noti che questa non è l'unica definizione di banda esistente (si noti che il $4\pi^2$ deriva dall'introduzione di una costante di normalizzazione, ma non sarebbe necessario, anche se permette di presentare un risultato più elegante ma equivalente a quello che si otterrebbe senza); inoltre, le varie definizioni non sono tra di loro equivalenti. In seguito introdurremo diverse definizioni di banda, che possono tornare utili in contesti differenti.

Passiamo all'enunciato del teorema in questione: il principio di indeterminazione afferma che, in un qualsiasi segnale ad energia finita:

$$d \cdot D \geq \frac{1}{2}$$

Dimostrazione

Riprendiamo un attimo la definizione di D^2 , e vediamo che possiamo usare un piccolo accorgimento: applicando l'appena enunciata proprietà della derivazione, ed il teorema di Plancherel, possiamo moltiplicare e dividere per $j2\pi$ all'interno del modulo, e ottenere:

$$D^2 = \frac{4\pi^2}{\varepsilon_x} \int_{-\infty}^{+\infty} f^2 |X(f)|^2 df = \frac{4\pi^2}{4\pi^2 \varepsilon_x} \int_{-\infty}^{+\infty} |j2\pi f X(f)|^2 df$$

Utilizzando ora Plancherel, possiamo dire che l'integrale in modulo quadro di $j2\pi f X(f)$ coincide con l'integrale in modulo quadro della derivata del segnale $x(t)$, nel dominio del tempo! Semplificando dunque i termini $4\pi^2$, otteniamo:

$$= \frac{1}{\varepsilon_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt$$

Abbiamo ottenuto una forma un po' più maneggevole per quanto riguarda D^2 ; studiamo a questo punto il prodotto durata-banda, e vediamo cosa capita:

$$d^2 \cdot D^2 = \frac{1}{\varepsilon_x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt$$

Proseguiamo considerando la diseuguaglianza di Schwartz; essa ci permette infatti di dire che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |x(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{dx(t)}{dt} \right|^2 dt \geq \left[\int_{-\infty}^{+\infty} tx(t) \frac{dx(t)}{dt} dt \right]^2$$

A questo punto, calcoliamo, mediante la tecnica di integrazione per parti, l'integrale minorante il prodotto di durata e banda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tx(t) \frac{dx(t)}{dt} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} tx(t) dx(t) = t \frac{x^2(t)}{2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt$$

Dal momento che supponiamo il segnale a energia finita, vale il discorso effettuato al momento della dimostrazione della proprietà di derivazione: possiamo supporre, all'infinito, il valore del segnale infinitesimo, ossia tendente a 0; per questo motivo, $x^2(t)$, a $\pm\infty$, varrà 0. Rimarrà dunque solo il secondo integrale:

$$= -\frac{1}{2} \varepsilon_x$$

Il fattore ε_x si ottiene osservando che il secondo integrale è semplicemente l'energia del segnale $x(t)$. Inseriamo il risultato dunque nel contesto precedente, ottenendo:

$$d^2 \cdot D^2 \geq \frac{1}{\varepsilon_x^2} \left[-\frac{1}{2} \varepsilon_x \right]^2 = \frac{1}{4}$$

Calcolando la radice, otterremo banalmente:

$$d \cdot D \geq \frac{1}{2}$$

Abbiamo così dimostrato il principio di indeterminazione della trasformata di Fourier!

Questa dimostrazione non è del tutto generale: il principio di indeterminazione è infatti più famoso in ambito fisico, nella fattispecie in ambito di meccanica quantistica, parlando del più celebre principio di indeterminazione di Heisenberg: le incertezze di una grandezza fisica ed del suo impulso associato, non commutanti (ad esempio posizione e velocità), moltiplicate tra loro, sono almeno uguali alla metà della costante di Planck normalizzata per 2π (\hbar). Una dimostrazione più completa coinvolge gli operatori non commutanti, ed arriva ad un risultato simile, per quanto riguarda la meccanica quantistica.

Tralasciamo la fisica e riprendiamo la Teoria dei Segnali; cosa significa tutto ciò che abbiamo detto finora? Beh, partiamo da d , ossia la durata nel dominio del tempo del segnale. Definiamo una funzione ausiliaria $g(t)$, tale per cui:

$$g(t) = \frac{|x(t)|^2}{\varepsilon_x}$$

Notiamo due proprietà di questa $g(t)$:

- Il suo integrale sulla retta reale è pari a 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \frac{1}{\varepsilon_x} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_x} = 1$$

- La funzione è sempre positiva o uguale al più a 0:

$$g(t) \geq 0 \forall t \in \mathbb{R}$$

Cosa ci ricorda tutto ciò? $g(t)$ ha le identiche caratteristiche richieste da una funzione di densità di probabilità! Notiamo dunque un'interpretazione molto interessante; riprendendo la definizione di d^2 :

$$d^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \sigma^2[f(t)]$$

Si può interpretare il d^2 come un momento secondo probabilistico, ossia come una varianza! Di fatto, quindi, d rappresenta la radice della varianza del modulo quadro del nostro segnale. Maggiore sarà questa quantità, maggiore sarà l'estensione temporale, la dispersione del segnale nel dominio del tempo. Possiamo interpretare ciò volendo anche in meccanica classica, senza andar a prendere concetti probabilistici: a tutti gli effetti, possiamo pensare a d come un momento di inerzia del segnale, o meglio della funzione rappresentante la densità dell'oggetto fisico in questione: più d è grande, più 'voluminoso' sarà l'oggetto, e maggiore il suo momento di inerzia.

Potremmo fare le medesime considerazioni per D e lo spettro del segnale in frequenza: maggiore è D , maggiore è la dispersione sulle varie frequenze del segnale, e quindi il supporto dello spettro in frequenza.

Cosa ci dice il principio di indeterminazione? Rivediamo l'enunciato:

$$d \cdot D \geq \frac{1}{2}$$

Non abbiamo la possibilità di rendere la durata del segnale e contemporaneamente la sua banda arbitrariamente piccole, poichè ridurre un elemento va a scapito dell'altro; si noti che non è vero il contrario, dal momento che è possibile avere segnali di durata temporale infinita e larghezza di banda infinita (quantomeno in Teoria dei Segnali).

Ultima osservazione: quando abbiamo l'indeterminazione minima? Ossia, quando $d \cdot D = \frac{1}{2}$? La risposta è: si può dimostrare che nella Gaussiana si abbia la maggior concentrazione tempo/frequenza, e quindi si può avere indeterminazione minima.

La Gaussiana è una funzione dalle proprietà molto interessanti: altra proprietà che si può dimostrare più o meno facilmente, è il fatto che la trasformata di Fourier di una Gaussiana sia una Gaussiana stessa; altra cosa interessante, è il fatto che sia un esempio banale di segnale a durata infinita sia nel dominio del tempo che nel dominio delle frequenze.

Si ricordino queste note riguardo a questo tipo di segnale, poichè esso è uno dei più importanti nelle applicazioni pratiche.

3.4.9 Proprietà del Supporto

Esistono due proprietà, tra di loro duali, riguardanti il supporto di un segnale nel dominio del tempo, e dello stesso segnale nel dominio della frequenza. Esse si possono intuire leggendo la teoria sul principio di indeterminazione, tuttavia è molto importante enunciarle e dimostrarle, al fine di averne una maggiore comprensione, ed introdurre qualche informazione aggiuntiva.

1. Se un segnale $x(t)$ è a supporto compatto nel tempo, allora la sua trasformata di Fourier, $X(f)$, ha supporto illimitato nel dominio delle frequenze;
2. Se un segnale nel dominio delle frequenze, $X(f)$, ha supporto compatto (limitato), allora nel dominio del tempo avrà supporto illimitato.

Dimostrazione punto 1

Per definizione, sappiamo che la trasformata di Fourier di un segnale $x(t)$ valga:

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Dal momento che, per ipotesi, $x(t)$ è a supporto compatto, supponiamo che l'intervallo di integrazione, $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$, sia simmetrico; inoltre, sviluppiamo in serie di Taylor l'esponenziale complesso, ottenendo:

$$\Rightarrow \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-j2\pi f)^n}{n!} t^n dt$$

Poichè la serie converge uniformemente, possiamo utilizzare i teoremi di passaggio al limite, e dire che:

$$X(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)t^n dt \right] \cdot \frac{(-j2\pi)^n}{n!} f^n$$

Sappiamo che, poichè è trasformabile, $x(t) \in \mathcal{L}^2$; per la disegualianza di Schwartz, l'integrale cresce come $\frac{T}{2}$, e quindi $X(f)$ è una funzione analitica, e quindi olomorfa. Essa dunque soddisfa le ipotesi del teorema di Liouville, e quindi è a supporto illimitato, poichè non può annullarsi se non in un insieme al più numerabile (discreto) di punti, ma non in un intervallo (poichè esso avrebbe un'infinità più che numerabile di punti al suo interno).

Dimostrazione punto 2

Si dimostra in maniera del tutto analoga al punto 1, di conseguenza non vale la pena riscrivere le stesse frasi, considerando l'antitrasformata di Fourier anzichè la trasformata.

3.4.10 Proprietà della Variabilità nel Tempo

Dato un segnale $x(t)$ a banda limitata B , allora:

$$\frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{|t_2 - t_1|} \leq 2\pi B \int_{-B}^B |X(f)| df \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

Piccola premessa: in questa proprietà, per banda B intendiamo il semiintervallo contenente il supporto della trasformata di Fourier del segnale $x(t)$, ossia $X(f)$ (detto anche 'banda unilatera'); per ipotesi, dunque, potremo dire che $X(f)$ sia non nulla solo per $-B < f < B$, in questa proprietà. Si noti che questa definizione di banda è ben diversa da quella utilizzata parlando di principio di indeterminazione.

Prima di passare ad una dimostrazione formale, cerchiamo di chiarire il significato di questa proprietà: dato un segnale $x(t)$, sappiamo che:

$$\frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{|t_2 - t_1|} = \tan(\theta)$$

Ciò che possiamo dedurre da questa proprietà è il fatto che la quantità $2\pi B \int_{-B}^B |X(f)| df$ sia maggiore o uguale, per qualsiasi t_1 e t_2 , alla tangente appena introdotta. Ciò che capita dunque in soldoni è che più il segnale varia velocemente nel tempo, più la tangente di θ crescerà rapidamente, e più ripido sarà il segnale.

Come abbiamo già accennato in precedenza, parlare di segnali ripidi significa parlare di segnali che hanno bisogno di sinusoidi molto 'ripide' per presentarli, e dunque di alte frequenze. In questo modo, lo spettro sarà molto ampio. Ciò che capita è che dunque si può verificare la diseguaglianza appena incontrata, che ci permette di stabilire una maggiorazione sul numero di frequenze, e quindi sull'ampiezza della banda di un segnale.

Dimostrazione

Dati due punti arbitrari nel dominio del tempo, due istanti t_1 e t_2 , data $X(f)$ la trasformata di Fourier di $x(t)$, possiamo dire che:

$$|X(t_2) - X(t_1)| = \left| \int_{-B}^B X(f) (e^{j2\pi f t_2} - e^{j2\pi f t_1}) df \right|$$

Utilizziamo l'estensione per quanto riguarda il calcolo integrale della disuguaglianza di Minkowski, ossia della disuguaglianza triangolare:

$$\implies |X(t_2) - X(t_1)| \leq \int_{-B}^{+B} |X(f)| \cdot |e^{j2\pi ft_2} - e^{j2\pi ft_1}| df$$

Cerchiamo di lavorare sul modulo della differenza degli esponenziali complessi, e di estrapolarne una forma più utile ai fini della nostra dimostrazione:

$$|e^{j2\pi ft_2} - e^{j2\pi ft_1}| = |e^{j2\pi ft_1}| \cdot |e^{j2\pi f(t_2-t_1)} - 1|$$

Moltiplichiamo ora ambo i membri per $e^{-j2\pi f(t_2-t_1)}$, e otteniamo così:

$$\implies |e^{j\pi f(t_2-t_1)}| \cdot |e^{j\pi f(t_2-t_1)} - e^{-j\pi f(t_2-t_1)}| = 2 |\sin [\pi f(t_2 - t_1)]|$$

Cosa intelligente che si può fare, è maggiorare il seno con il suo argomento, ottenendo:

$$2 |\sin [\pi f(t_2 - t_1)]| \leq 2\pi |f| \cdot |t_2 - t_1|$$

Abbiamo praticamente terminato: dividiamo per $|t_2 - t_1|$ l'espressione iniziale, e otteniamo:

$$\frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{|t_2 - t_1|} \leq 2\pi \int_{-B}^{+B} |f| |X(f)| df$$

Usiamo a questo punto la disuguaglianza di Schwartz: l'integrale del prodotto, si può pensare come il prodotto degli integrali, ma dunque:

$$2\pi \int_{-B}^{+B} |f| |X(f)| df \leq \int_{-B}^{+B} |f| df \cdot \int_{-B}^{+B} |X(f)| df = 2 \cdot \int_0^{+B} f df \cdot \int_{-B}^{+B} |X(f)| df = 2\pi B \int_{-B}^{+B} |X(f)| df$$

Abbiamo così, mediante quest'ultima maggiorazione, verificato l'enunciato del teorema:

$$\frac{|x(t_2) - x(t_1)|}{|t_2 - t_1|} \leq 2\pi B \int_{-B}^{+B} |X(f)| df$$

Esempio Pratico

Studiamo un esempio pratico che potrebbe tornarci utile in seguito; consideriamo dunque il segnale $x(t)$ così definito:

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} df = 1$$

Lo spettro di una delta di Dirac è una funzione costante: ciò significa che, per produrre una δ avrò bisogno, nel dominio delle frequenze, di tutte le frequenze, in pari ampiezza, in pari quantità.

Nota: ogni qualvolta vi sia una discontinuità di tipo salto, o un punto a tangente verticale, siamo sicuri che il segnale avrà banda B infinita!

3.4.11 Proprietà di Dualità

La proprietà di dualità è tra le più utili per quanto riguarda il calcolo di trasformate di Fourier: essa rappresenta la spiegazione e la formalizzazione di tutte le simmetrie tra le varie proprietà finora affrontate, ed è il principio in grado di comprendere e studiare le dualità tra le varie trasformate.

Sappiamo che:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Proviamo a capire meglio tutto ciò: dato un segnale $x(t)$ nel dominio del tempo, applicando l'operatore \mathcal{F} si trova la trasformata di Fourier, $X(f)$:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = X(f)$$

Abbiamo trovato $X(f)$, ossia la trasformata di Fourier di $x(t)$. Facciamo una cosa un po' particolare: supponiamo a questo punto che X non sia funzione di f , ma di t , ossia pensiamo di avere $X(t)$, sostituendo semplicemente la variabile 'frequenza' alla variabile 'tempo'. Data $X(t)$, dunque, supponiamo di fare nuovamente la trasformata di Fourier; otterremo:

$$\mathcal{F}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j2\pi ft} dt = x(-f)$$

Ci è capitata una cosa molto particolare: ritrasformando la funzione abbiamo ritrovato la funzione di partenza, con l'argomento di segno opposto. Abbiamo così trovato una proprietà incredibile della formula di inversione della trasformata di Fourier:

$$\text{invfou}X(f) = \mathcal{F}\{X(-f)\} \iff \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{x(-t)\}$$

Cosa ci suggerisce questo principio di dualità? Se noi abbiamo calcolato una funzione come trasformata di Fourier, ritrasformandola avremo la funzione di partenza! A cosa può servire una cosa del genere? Vediamolo in un esempio pratico:

Esempio Pratico

Dato il segnale finestra rettangolare:

$$x(t) = p_T(t)$$

Come già detto spesso, abbiamo che la sua trasformata di Fourier sarà una sinc:

$$X(f) = \mathcal{F}\{p_T(t)\} = \frac{\sin(\pi ft)}{\pi f}$$

Abbiamo trovato il nostro solito seno cardinale.

Cambiamo le carte in tavola: supponiamo di avere, ora:

$$x(t) = \text{sinc}(t)$$

Siamo abituati a studiare questo tipo di segnale solo come trasformata di Fourier, non come segnale nel dominio del tempo! Utilizzando tuttavia la proprietà di dualità, potremo dire semplicemente che:

$$X(f) = \mathcal{F}\{\text{sinc}(t)\} = p_T(-t) = p_T(t)$$

Quest'ultimo passaggio è stato possibile poichè la porta è una funzione pari.

Ciò che ci permette di fare questa proprietà della trasformata di Fourier è 'riciclare' le vecchie trasformata di Fourier, considerandole come segnali variabili nel tempo, e di ottenere i duali! Questo tipo di trucco permette ad esempio di calcolare molto facilmente la trasformata di una costante:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \iff \mathcal{F}\{1\} = \delta(-t) = \delta(t)$$

Capitolo 4

Teoria dei Sistemi

Al fine di poter studiare correttamente l'analisi dei segnali, oltre alle nozioni di Analisi Armonica, sono necessarie conoscenze riguardanti la teoria dei sistemi. Non conoscere in modo sufficientemente approfondito questa branca della teoria dei segnali rappresenta una grossa lacuna, in un analista di segnali: i segnali sono infatti entità generate da sistemi, mediante l'effetto di fenomeni esterni (segnali di ingresso), che provocano una risposta del sistema sotto forma di un qualche segnale (segnali di uscita). Spesso in ingegneria i sistemi vengono interpretati mediante schemi a blocchi, dove ogni blocco è un sistema o un sotto-sistema (in quanto un sistema può essere anche formato da blocchi di più sistemi, come vedremo in seguito), in grado di elaborare in qualche modo un ingresso e producendo un'uscita.

Nella nostra convenzione saremo soliti indicare i segnali in ingresso come $x(t)$, (segnali di input), ed i segnali di uscita come $y(t)$ (segnali di output). Il segnale $x(t)$ entra nel sistema \mathcal{N} , che lo elabora, producendo così il segnale di uscita $y(t)$. In pratica, il sistema si può considerare come una sorta di operatore, che viene applicato ad una funzione, ai fini di modificarla ed ottenere un'uscita:

$$y(t) = \mathcal{N}[x(t)]$$

Detto in altre parole, $y(t)$ è il segnale $x(t)$ al quale è stato applicato il sistema \mathcal{N} .

Per proporre un esempio, se tiriamo una martellata contro un tavolo, sentiamo un rumore: $x(t)$ è la martellata che noi tiriamo al tavolo; il tavolo, eccitato dalla martellata, sarà il sistema, \mathcal{N} , mentre il rumore che sentiremo in reazione alla martellata, sarà la risposta al tavolo al nostro segnale in ingresso, $y(t)$.

Dato un sistema, si può trattare in diversi modi: volerlo determinare, volerlo analizzare, a partire da informazioni già note sul segnale in ingresso

$x(t)$ e su quello in uscita $y(t)$ (analisi del sistema), o progettarlo, su parametri che ci vengono forniti da chi ci commissiona un determinato lavoro (sintesi di un sistema).

4.1 Classificazioni dei Sistemi

Esistono numerosissimi tipi di sistemi che si possono analizzare o sintetizzare; al fine di poterne trarre risultati importanti si è scelto, per questo motivo, di catalogarli, introducendo classificazioni dei sistemi, gruppi, che li contraddistinguono per caratteristiche.

4.1.1 Sistemi lineari / non lineari

Viene definito lineare un qualunque sistema che soddisfi una particolare proprietà: dato un segnale $x(t)$ definito come combinazione lineare di due segnali, $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$$

Dato un sistema \mathcal{N} , esso si definisce lineare se vale la relazione:

$$y(t) = \mathcal{N} [Ax_1(t) + Bx_2(t)] = A\mathcal{N} [x_1(t)] + B\mathcal{N} [x_2(t)]$$

Talvolta questa regola, trovandosi dinnanzi un problema, può risultare difficile o non immediata, perciò di solito si cerca di seguire questi step:

1. Definire il segnale $x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$;
2. Definire i segnali di uscita $y_1(t) = A\mathcal{N} [x_1(t)]$, e $y_2(t) = B\mathcal{N} [x_2(t)]$;
3. Se $\mathcal{N} [x(t)] = y_1(t) + y_2(t)$, allora il sistema è lineare

Spesso, verificata l'ipotesi di linearità, si è soliti indicare un sistema lineare mediante la lettera \mathcal{L} . La particolarità molto interessante dei sistemi lineari, è il fatto che la linearità permette di utilizzare il principio di sovrapposizione degli effetti, e dunque è possibile mettere in atto una strategia di tipo divide et impera sul nostro studio di sistemi.

4.1.2 Sistemi tempo-varianti / tempo-invarianti

Altra classificazione fondamentale è quella di sistemi varianti nel tempo. Supponiamo, per fare un esempio folkloristico, di essere appassionati di musica, e comprare un amplificatore sonoro, per poter ascoltare il nostro artista preferito. Il sistema in questione sarà dunque l'amplificatore: inserito il disco, esso lo processerà, riprodurrà, e il segnale riprodotto sarà l'uscita. Supponiamo ora di possedere, tra 20 anni, lo stesso amplificatore, e di voler riascoltare lo stesso artista: se il sistema è tempo-invariante, la musica verrà riprodotta con la stessa qualità di partenza. Supponendo che $x(t)$ sia il disco del nostro autore preferito, \mathcal{N} sia il nostro amplificatore, $y(t)$ sia la musica che ascoltiamo, e un tempo T un ritardo, ossia i 20 anni di attesa tra le due prove di ascolto del disco, un sistema si dice tempo-invariante se vale la relazione:

$$y(t - T) = \mathcal{N}[x(t - T)]$$

Ossia se l'uscita, ritardata del tempo di ritardo T , è uguale a segnale in uscita dato l'ingresso $x(t)$ ritardato di un fattore T , dal sistema \mathcal{N} . Gli step da seguire ora saranno i seguenti:

1. Definire il segnale $y_1(t) = \mathcal{N}[x(t - T)]$;
2. Definire il segnale $y_2(t) = y(t - T)$;
3. Verificare l'eguaglianza $y_1(t) = y_2(t)$

4.1.3 Sistemi con memoria / senza memoria

Questa classificazione è usata molto spesso, anche se ai fini dell'analisi dei segnali al nostro livello non sarà utile; non per questo non merita quantomeno una nota.

Un sistema è detto senza memoria se l'uscita $y(t)$ all'istante t dipende esclusivamente dall'ingresso $x(t)$, nell'istante t , e ha memoria quando questo non è vero. In altre parole, se abbiamo bisogno della traccia del passato, o del futuro, oltre che dell'informazione sul presente del segnale, sul suo valore istantaneo, allora non è sufficiente il solo valore $x(t)$ ai fini di determinare $y(t)$, e dunque si parla di sistemi con memoria: che hanno bisogno, ai fini di essere determinati, anche di una traccia del passato del sistema.

Un esempio di sistemi con memoria, può riguardare il mondo della finanza: per valutare l'andamento medio di un pacchetto di azioni, si utilizza la media 5-days: essa dunque, per poter essere determinata, richiede una memoria di cinque giorni dell'andamento delle sue azioni; mediante il teorema della media integrale, poi sarà possibile determinarla:

$$5 - \text{days}(t) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

Dove in questo caso T è proprio costituito dai 5 giorni della media. Altri sistemi tipicamente con memoria sono quelli che coinvolgono derivate, anzichè integrali di media, come si potrebbe ad esempio vedere nello studio del transitorio di un circuito RC.

4.2 Sistemi Lineari Tempo-Invarianti (LTI)

Di fondamentale importanza tra le tre classificazioni che abbiamo introdotto sono dunque quella di linearità e di variabilità nel tempo (anche detta stazionarietà); questo perchè, combinandole, è possibile definire una classe di sistemi molto importanti nell'ingegneria: i sistemi LTI, ossia lineari, ed invarianti nel tempo. Essi sono importantissimi sia per quanto riguarda la sintesi che l'analisi; si tratterebbe in realtà di fenomeni introvabili, di sistemi non esistenti in natura, ma che tuttavia, mediante approssimazioni, sono raggiungibili ed accettabili. La particolarità che contraddistingue questi sistemi è l'esistenza di una sorta di funzione magica, una funzione in grado di determinare completamente il sistema, e quindi, a partire da essa, di conoscerlo: grazie a questa sorta di funzione magica, sarà possibile, mediante una sua applicazione al segnale in ingresso, conoscere il segnale in uscita dal sistema.

Alla base della teoria dei sistemi LTI (che indicheremo comunemente mediante la già citata lettera \mathcal{L}) è una proprietà della delta di Dirac:

$$x(t) = x(t) \otimes \delta(t)$$

Dove \otimes è il prodotto di convoluzione, $x(t)$ il segnale in ingresso, e $\delta(t)$ una delta di Dirac, centrata in $t = 0$. Questa proprietà ci dice che la delta è l'elemento neutro del prodotto di convoluzione: come 1 è l'elemento neutro del prodotto algebrico ($A \cdot 1 = A$) e 0 è l'elemento neutro della somma algebrica ($A + 0 = A$), la δ è l'elemento neutro per la convoluzione. Ricordiamo, prima di iniziare i conti, che il prodotto di convoluzione si definisce come:

$$x(t) \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t') \delta(t') dt'$$

Poichè consideriamo per ipotesi sistemi lineari, possiamo immediatamente dire che:

$$y(t) = \mathcal{L} [x(t)]$$

Dal momento che però $x(t) = x(t) \otimes \delta(t)$, possiamo dire che:

$$y(t) = \mathcal{L} [x(t) \otimes \delta(t)]$$

Da qua, svolgiamo i conti mediante la definizione di convoluzione. Ricordiamo che il prodotto di convoluzione è un operatore commutativo, e dunque possiamo dire tranquillamente che:

$$y(t) = \mathcal{L} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t')x(t')dt' \right]$$

Il nostro sistema agisce esclusivamente sul dominio del tempo, ossia su t , non su t' , dunque possiamo portare l'operatore rappresentante il sistema dentro il segno di integrale, poichè abbiamo la garanzia che il sistema agirà, a queste condizioni, solo su $\delta(t-t')$, unica funzione di t :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L} [\delta(t-t')] x(t') dt'$$

Definiamo ora la funzione $h(t)$ come:

$$h(t) = \mathcal{L} [\delta(t)]$$

Detto in parole povere, astruendo dal matematiche, $h(t)$ è l'uscita del sistema quando l'ingresso è una delta di Dirac, e dunque quando si ha un ingresso di tipo puramente impulsivo. Appliciamo ora l'ipotesi di invarianza nel tempo del sistema, per poter affermare con certezza che vale la relazione:

$$h(t-t') = \mathcal{L} [\delta(t-t')]$$

A questo punto, abbiamo che:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')x(t')dt' = h(t) \otimes x(t)$$

Ossia, è possibile esprimere il segnale in uscita $y(t)$ come la convoluzione di $h(t)$, ossia della risposta all'impulso del sistema, con il segnale in ingresso $x(t)$. $h(t)$ è la funzione magica che abbiamo prima citato, il motivo per cui i sistemi LTI sono importanti: conoscendola, il sistema è perfettamente definito, in quanto è possibile calcolare, mediante passaggi analitici, l'uscita $y(t)$ per un qualsiasi segnale $x(t)$. Il sistema è perfettamente definito dalla sola risposta all'impulso $h(t)$. In matematica, una funzione di questo tipo è anche detta comunemente Funzione di Green.

La funzione di risposta all'impulso del sistema è alla base di tutti i sistemi di processamento dei segnali in real time, ossia in tempo reale: in una radio,

il segnale viene captato dall'antenna, viene modulato in modo da riportare il suo contenuto in frequenza in modo utile, viene processato, e fatto uscire, ottenendo il suono che siamo abituati ad ascoltare. In processori di tipo real-time, capita qualcosa di questo genere:

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')x(t')dt' = \int_{-\infty}^0 h(t-t')x(t')dt' + \int_0^{+\infty} h(t-t')x(t')dt'$$

Usando la semplice proprietà di additività dell'integrale indefinito.

Nel primo integrale, osserviamo che $t' \leq 0$, e quindi $t - t' \geq t$, ossia, essendo t' negativo, il tempo di processamento è superiore al tempo t in cui ci troviamo: questo integrale processa la parte del segnale che noi potremmo chiamare futuro: un punto del tempo più avanti di quello che stiamo sentendo. Ciò chiaramente non è possibile in sistemi di tipo real-time, in quanto riceviamo il segnale del presente, possiamo immagazzinare in qualche modo quello del passato, non abbiamo però la benchè minima conoscenza su cosa accadrà in futuro.

Nel secondo integrale, $t' \geq 0$, quindi $t - t' \leq t$, e quindi questo integrale, al contrario del primo, processa solo il passato.

Parlando di processori real-time, $h(t)$ è una funzione puramente causale, ossia una funzione il cui supporto è nullo per $t < 0$. Questo perchè il primo integrale in un dispositivo processante un segnale in real-time deve essere nullo, e questa è una condizione che rende ciò possibile. Se abbiamo però a disposizione tutto il segnale, e vogliamo per esempio progettare un processore in grado di effettuare post-processing, allora anche il primo integrale potrà essere utile, in quanto disporremo dal principio dell'intero segnale: passato, presente, e futuro rispetto al momento in cui ci troviamo (come ad esempio un file mp3).

4.3 Prodotto di convoluzione

Abbiamo già spesso parlato del prodotto di convoluzione, e lo abbiamo utilizzato come operatore fondamentale per lo studio dei sistemi LTI; infatti, abbiamo detto che una qualsiasi uscita $y(t)$ di un sistema LTI si può esprimere, a partire dall'ingresso $x(t)$, come:

$$y(t) = h(t) \otimes x(t)$$

La convoluzione è dunque molto utile, ma anche molto difficile da calcolare: ricordiamo che, date le due funzioni $x(t)$ e $h(t)$, il loro prodotto di convoluzione vale:

$$y(t) = h(t) \otimes x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')x(t')dt'$$

Calcolare un integrale di questo genere è un'operazione tutt'altro che facile: abbiamo il prodotto di due funzioni, nel dominio t' , di cui una ribaltata rispetto all'asse delle ordinate, e traslata di t (dove ricordiamo che t è il tempo reale, il tempo in cui ci troviamo, quello che potremmo chiamare il nostro presente). Calcolare un integrale di convoluzione è un problema che analiticamente può risultare molto difficile: mediante alcune simmetrie o proprietà intelligenti delle funzioni da integrare, potrebbe essere possibile ricavare qualche risultato, ma tendenzialmente spesso si tratta di calcoli molto molto complessi sotto il punto di vista dell'analisi matematica. Per questo motivo, il calcolo della convoluzione è un problema da affrontare mediante strategie strettamente geometriche: proponiamo qua un tentativo di schematizzazione del procedimento che si effettua per studiare una convoluzione:

1. Fissare un valore t : esso come già detto è il tempo, ma di fatto, nel dominio t' , è solo una costante, che trasla la funzione $h(t')$;
2. Calcolare il valore della funzione $h(t-t')$;
3. Determinare il prodotto $h(t-t')x(t')$: questo prodotto rappresenta di fatto l'altezza del prodotto geometrico che vogliamo ottenere: questo prodotto è una delle due dimensioni che ci permettono di determinare il prodotto di convoluzione;
4. Calcolare l'area del punto precedente: la base è il segmento sull'asse delle ascisse in comune tra la figura $x(t')$ (fissa), e la figura $h(t-t')$ (mobile al variare del tempo, che la trasla in avanti). L'altezza da considerare sarà il prodotto delle due altezze (a meno che non ci siano figure geometriche molto particolari)

Questo è un metodo generale applicabile molto spesso per studiare un prodotto di convoluzione. Tendenzialmente, il prodotto di convoluzione è un'operatore che tende ad aumentare la regolarità delle curve in questione: l'operazione di prodotto, il fatto di calcolare un'area, tende a regolarizzare il segnale, migliorandolo. In un certo senso, dunque, quando calcoliamo la $y(t)$ come convoluzione della risposta all'impulso $h(t)$ e del segnale di ingresso $x(t)$, otteniamo una sorta di $x(t)$ pesato su $h(t)$; abbiamo così capito come funziona il processamento di un segnale, trattato da un sistema LTI.

Continuiamo la trattazione con un'osservazione: finora, abbiamo lavorato esclusivamente nel dominio del tempo, parlando di sistemi LTI, e abbiamo

capito che un sistema LTI si può esprimere in modo univoco mediante la sua funzione di risposta all'impulso, $h(t)$. Non ci siamo ancora chiesti però cosa potrebbe succedere se al posto di studiare il segnale nel dominio del tempo, lo studiassimo nel dominio delle frequenze, ossia non ci siamo chiesti cosa potrebbe succedere se processassimo lo spettro del segnale al posto del segnale al variare del tempo. Sappiamo, dalla nostra conoscenza delle proprietà della trasformata di Fourier, che il prodotto di convoluzione di due funzioni nel dominio del tempo, diventa nel dominio di Fourier un prodotto algebrico:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \iff Y(f) = X(f) \cdot H(f)$$

La funzione $H(f)$, definita come:

$$H(f) = \mathcal{F} \{h(t)\}$$

Viene comunemente detta funzione di trasferimento del sistema, e anch'essa è in grado di rappresentare in modo univoco il sistema, anche se, in questo caso, il legame tra uscita ed ingresso (nel dominio delle frequenze) sarà dato da un banale prodotto algebrico. Si noti una cosa: non sempre conviene studiare nel dominio delle frequenze, nonostante la semplicità dell'operatore che lega ingresso ed uscita: se si ha a che fare con oggetti dalla natura molto complicata, quali un seno cardinale, conviene sempre riportarsi nell'altro dominio, in modo da avere sì una convoluzione, ma anche oggetti molto semplici con cui aver a che fare.

4.4 Filtri ideali

Consideriamo un esempio pratico: abbiamo finora parlato di teoria dei sistemi LTI, abbiamo detto come rappresentarli in modo matematico, ma non abbiamo ancora detto a cosa può servire questo nostro studio. Supponiamo di utilizzare l'amplificatore comprato nel precedente paragrafo, per ascoltare un brano di nostro gusto, per esempio Teardrop dei Massive Attack. Supponiamo che il disco contenente il nostro brano abbia subito una notevole usura, quindi si sente uno sgradevole rumore di sottofondo sulle note del brano, molto acuto per esempio. Possiamo dunque distinguere, nel dominio del tempo, il segnale in ingresso come:

$$x(t) = teardrop(t) + noise(t)$$

Il segnale $noise(t)$ è un rumore, un suono indesiderato, come già detto molto acuto. L'amplificatore che abbiamo comprato però al suo interno con-

tiene un processore, in grado di finestrare lo spettro del segnale solo nella sua parte utile, eliminando il segnale $noise(t)$:

$$teardrop(t) + noise(t) \implies \mathcal{L} \implies teardrop(t)$$

Abbiamo detto che questo disturbo si trova alle alte frequenze, dunque possiamo immaginare che questo processore, in questo ambito, abbia funzionato come un semplice filtro passa basso: una finestra in grado di eliminare una parte di segnale, per essere precisi al di sopra di una certa frequenza. Eliminando così questo segnale $NOISE(f)$, siamo stati in grado di eliminare il suono acuto e sgradevole, al prezzo di perdere un'informazione del segnale (come vedremo in seguito). Possiamo intuire che la funzione di trasferimento $H(f)$ del sistema, sarà semplicemente una porta traslata in modo da poter contenere solo suoni ad una frequenza gradevole all'orecchio umano.

Abbandonando temporaneamente il nostro esempio folkloristico, passiamo alle cose serie: cosa si intende, precisamente, per filtro? Per filtro si intende un qualunque sistema che selezioni un certo range di frequenze, e permetta solo ad esse di passare nel sistema, e fuori dal sistema. Esistono quattro filtri fondamentali da conoscere, i quattro filtri ideali. Essi sono:

1. Filtro passa basso (lowpass filter): permette di far passare tutte le frequenze fino ad una certa frequenza f_C , detta frequenza di cut-off (ossia frequenza di taglio); è l'ideale per disturbi ad alta frequenza;
2. Filtro passa alto (highpass filter): è il duale del filtro precedente, ed è in grado di eliminare le frequenze al di sotto di una certa f_C (anche qua detta frequenza di cut-off). Dualmente al primo, è l'ideale per disturbi situati in bassa frequenza;
3. Filtro passa banda (bandpass filter): dato un segnale con una parte utile soltanto entro un certo intervallo di frequenze, f_1 e f_2 , il filtro passa banda permette solo ad esse di passare;
4. Filtro elimina banda (stopband filter): è in grado, dualmente al precedente, di eliminare un disturbo localizzato in un singolo intervallo di frequenze, f_1 e f_2 .

4.5 Condizioni per la progettazione di un sistema

Questi filtri sono assolutamente ideali: nella realtà è impossibile progettare filtri così efficaci, in grado di finestrare così perfettamente un segnale, di

tagliare completamente al di sopra o al di sotto di una determinata frequenza. L'analisi dei segnali è fondamentale nella progettazione di sistemi di questo tipo: essa è il mezzo matematico in grado di fornirci le condizioni di realizzabilità del filtro, ossia le caratteristiche che il sistema deve presentare. Innanzitutto, ricordiamo che nel mondo reale esistono solo segnali reali, e che quindi non è possibile effettuare una misura di un segnale complesso: siamo in grado di misurare moduli, fasi, ma non le due cose assieme, e dunque non è possibile, con un'unica misura, rilevare un segnale appartenente a \mathbb{C} .

Servono dunque condizioni di realizzabilità per un sistema, condizioni fondamentali non trascurabili. Innanzitutto, la funzione di risposta all'impulso, $h(t)$, deve essere una funzione reale, per essere compatibile con il mondo fisico con cui dobbiamo interfacciarci. Le condizioni sulla funzione di trasferimento, dunque, saranno le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}[H(f)] \text{ pari} \\ \operatorname{Im}[H(f)] \text{ dispari} \\ |H(f)| \text{ pari} \\ \angle H(f) \text{ dispari} \end{array} \right.$$

Il sistema dunque, come si è capito, deve essere reale.

Altra condizione molto importante che si chiede al sistema è quella di poter essere in grado di lavorare in real-time, perchè si possa per l'appunto fare real-time processing. Affinchè sia possibile fare real-time processing, la funzione di trasferimento deve essere di tipo causale, ossia:

$$h(t) = 0 \forall t < 0$$

Si parla infatti, dando questa condizione, di sistemi causali.

Ultima delle principali richieste che si può (o meglio deve) chiedere ad un sistema, è la stabilità; esistono diverse definizioni e condizioni di stabilità, per studiarla e per garantirla, noi ne considereremo solo una: la condizione BIBO.

BIBO sta per Bounded Input, Bounded Output: una funzione di trasferimento (o di risposta ad impulso, indifferentemente) deve essere in grado di garantire che, se $|x(t)| < M_x$, ossia se il segnale $x(t)$ è limitato, e quindi maggiorabile con una costante M_x , allora la sua uscita dal sistema, $|y(t)|$, deve essere maggiorabile con una costante (generalmente diversa) M_y , e quindi anch'essa essere limitata.

Il sistema è stabile in senso BIBO se per qualsiasi ingresso limitato $x(t)$, l'uscita $y(t)$ è anch'essa limitata. Ciò equivale a scegliere una risposta all'impulso $h(t)$ tale che essa sia assolutamente sommabile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$$

Dimostrazione della richiesta della condizione BIBO

Dobbiamo dimostrare che l'ultima relazione sia necessaria e sufficiente, ai fini di ottenere un segnale limitato in uscita dato un qualsiasi segnale limitato in ingresso. La dimostrazione si focalizza in due punti, ossia il dimostrare il fatto che è sufficiente, e il fatto che è necessaria. Come ipotesi abbiamo un bounded input:

$$|x(t)| \leq M_x$$

Quindi, l'uscita $|y(t)|$, si potrà maggiorare nel seguente modo:

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)x(t-r)dr \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(r)x(t-r)| dr \leq M \int_{-\infty}^{+\infty} |h(r)| dr$$

Se quindi la $h(r)$ è sommabile, il sistema è sicuramente stabile. Per quanto riguarda dimostrare che la condizione oltre ad essere sufficiente, è anche necessaria, utilizziamo una dimostrazione per assurdo: supponiamo che il sistema sia stabile, con $h(t)$ non sommabile. Dato un segnale arbitrario ma limitato in ingresso, l'uscita deve essere quindi limitata, per ipotesi. Scegliamo come segnale dunque un classico tra i worst case: il segnale $\text{sign}(t)$, traslato:

$$x(t) = \text{sign}[h(t_1 - t)]$$

L'uscita del segnale varrà dunque, per $t = t_1$:

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(r)x(t-r)dr \Big|_{t=t_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \text{sign}[h(t - (t_1 - r))] dr \Big|_{t=t_1} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(r) \text{sign}[h(r)] dr = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(r)| dr \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

Il sistema risulta dunque essere instabile, e la nostra ipotesi fallire: se la $h(t)$ non fosse assolutamente sommabile, allora il sistema non potrebbe essere stabile.

Proponiamo un esempio teorico di come siano necessarie le condizioni appena proposte, per realizzare sistemi: consideriamo un filtro passa basso ideale, la cui risposta all'impulso ha una forma del tipo:

$$h(t) = 2B \frac{\sin(2\pi Bt)}{2\pi Bt}$$

Esso è un segnale non causale, e dunque non fisicamente realizzabile: questo esempio teorico mostra come l'idealità non possa esistere. Una strategia per poter far funzionare questo filtro, per renderlo progettabile, è de-idealizzarlo, introducendo un ritardo T sufficientemente elevato, e dunque rendendolo quasi-reale. Introducendo dunque un ritardatore in cascata con il filtro, esso diventa quasi causale, e la sua funzione di trasferimento avrà una forma del tipo:

$$H(f) = H_{id}(f)e^{-j2\pi fT}$$

Dove $H_{id}(f)$ è la funzione di trasferimento del filtro passa basso ideale.

4.6 Risposta in Frequenza

Esiste una classe di segnali un po' speciale, potremmo dire ironicamente un po' mafiosa: una classe che, in ingresso ad un sistema, riesce ad uscirne impunita, non toccata: i segnali di questa classe mantengono le proprie caratteristiche (o almeno alcune di esse). Questa classe dei segnali, è l'insieme dei segnali armonici, dei segnali sinusoidali: un segnale $x(t)$ in ingresso ad un sistema LTI, in uscita sarà un $y(t)$, ancora sinusoidale. Sembra una cosa molto particolare da dirsi, ma non è così difficile da comprendere, dopo aver introdotto un maggior formalismo: consideriamo un ingresso $x(t)$ sinusoidale, nella fattispecie un esponenziale complesso, nella sua forma più generale:

$$x(t) = Ae^{j(2\pi f_0 t + \psi)}$$

L'uscita $y(t)$ sarà esprimibile, come sappiamo, come:

$$y(t) = h(t) \otimes x(t)$$

La $h(t)$ è la nostra solita risposta all'impulso; spostiamoci ora nel dominio delle frequenze, considerando la trasformata dell'impulso, $X(f)$:

$$X(f) = Ae^{j\psi} \delta(f - f_0)$$

Nel dominio delle frequenze, l'uscita sarà una cosa del tipo:

$$Y(f) = H(f)X(f) = H(f) \cdot Ae^{j\psi} \delta(f - f_0)$$

Utilizzando la proprietà della δ , vediamo facilmente che:

$$Y(f) = H(f_0) A e^{j\psi} \delta(f - f_0)$$

Prima avevamo $H(f)$, una funzione, ora $H(f_0)$, che è un parametro, un numero, nella fattispecie complesso. Possiamo dunque dire che esso è esprimibile, nella notazione esponenziale, come modulo e fase:

$$H(f_0) = |H(f_0)| e^{j\angle H(f_0)}$$

$$\implies Y(f) = A |H(f_0)| e^{j(\psi + \angle H(f_0))} \delta(f - f_0)$$

Notiamo che l'unica funzione, l'unica parte variabile, è la $\delta(f - f_0)$; per tornare indietro nel dominio del tempo, possiamo utilizzare la proprietà di linearità, e otterremo così che l'uscita nel dominio del tempo è pari a:

$$y(t) = A |H(f_0)| e^{j(\psi + \angle H(f_0))} e^{j2\pi f_0 t}$$

In uscita dal sistema avremo dunque sempre un'armonica, isofrequenziale a quella in ingresso, ma modificata in ampiezza e in fase dal sistema LTI. Si noti che la modulazione in ampiezza e in fase dipende solo dalla frequenza f_0 : poichè abbiamo di mezzo una $\delta(f)$, la proprietà costringe le funzioni ad essere considerate nel solo punto in cui è dislocata la delta, ossia $f = f_0$, e dunque l'isofrequenzialità si mantiene, e gli altri parametri vengono modificati in base alla frequenza f_0 .

La cosa veramente divertente del tutto è il fatto che, come sappiamo, il sistema è lineare, dunque vale la sovrapposizione degli effetti: il discorso fatto per una singola sinusoidale, si può tranquillamente estendere, grazie alla linearità, per molteplici, infinite sinusoidi non isofrequenziali tra loro. Ognuna di queste singole sinusoidi verrà modificata in modo diverso a seconda del contributo della funzione di trasferimento $H(f)$ per ogni singola frequenza, ma la frequenza di per sè non subirà variazione: sinusoidi diverse infatti viaggiano, in un sistema LTI, in binari diversi (come due treni). Considerando dunque due diverse sinusoidi, non isofrequenziali, in ingresso:

$$x(t) = A e^{j(2\pi f_1 t + \psi_1)} + B e^{j(2\pi f_2 t + \psi_2)}$$

L'uscita sarà modificata come segue:

$$y(t) = A |H(f_1)| e^{j(\psi_1 + \angle H(f_1))} e^{j2\pi f_1 t} + B |H(f_2)| e^{j(\psi_2 + \angle H(f_2))} e^{j2\pi f_2 t}$$

Si può inoltre ragionare, con l'analisi funzionale, in modo molto più generale: è possibile dimostrare, mediante teoremi di analisi funzionale per l'appunto, che le sinusoidi (le armoniche) sono autofunzioni degli operatori lineari tempoinvarianti rappresentanti un sistema LTI.

Siamo a questo punto in grado di unire le nostre conoscenze di analisi in frequenza e di teoria dei sistemi LTI: dato un segnale, l'analisi in frequenza è in grado di scomporlo, mediante la trasformata di Fourier, in una somma di infinite sinusoidi. Questa somma, rappresenta il segnale in ingresso, visto nel dominio delle frequenze. Supponiamo di avere il nostro segnale $teardrop(t)$ in ingresso dal cd nel nostro amplificatore: idealizzando l'amplificatore, o meglio rendendolo in prima approssimazione LTI, mediante un'opportuna risposta all'impulso $h(t)$ è possibile aumentare il volume, togliere rumore, e così via. Dal segnale $miles(t)$, passato nel dominio delle frequenze, diventando quindi $MILES(f)$, esso sarà processato come abbiamo visto precedente, per esempio modificando l'ampiezza dello spettro in determinate frequenze. Volendo riassumere dunque il processamento dello spettro di un segnale in alcuni passi, potremmo farlo in questo modo:

1. Dato l'input $x(t)$, si scompone come somma di sinusoidi, mediante la trasformata di Fourier;
2. L'input considerato nel dominio delle frequenze, $X(f)$, viene processato con il sistema rappresentato da $H(f)$, mediante l'operazione di prodotto algebrico:

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

3. Antitrasformare e trovare l'uscita nel dominio del tempo $y(t)$ come:

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1} \{X(f)H(f)\}$$

e ottenere così il segnale elaborato, processato dal sistema.

4.7 Interconnessione di sistemi tra loro

Spesso, costruendo o progettando sistemi, si è soliti utilizzare una strategia del tipo divide et impera: costruire un sistema molto complesso a partire da diversi sottosistemi, che vengono connessi tra loro, apparendo all'esterno come un unico effettivo sistema. I due principali metodi di interconnessione tra sistemi sono la serie ed il parallelo:

- Nella connessione in serie, abbiamo l'ingresso che entra per l'appunto in una serie di sistemi: il segnale $X(f)$ verrà processato dal primo sistema, $H_1(f)$, e l'uscita da questo sistema, $Y_1(f)$, verrà a sua volta processata da $H_2(f)$ dando vita a $Y_2(f)$ e così via, fino a ottenere la $Y(f)$ definitiva dalla serie di sistemi.

Possiamo pensare dunque, data una serie di due sottosistemi, che l'uscita sia uguale a:

$$Y(f) = H_2(f)Y_1(f)$$

Ma ricordiamo che $Y_1(f)$ è uguale a:

$$Y_1(f) = X(f)H_1(f)$$

Possiamo dunque pensare all'uscita $Y(f)$ come provocata da un sistema equivalente $H_{eq}(f)$:

$$Y(f) = H_{eq}(f)X(f)$$

Dove la funzione $H_{eq}(f)$, ossia la funzione di trasferimento dell'intero sistema, è data dal prodotto di tutte le funzioni di trasferimento della serie:

$$H_{eq}(f) = H_1(f) \cdot H_2(f)$$

- Nella connessione in parallelo, abbiamo il seguente fatto: il segnale $X(f)$ viene inviato su due rami, sui quali vi sono due diversi sistemi, $H_1(f)$ e $H_2(f)$ (ovviamente si può generalizzare banalmente a n sistemi, come il caso della serie); al termine di questi sottosistemi, vi è un nodo sommatore, ossia un nodo che somma i segnali $Y_1(f)$ e $Y_2(f)$, ossia le uscite del segnale $X(f)$ processato in un ramo da $H_1(f)$ e nell'altro da $H_2(f)$.

In questo caso, dunque, potremo dire che:

$$Y(f) = Y_1(f) + Y_2(f)$$

Dove le due funzioni valgono rispettivamente:

$$Y_1(f) = H_1(f)X(f)$$

$$Y_2(f) = H_2(f)X(f)$$

Volendo cercare dunque una funzione tale per cui il parallelo si possa esprimere come un unico sistema, dovremo fare ciò:

$$Y(f) = Y_1(f) + Y_2(f) = X(f) [H_1(f) + H_2(f)] = X(f)H_{eq}(f)$$

Dove questa volta $H_{eq}(f)$ si definisce come la somma delle funzioni di trasferimento:

$$H_{eq}(f) = H_1(f) + H_2(f)$$

In un parallelo, un sistema equivalente si esprime mediante la somma dei due sottosistemi.

Esempio Teorico 1 Consideriamo un esempio teorico molto noto di sistema LTI: un filtro passa basso reale, ossia un filtro passa basso formato da un circuito RC, con un condensatore C in serie ad un resistore R . Studiamo questo circuito basilare ai fini di comprendere meglio i sistemi LTI.

Il circuito RC si può rappresentare facilmente mediante un'equazione differenziale: il condensatore introdurrà infatti una derivata nell'equazione alla maglia del circuito, che avrà una forma del tipo:

$$x(t) = RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

Consideriamo ora quest'equazione nel dominio delle frequenze, applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri dell'equazione:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right\}$$

Da qua si ricava dunque che:

$$RCj2\pi fY(f) + Y(f) = X(f)$$

La funzione di trasferimento $H(f)$, ossia il rapporto tra $Y(f)$ e $X(f)$, sarà data da:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + RCj2\pi f}$$

Di questa funzione, ci interessa soprattutto il modulo quadro:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + R^2 C^2 4\pi^2 f^2}$$

Osserviamo che questa funzione presenta un punto di flesso nel punto:

$$f = \frac{1}{2\pi RC}$$

Definiamo a questo punto il termine di banda B del sistema come il punto di flesso del modulo quadro della funzione di trasferimento:

$$B = \frac{1}{2\pi RC}$$

Questo termine è anche chiamato larghezza di banda del sistema, o banda a 3 dB, poichè B è il valore di frequenza tale per cui il modulo quadro della potenza del sistema si dimezza. In decibel, si esprime un dimezzamento della banda con la sottrazione di 3 dB.

L'andamento di $|H(f)|^2$ sarà simile ad una campana: la funzione fino ad arrivare al punto di flesso B diminuirà leggermente, manterrà cioè inalterate le armoniche fino al punto B , che si può considerare come la frequenza di cut-off del filtro. In un intorno di $f = 0$ avremo dunque le frequenze praticamente inalterate (anche se in realtà, a causa di effetti di non idealità del filtro, queste potranno subire una variazione), per poi avere, da $f = B$ in poi, una discesa asintotica a 0, per frequenze sempre più elevate.

Supponendo di introdurre nel sistema come $X(f)$ due sinusoidi, di frequenza f_1 e f_2 , dove $f_1 \ll B$, e $f_2 \gg B$: la prima rimarrà praticamente inalterata, poichè siamo ancora in un range di frequenze che non viene toccato dal filtro, mentre la seconda subirà un notevole taglio, una notevole riduzione in ampiezza. Questo dalla funzione di trasferimento che abbiamo appena studiato si evince benissimo: la funzione di trasferimento rappresenta infatti un involuppo per gli spettri delle funzioni in ingresso, e quindi gli ingressi saranno in un certo senso limitati da $H(f)$.

Ci poniamo un'altra domanda, per completare questo esempio teorico: qual è la funzione di risposta all'impulso del sistema LTI costituito dal circuito RC ? Calcoliamola in un momento:

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{1 + j2\pi f RC} \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{RC} \frac{1}{\frac{1}{RC} + j2\pi f} \right\} = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Si definisce di solito in Elettrotecnica (o Elettronica) $\tau = RC$, come la costante di tempo dell'elemento con memoria (in questo ambito il conden-

satore): questa è la famosa formula del transitorio che si utilizza per calcolare fenomeni per l'appunto temporanei del circuito.

Come potevamo immaginare, conoscendo la teoria delle equazioni differenziali omogenee a coefficienti costanti (quale l'equazione alla maglia del filtro RC), $h(t)$ è una funzione esponenziale: essa rappresenta infatti l'andamento di carica/scarica del condensatore.

A seconda di quanto $\tau = RC$ è elevato, ossia quanto più il sistema è reattivo, quanto più è rapido a caricarsi, a reagire all'ingresso, il sistema reagirà in modo diverso dal segnale che introdurremo.

Un test molto interessante è introdurre come ingresso al filtro una porta: tanto più velocemente il condensatore si caricherà, tanto più ripida verrà la porta, e più vicina al segnale in ingresso. Più si aumentano R e C , più la banda B si riduce, e quindi inferiore sarà la reattività, il tempo di carica del circuito: la curva di carica, la curva che dovrebbe caricare come una porta il condensatore, sarà più dolce, più smoothed (come si dice in inglese). Questa regolarizzazione del segnale (a spese della rappresentazione ideale del segnale in ingresso, in questo caso della porta), è dovuta al fatto che l'uscita si rappresenta come:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

Ossia vi è il prodotto di convoluzione. Esso è un operatore in grado di addolcire le curve, lisciarle, e quindi aumentare (anche di molto) il numero di derivate continue in $y(t)$, a partire da un $x(t)$ estremamente irregolare come una porta.

Come detto, per terminare l'esempio, aumentando resistenza R e capacità C , il filtro avrà nella funzione di trasferimento una banda inferiore, dunque meno armoniche in grado di presentare segnali in rapida crescita, e dunque l'immagine sarà più lenta, più dolce (e la costante di tempo τ , indicatore della velocità di carica del condensatore, molto più alta); dualmente, con R e C ridotte, la costante di tempo τ diminuisce, così che il condensatore si carica e scarica più velocemente; in questo modo, l'elemento con memoria diventa più reattivo, poichè in frequenza la banda si allarga, e quindi avremo a disposizione molte più armoniche in grado di presentare un segnale molto più veloce, e più ripido, variabile, con meno inerzia.

4.8 Fenomeni di distorsione nei sistemi

Incominciamo a parlare di fenomeni di distorsione, dicendo come si definisce un sistema non distorcente: un sistema è non distorcente se il segnale in uscita conserva le caratteristiche del segnale $x(t)$ in ingresso, a meno di un ritardo

e/o di una costante moltiplicativa (indicante un'amplificazione o un'attenuazione). Analiticamente, se un sistema è così definibile, a partire da ingresso e uscita:

$$y(f) = Kx(t - T) \implies \mathcal{F}\{Y(f)\} = \mathcal{F}\{Kx(t - T)\}$$

Passando nel dominio delle frequenze dunque:

$$Y(f) = KX(f)e^{-j2\pi fT}$$

La funzione di trasferimento, ricavata come rapporto di uscita e ingresso, sarà:

$$H(f) = Ke^{-j2\pi fT}$$

Questa è la funzione di trasferimento di un sistema non distorcente. Come si può capire, a partire da quest'espressione analitica, che cosa significa? La funzione di trasferimento è una funzione di variabile complessa, e dunque la si può esprimere esclusivamente con modulo e fase, considerati separatamente:

$$|H(f)| = K$$

$$\angle H(f) = -j2\pi fT$$

Il modulo della funzione di trasferimento $H(f)$ è una costante, mentre la fase è una funzione lineare, ossia una retta (ricordiamo che una fase si definisce sensatamente da $-\pi$ a π , quindi di fatto sarà sempre la stessa funzione lineare che si ripeterà per tutto il piano). Abbiamo detto che a queste condizioni, il sistema non distorce; esistono due tipi principali di distorsione, ossia distorsione di ampiezza e distorsione di fase.

Distorsione di Ampiezza

Si parla di distorsione di ampiezza quando si considera il modulo della funzione di trasferimento, $|H(f)|$: se esso è non costante, ossia è una funzione variabile con la frequenza f , capiterà il seguente fatto: alcune armoniche verranno amplificate in modulo, altre attenuate, e così il segnale subisce qualcosa di molto più complesso di una semplice amplificazione o attenuazione: a seconda della frequenza un'armonica può infatti essere modificata come ordina la funzione di trasferimento. Se la banda passante presenta fenomeni di questo tipo, ossia se nella zona, nel range di frequenze che ci interessa processare, si ha una variazione di ampiezza, si ha un fenomeno di distorsione di ampiezza.

Un esempio buono di distorsore di ampiezza è il filtro passa basso: esso distorce soprattutto le armoniche situate sulle frequenze alte, lasciando (quasi) inalterate quelle a basse frequenze (anche se il quasi in realtà comunque è sintomo di una distorsione): possiamo dire che il fenomeno di filtraggio delle frequenze sia proprio basato su di una distorsione in ampiezza.

Distorsione di Fase

Se la fase della funzione di trasferimento è una funzione non lineare (come in un filtro passa basso, dove in effetti, se analizzassimo la fase, vedremmo che essa va come un'arcotangente) si ha una distorsione di fase. Distorsione di fase significa che le armoniche che compongono il segnale vengono traslate non tutte dello stesso ritardo T , ma ciascuna di un proprio T_f , dove f è la frequenza dell'armonica: la funzione di trasferimento del sistema modifica in modo diverso le varie armoniche, facendone anticipare certe, ritardandone altre e così provocando un effetto che talvolta può risultare sgradevole.

Un metodo per eliminare una distorsione è mettere in cascata al sistema distorcente un equalizzatore, ossia un filtro in grado, mediante il prodotto della $H(f)$ del sistema con la propria $H_{eq}(f)$, di riportare il sistema ad una situazione del tipo:

$$H(f)H_{eq}(f) = Ke^{-j2\pi fT}$$

Un esempio pratico di applicazione di un sistema del genere, è una semplice linea telefonica: mediante gli induttori di carico, si riesce ad eliminare le distorsioni, e così a ottenere un effetto di equalizzazione del segnale proveniente dal sistema distorcente.

Capitolo 5

Segnali Periodici

Trattiamo un argomento di analisi in frequenza che non abbiamo ancora discusso in modo esauriente: lo studio di segnali periodici nel dominio della frequenza. Premettiamo che in natura non è possibile parlare di segnali esattamente periodici: essi sono innanzitutto segnali a energia infinita, e dunque che non sono compatibili con il mondo fisico in cui viviamo, non vi appartengono. Ciò che però si può trovare nel mondo fisico è la ripetizione ciclica di un segnale di un qualche tipo, o almeno in prima approssimazione ciclica. Si definisce dunque una classe di segnali ciclici, del tipo:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t + nT)$$

Dove x_T è un segnale-base, di periodo t : partendo da un segnale $x(t)$ a supporto limitato, $x_T(t)$ è il fenomeno considerato in un singolo periodo, T ; questo fenomeno si ripeterà infinite volte, poichè prolungato per periodicità mediante la formula appena introdotta. Dal segnale base, dunque, si ripete n volte, per $n \rightarrow +\infty$.

Si noti che è possibile verificare facilmente che i segnali ciclici sono periodici; infatti, considerando la definizione di periodicità, $x(t) = x(t + T)$,

$$\implies \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t + nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t + T + nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t + (n + 1)T)$$

Poichè n varia da $-\infty$ a $+\infty$, aggiungere o meno un termine in un'infinità numerabili di termini non modifica la cardinalità dell'insieme in questione.

Si è soliti trattare i segnali periodici mediante la Serie di Fourier: essa è un caso particolare della trasformata, che scomponeva un segnale periodico

in una somma numerabile di armoniche pure; la serie di Fourier ha una forma del tipo:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

Dove i coefficienti della serie, μ_n , sono così definiti:

$$\mu_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

Consideriamo la frequenza fondamentale come l'inverso del periodo del segnale ciclico, ossia:

$$f_0 = \frac{1}{T}$$

Effettuiamo un'operazione particolare: facciamo la trasformata di Fourier della serie di Fourier:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j2\pi n f_0 t} \right) e^{-j2\pi ft} dt$$

Considerando per ipotesi una convergenza quantomeno puntuale degli elementi sotto il segno degli integrali, possiamo utilizzare il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale, e, poichè la serie è di fatto il limite di una somma, possiamo scambiare il segno di sommatoria con il segno di integrale, e così ottenere:

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-nf_0)t} dt$$

Notiamo che questo integrale si può ricondurre facilmente ad una δ : utilizzando la proprietà della δ che permette di considerare l'argomento tra parentesi dell'esponenziale come argomento della δ :

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \delta(f - nf_0) = X(f)$$

Abbiamo trovato finalmente una forma della trasformata di Fourier della serie di Fourier. Introduciamo ora il segnale limitato nel periodo, $x_T(t)$, definito come:

$$x_T(t) = x(t)p_T(t)$$

Dunque, ricordando la definizione dei μ_n , e considerando il segnale $x_T(t)$:

$$\implies \mu_n = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = X_T(n f_0) \cdot f_0$$

Sostituendo ciò nell'espressione di $X(f)$ appena ricavata, troviamo:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0 X_T(n f_0) \delta(f - n f_0)$$

Siamo così riusciti a determinare lo spettro di un segnale periodico: esso è uno spettro a righe, ossia uno spettro formato da un insieme di δ , in successione: non si tratta più di uno spettro continuo, bensì discreto.

Considerando un segnale qualsiasi, dunque, se il suo spettro in frequenza ha un certo andamento, lo spettro del segnale stesso periodicizzato avrà solo un infinità numerabile di righe (e non più la potenza del continuo), che però hanno come involucro la trasformata di Fourier del segnale non periodicizzato. Il treno di δ dunque segue l'involuppo della trasformata di un impulso semplice non periodicizzato.

Il fatto che manchino delle frequenze è intuitivamente dovuto al fatto che il segnale è periodico: basterebbe infatti la sola serie di Fourier per poterlo rappresentare e ricostruire alla perfezione, dunque per poter rappresentare lo spettro del segnale son semplicemente sufficienti delle δ . Ognuna di esse viene detta riga spettrale, e tra esse sono equispaziate, di distanza in frequenza pari a f_0 .

Esempio Teorico 2 *Consideriamo un esempio teorico di ciò che abbiamo appena affermato: $x_T(t) = \delta(t)$.*

La trasformata della funzione $\delta(t)$ è 1, e quindi la curva involucro dello spettro a righe del segnale periodicizzato sarebbe la costante, $X(f) = 1$. In questo modo, dato $f_0 = \frac{1}{T}$:

$$X(f) = f_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \delta(f - n f_0)$$

Estendiamo ulteriormente ciò che abbiamo appena visto: l'ipotesi iniziale, per quanto riguarda il discorso che abbiamo appena considerato, era un segnale di base $x(t)$ ciclico, ma a supporto limitato, prima di essere periodicizzato. Supponiamo di avere un segnale più interessante, come:

$$r(t) = e^{-kt}u(t)$$

Si può considerare un'estensione di ciò che abbiamo appena detto? vediamo:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t - nT)$$

Si può verificare facilmente come già visto che questo segnale è periodico, con la stessa dimostrazione. Ma come si può determinare lo spettro? Il nostro obiettivo è cioè quello di trovare lo spettro del segnale $x(t)$ appena citato, come:

$$X(f) = \mathcal{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t - nT) \right\}$$

Ci viene incontro una proprietà molto importante della delta di Dirac, ossia il fatto che essa è l'operatore neutro al prodotto di convoluzione, e nella fatispecie:

$$g(t) \otimes \delta(t - a) = g(t - a)$$

Utilizzando questo trucco, e la proprietà della δ : $g(t)\delta(\theta) = g(\theta)\delta(\theta)$, possiamo fare qualcosa di questo genere:

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t - nT) \right\} = \mathcal{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r(t) \otimes \delta(t - nT) \right\} = \mathcal{F} \left\{ r(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \right\} =$$

Ricordando il risultato appena ottenuto, ossia la trasformata del treno di δ , possiamo ricordare che:

$$\begin{aligned} R(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T} \right) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R(f) \delta \left(f - \frac{n}{T} \right) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R \left(\frac{n}{T} \right) \delta \left(f - \frac{n}{T} \right) = X(f) \end{aligned}$$

Abbiamo trovato un'espressione presentante un generico segnale, anche non limitato, nel dominio delle frequenze.

Potremmo ora farci una domanda duale: supponendo di avere un segnale il cui spettro è formato da due righe, esso è periodico? E se no, a quali condizioni potrebbe divenire periodico?

Capitolo 6

Funzione di Autocorrelazione

Consideriamo ora un argomento a sè stante, e quindi isoliamolo e cerchiamo di esaurirlo in questo capitoletto. Consideriamo un generico segnale $x(t)$ a energia finita: ad esso, si può associare uno spettro di energia, definito come il modulo quadro dello spettro in frequenza:

$$S_x(f) = |X(f)|^2$$

Dove $X(f)$ rappresenta lo spettro in frequenza, ossia la trasformata di Fourier del segnale.

Finora non avevamo fatto alcune considerazioni: lo spettro di energia di un segnale soddisfa alcune proprietà che possono essere molto utili ed interessanti nel contesto dell'analisi dei segnali:

1. Lo spettro di energia $S_x(f)$ è una grandezza non negativa (abbastanza ovvio, in quanto si definisce come il modulo quadro di una grandezza):

$$S_x(f) \geq 0$$

2. Dato un segnale $x(t)$ reale, il suo spettro di energia è una funzione pari: infatti, $|X(f)|$ come già dimostrato è pari, e $|X(f)|^2$, ossia il modulo quadro di una funzione pari, sarà di nuovo una funzione pari.
3. Dato un sistema LTI rappresentato mediante la sua risposta all'impulso $h(t)$ e/o alla sua funzione di trasferimento $H(f)$, sappiamo che:

$$y(t) = h(t) \otimes x(t)$$

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Ci chiediamo dunque: è possibile processare direttamente lo spettro di energia di un segnale? La risposta è sì, infatti:

$$Y(f) = H(f)X(f) \implies |Y(f)|^2 = |H(f)X(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot |X(f)|^2$$

Ma, poichè $|Y(f)|^2 = S_y(f)$, allora:

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$$

Ossia, lo spettro di energia in uscita è uguale allo spettro di energia della funzione in ingresso nel sistema, moltiplicato per il modulo quadro della funzione di trasferimento del sistema LTI.

4. A partire dalla precedente proprietà, vediamo una cosa interessante: supponiamo che $H(f)$ sia la funzione di trasferimento di un filtro passa banda ideale, e cioè sia formata da una porta di ampiezza unitaria traslata, in modo da essere non nulla nelle frequenze comprese tra i due limiti f_1 e f_2 ; detto ciò, lo spettro di energia in uscita del segnale varrà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_y(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 S_x(f)df = \int_{f_1}^{f_2} S_x(f)df = \varepsilon_y$$

Cerchiamo di capire meglio cosa abbiamo detto, cosa abbiamo fatto: considerando lo spettro di energia di un segnale, $S_x(f)$, viene intuitivo pensare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df = \varepsilon_x$$

Ossia, l'integrale su tutta la retta reale della funzione di spettro di energia, è pari all'energia del segnale. Si può però, a partire dalla proprietà precedente, dire qualcosa di più su questo integrale: dato un range di frequenze compreso tra due di esse, f_1 e f_2 , come nel filtro passa banda appena citato, capita il seguente fatto:

$$\int_{f_1}^{f_2} S_x(f)df = \varepsilon_{x[f_1;f_2]}$$

Ossia, è l'energia del segnale $x(t)$ dovuta al solo contributo della banda di frequenze compresa tra f_1 e f_2 .

Questo cappello introduttivo sulle proprietà dello spettro di energia è molto importante per un semplice motivo: noi abbiamo finora parlato di analisi in frequenza utilizzando principalmente lo spettro in frequenza, ossia la trasformata di Fourier di un segnale, per poterlo studiare; spesso non siamo così fortunati da possedere tutte queste conoscenze, quindi capiterà spesso di avere solo il modulo quadro della trasformata, che fornisce informazioni riduttive rispetto allo spettro in frequenza, ma comunque in qualche modo soddisfacenti.

Si noti anche un'altro fatto: ad un segnale $x(t)$ corrisponde un unico spettro in energia; ad uno spettro di energia, però potrebbero corrispondere infiniti segnali: dato uno spettro di energia, non è possibile ricondursi ad un singolo spettro $X(f)$ o comunque ad un singolo segnale, poichè la corrispondenza tra $X(f)$ e $S_x(f)$ è univoca, ma non biunivoca.

Terminata l'introduzione, entriamo nel vivo dell'argomento: si definisce una particolare funzione, detta Funzione di Autocorrelazione, come:

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{S_x(f)\}$$

Ossia, come la trasformata inversa di Fourier dello spettro di energia in frequenza di un segnale. Cerchiamo, a partire da questa definizione un po' difficile da maneggiare, di estrapolare una formulazione più operativa; utilizzando le proprietà dei numeri complessi, possiamo dire che lo spettro di energia di un segnale, ossia il modulo quadro della trasformata, si può trattare come:

$$S_x(f) = |X(f)|^2 = X(f)X^*(f)$$

Utilizzando dunque la definizione appena vista di funzione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 e^{j2\pi f\tau} df$$

Consideriamo ora queste espressioni considerando la definizione di trasformata di Fourier, svolgendo dunque tutti i conti:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x\theta e^{-j2\pi f\theta} x^*(t) e^{-(-j2\pi ft)} e^{j2\pi f\tau} d\theta dt df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) x^*(t) e^{j2\pi f(t+\tau-\theta)} d\theta dt df \end{aligned}$$

Integriamo innanzitutto in df , utilizzando la proprietà dell'integrale come:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f(t+\tau-\theta)} df = \delta(t + \tau - \theta)$$

Otteniamo in questo modo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)x^*(t)\delta(t + \tau - \theta)dt d\theta$$

Integriamo a questo punto in $d\theta$: anche qua giocherà a nostro favore una proprietà della δ :

$$X(\theta)\delta(t + \tau - \theta) = x(\theta + t + \tau - \theta)\delta(t + \tau - \theta) = x(t + \tau)\delta(t + \tau - \theta)$$

Integrando a questo punto la δ sparisce, e dunque otteniamo:

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)x^*(t)dt$$

Consideriamo ora un cambio di variabili:

$$s = t + \tau \implies dt = ds \implies t = s - \tau$$

$$\implies \int_{-\infty}^{+\infty} x(s)x^*(s - \tau)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} X(s)X^*[-(\tau - s)]ds = x(\tau) \otimes x^*(-\tau)$$

Dunque, si può interpretare la funzione di autocorrelazione come una convoluzione, o più semplicemente come un prodotto scalare dello spettro in frequenza con sè stesso, traslato di un ritardo τ .

La funzione $R_x(\tau)$ è dotata di alcune proprietà, che vorremmo esporre, prima di dedicarci ad una descrizione sul significato fisico di questa funzione:

1. $R_x(0) = \varepsilon_x$

Questa proprietà si può dimostrare facilmente: se $\tau = 0$, allora:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - 0)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \varepsilon_x$$

Ossia la funzione di autocorrelazione in 0 è pari all'energia del segnale.

2. Se $x(t)$ è un segnale reale, allora $R_x(\tau)$ è una funzione pari. Inoltre, considerando segnali non esistenti nel mondo fisico (ma pure astrazioni matematiche), $R_x(-\tau) = R_x^*(\tau)$

Si può dimostrare abbastanza facilmente anche questa proprietà:

$$R_x(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)x^*(\theta + \tau)d\theta = R_x^*(\tau)$$

Abbiamo così dimostrato l'implicazione in caso di segnali complessi; poichè noi avremo prevalentemente a che fare con segnali reali, poichè il coniugato di una grandezza in \mathbb{R} è uguale alla grandezza stessa,

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau)$$

Da ciò si evince anche, quindi, che se $x(t)$ è reale, anche $R_x(\tau)$ è reale.

3. $R_x(0) \geq R_x(\tau) \forall \tau \neq 0$

Ossia $\tau = 0$ è il punto di massimo assoluto della funzione di autocorrelazione.

Questo punto si può dimostrare mediante un gioco di maggiorazioni:

$$|R_x(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau)x^*(t)dt \right| \leq \varepsilon_x^2$$

Da ciò si può ricavare che, se è sempre possibile maggiorare con l'energia al quadrato il modulo quadro della funzione di autocorrelazione, allora possiamo dire che la funzione di autocorrelazione in modulo si può maggiorare con l'energia, e quindi con $R_x(0)$:

$$|R_x(\tau)| \varepsilon_x = R_x(0)$$

Da ciò si evince che $\tau = 0$ è il massimo della funzione di autocorrelazione.

6.1 Interpretazione fisica della funzione di autocorrelazione

Abbiamo proposto una serie di proprietà di questa funzione di autocorrelazione, ma non siamo ancora riusciti a spiegare in qualche modo cosa

sia, cosa rappresenti, cosa voglia dire questo insieme di proprietà e formule. Per ora l'unica cosa sicura, è che essa rappresenta l'antitrasformata secondo Fourier dello spettro di energia di un segnale.

Dato un generico segnale in ingresso $x(t)$, definiamo un segnale Δ così definito:

$$\Delta(t; \tau) = x(t) - x(t + \tau)$$

Cosa vuol dire ciò? Abbiamo appena presentato un segnale Δ in grado di mostrare la differenza tra il segnale in ingresso in un sistema, $x(t)$, e sè stesso traslato di un certo τ : $\Delta(t; \tau)$, inserendo questi parametri, è in grado di mostrare un segnale presentante la distanza, la differenza, la lontananza di un segnale da sè stesso, traslato con un certo ritardo τ .

Calcoliamo l'energia di questo segnale differenza, Δ :

$$\varepsilon_{\Delta} = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta(t; \tau)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - x(t + \tau)|^2 dt$$

Utilizzando la formula del quadrato del binomio, e utilizzando la linearità dell'integrale, si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta(t; \tau)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t + \tau) dt - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t + \tau) dt$$

Ossia, l'integrale del quadrato del segnale, più il quadrato del segnale ritardato, meno il cross-term, il doppio prodotto del segnale per sè stesso ritardato. Notiamo che i primi due addendi sono esattamente uguali a ε_x : il primo è evidente, mentre per il secondo basta ricordare che l'energia non varia trasladando semplicemente il segnale di un certo ritardo τ , quindi abbiamo ottenuto, dai primi due addendi, $2\varepsilon_x$. Nel terzo addendo, considerando il fatto che $x(t)$ è un segnale reale, e dunque $x(t) = x^*(t)$, si può vedere che:

$$-2 \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t + \tau) dt = -2R_x(\tau)$$

Quindi, l'energia complessiva del segnale di differenza, sarà:

$$\varepsilon_{\Delta}(\tau) = 2[\varepsilon_x - R_x(\tau)]$$

Da qua, volendo fare un ulteriore passaggio per meglio comprendere il ragionamento che si sta per fare:

$$R_x(\tau) = \varepsilon_x - \frac{1}{2}\varepsilon_{\Delta}(\tau)$$

Cerchiamo ora di spiegare semplicemente a cosa è servito tutto ciò: supponiamo di avere due diversi segnali, $x_1(t)$ e $x_2(t)$: il primo è un segnale stazionario, cioè lento a variare, molto piatto, calmo, abbastanza simile ad una costante; $x_2(t)$ invece è un segnale molto rapido, con molti cambi di pendenza improvvisi, molto turbolento se vogliamo dire così.

Nel primo segnale, avremo una $\varepsilon_\Delta(\tau)$ molto piccola, in quanto il segnale, all'aumentare di τ , cioè confrontandosi con sè stesso, non cambia di molto, e dunque neanche l'energia cambierà di molto. Per questo motivo, $R_x(\tau) \sim \varepsilon_x$, e dunque il segnale avrà un'autocorrelazione molto grande: essa sarà molto vicina all'energia del segnale, e ciò ci fa intuire che il segnale ha una forte inerzia, ossia fa molta fatica a cambiare.

Nel secondo segnale, avremo $\varepsilon_\Delta(\tau)$ piuttosto elevata, poichè il segnale, all'aumentare di τ , ossia confrontandosi con sè stesso, subisce notevoli variazioni, a causa della propria turbolenza, della propria velocità nelle variazioni. Quindi, $R_x(\tau) \ll \varepsilon_x$: ora l'autocorrelazione sarà molto più stretta, molto concentrata nell'intorno dell'origine. Volendo riprendere l'interpretazione meccanica proposta, il segnale avrà così una sorta di piccolo momento di inerzia, che così permette variazioni rapide nel tempo.

Possiamo dunque dire, in definitiva, che $R_x(\tau)$ sia una funzione indicatrice della velocità del segnale, della correlazione con sè stesso ritardato, in grado cioè di quantificare la similitudine del segnale con sè stesso al variare del ritardo della sua copia. L'interpretazione si adatta perfettamente con la prima delle proprietà prima enunciate: se $\tau = 0$, il segnale viene confrontato con sè stesso non ritardato, e quindi l'autocorrelazione è massima, poichè quelli che confrontiamo sono due segnali del tutto identici.

6.1.1 Funzione di mutua correlazione

Analogamente a quanto appena fatto, è possibile definire una funzione di mutua correlazione tra due segnali: si definisce dunque uno spettro mutuo (cross spectrum), ed una correlazione mutua (cross correlation):

$$S_{xy}(f) = X(f) \cdot Y^*(f)$$

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t + \tau)y(t)dt$$

Questo, in modo del tutto analogo a prima, utilizzando semplicemente due segnali invece di uno unico, e ritardandone uno; le proprietà chiaramente saranno diverse, però sostanzialmente non abbiamo molti concetti nuovi da introdurre.

6.2 Spettro di potenza e funzione di autocorrelazione

Una cosa interessante che può capitare (non nel mondo fisico) è di avere a che fare con segnali ad energia non finita; introducendo il concetto di potenza, ed estendendo ad esso tutte le conoscenze maturate per lo spettro di energia, è possibile parlare di spettro di potenza, e funzione di autocorrelazione.

Dato un segnale $x(t)$ a potenza finita, lo si limita ad un singolo periodo, nel caso di segnali ciclici o periodici: troncando il segnale ad un periodo ottenendo $x_T(t)$; facendone la trasformata locale, ed estendendola a ∞ , per poi normalizzare dividendo per il T in questione, troviamo $X_T(f)$;

$$X_T(f) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

Consideriamo a questo punto il modulo quadro dello spettro appena presentato:

$$|X_T(f)|^2 = \left| \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 = |\mathcal{F}\{x_T(t)\}|^2 = S_{X_T}(f)$$

A questo punto, si fornisce la definizione operativa di spettro di potenza come:

$$P_x(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2 = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} S_{X_T}(f)$$

Abbiamo così definito lo spettro di potenza del segnale $x(t)$ troncato ad un periodo T .

Lo spettro di potenza gode delle stesse proprietà di quelle dello spettro di energia; rivediamole brevemente, senza presentare dimostrazioni (che risulterebbero essere praticamente identiche):

1. $P_x(f) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} P_x(f) df = p_x$;
3. $\int_{f_1}^{f_2} P_x(f) df = p_{x[f_1;f_2]}$
4. $p_y(f) = |H(f)|^2 p_x(f)$

Allo stesso modo di prima, si definisce la funzione di autocorrelazione come:

$$R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{P_x(f)\} \implies R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^*(t + \tau)x(t)dt$$

Ripetersi sarebbe inutile: valgono, per quanto riguarda la funzione di autocorrelazione studiata in potenza, le stesse proprietà, le stesse dimostrazioni delle proprietà, e le stesse interpretazioni fisiche precedentemente analizzate per quanto riguarda i segnali ad energia finita.

Capitolo 7

Segnali a tempo discreto

I processori di segnali, i cosiddetti DSP (Digital Signal Processors) analizzano e processano segnali fondamentalmente molto diversi da quelli che abbiamo finora studiato e trattato: finora abbiamo prevalentemente studiato segnali a tempo continuo, ossia segnali in cui la variabile temporale t varia con continuità sulla retta reale, \mathbb{R} . Un DSP non è in grado di lavorare su un numero di valori con la potenza del continuo, con la cardinalità del continuo: i processori di segnali lavorano su segnali a tempo discreto, ossia su segnali con un numero finito o al più numerabile di tempi, nei quali conosciamo il segnale.

Si smette di parlare di segnali continui, e si introduce il concetto di segnale campionato (sampled): dato un segnale continuo nel tempo, un segnale campionato è un segnale costituito dai campioni misurati sulla griglia di campionamento. La griglia di campionamento è un insieme di tempi in cui si conoscono i valori del segnale. Solitamente si considerano campionamenti a passo costante, ossia in cui la distanza da un tempo di campionamento ad un altro è costante. Tutti i tempi di campionamento sono multipli di un tempo base, T_S , per l'appunto il tempo di campionamento (sampling time).

La notazione che di solito si utilizza parlando di segnali a tempo discreto, è la seguente: fino ad ora, per considerare un particolare tempo n -esimo, dovremmo considerare il tempo $x(nT_S)$; in processamento di segnali a tempo discreto, la convenzione che si usa (anche se magari qua non verrà spesso citata) è:

$$x(nT_S) = x[n]$$

Ci poniamo a questo punto una domanda cruciale: passando da un segnale a tempo continuo, ad uno a tempo discreto, cosa perdiamo? In altre parole, abbiamo una perdita di informazione sul segnale, passando da continuo a discreto?

In generale, la risposta è sì: si ha una notevole perdita di informazione sul segnale, e il segnale che ritroveremmo discretizzando quello di partenza potrebbe non avere alcuna delle caratteristiche di quello che avevamo. Esiste però una classe di segnali che, se campionati con un adeguato sampling time T_S , non subisce perdite di informazioni; se dunque tentiamo a ricostruire un segnale continuo a partire da quello discretizzato, campionato, potremmo ottenere ancora un ottimo risultato. Capiremo tra non molto quali siano i segnali che appartengono a questa classe.

7.1 Teorema del Campionamento

Introduciamo a modo nostro il campionamento di segnali continui, utilizzando la delta di Dirac e le sue formidabili proprietà come base della nostra teoria, che ci porterà a elaborare una nostra teoria sul campionamento.

Consideriamo dunque un segnale $x_\delta(t)$ così definito:

$$x_\delta(t) \triangleq x(t)T_S \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_S)$$

Che cosa significa ciò? Perché abbiamo scelto una definizione di questo tipo? Proviamo a spiegarcelo svolgendo alcuni conti, solo per dare un significato sensato:

$$x_\delta(t) = x(t)T_S \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_S) = T_S \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t - nT_S) = T_S \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_S)\delta(t - nT_S)$$

Questo prodotto, come sappiamo dall'applicazione della proprietà della delta di Dirac, valuta il segnale in ciascuno dei punti: il segnale $x(t)$ rappresenta solamente una modulazione, una sorta di involuppo per l'ampiezza delle righe che assumerà ciascuna delle δ , un po' come quando parlavamo di spettro a righe.

Riconsideriamo la definizione di $x_\delta(t)$, e trasformiamola mediante trasformata di Fourier:

$$X_\delta(f) = \mathcal{F}\{x_\delta(t)\} = \mathcal{F}\left\{x(t)T_S \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_S)\right\}$$

Utilizzando la proprietà di dualità sul prodotto di convoluzione, sappiamo che un prodotto algebrico nel dominio del tempo si trasforma in un prodotto

di convoluzione nel dominio delle frequenze; otterremo dunque una cosa del tipo:

$$\implies X_\delta(f) = X(f) \otimes \mathcal{F} \left\{ T_S \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_S) \right\}$$

Come abbiamo però visto studiando la teoria dei segnali periodici, o dei segnali ciclici più generalmente, la trasformata di Fourier di un treno di impulsi, di un treno di δ , è ancora un treno di δ , di ampiezza inversamente proporzionale al passo di campionamento nel tempo, ossia la distanza tra un impulso ed un altro nel dominio del tempo:

$$\implies X(f) \otimes \left(T_S \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T_S} \right) \right)$$

Definiamo a questo punto la frequenza di campionamento F_S come l'inverso del tempo di campionamento:

$$F_S = \frac{1}{T_S}$$

$$\implies \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) \otimes \delta(f - nF_S)$$

Utilizzando la proprietà della delta di Dirac, possiamo finalmente dire che la trasformata di Fourier del segnale che abbiamo definito all'inizio è:

$$X_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nF_S)$$

Come sappiamo, nel dominio delle frequenze, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nF_S)$ è un segnale periodico, con periodo pari a F_S .

Abbiamo ottenuto un risultato a dir poco strabiliante: ciò che abbiamo ottenuto a partire dalla trasformata del segnale definito in principio, è stata $X_\delta(f)$, ossia una versione periodicizzata dello spettro di $X(f)$; abbiamo capito dunque che, campionando un segnale, lo spettro diventa periodico. Ciò ci può portar a capire, intuitivamente, quale sia la famosa classe di segnali privilegiati rispetto agli altri, quando si parla di campionamento: mediante questo processo, abbiamo preso un segnale e lo abbiamo campionato, e abbiamo scoperto che lo spettro si periodicizza, ossia si fissa un certo periodo F_S , dipendente dal tempo di campionamento T_S , e così semplicemente, effettuando queste operazioni, si prende una parte dello spettro, e la si riproduce infinite volte.

Supponiamo ora di avere due segnali che differiscono sostanzialmente per lo spettro: $X_1(f)$ è limitato in banda, ossia è nullo al di fuori di un certo intervallo $[-B; B]$. Un altro, $X_2(f)$, è illimitato in banda. I due casi, sotto il punto di vista del campionamento, sono profondamente diversi: cerchiamo di capire perchè.

Periodicizzando $X_1(f)$, con i metodi spiegati poco fa, otteniamo repliche di $X_1(f)$ traslate in frequenza, che non intersecano però la prima rappresentazione spettrale: le repliche che si vengono a creare quando calcoliamo $X_{\delta 1}(f)$ sono indipendenti, sono separate, una non va ad interferire sull'altra, in parole povere non si sovrappongono in alcun punto (con un adeguato tempo di campionamento).

Periodicizzando $X_2(f)$, capita una cosa molto diversa: noi, scegliendo un determinato tempo di campionamento, scegliamo esclusivamente di quanto trasliamo un segnale rispetto ad un altro; per cercar di essere più chiari, quando si periodicizza un segnale come una gaussiana, che per quanto ridotte presenta sempre delle code, esse non vengono annullate dal campionamento, bensì sommate alla porzione di segnale che si viene a creare per periodicità.

Il fatto che si vengano a sommare code al segnale periodicizzato, distrugge il segnale: si viene a creare un'interferenza, che modifica di fatto le proprietà del segnale, trasformandolo in un altro segnale, che nulla ha a che vedere con quello che abbiamo introdotto nel sistema, prima del processo di periodicizzazione. L'effetto che si è venuto a creare è il cosiddetto aliasing: la somma delle code al segnale periodicizzato provoca una perdita di informazioni sul segnale di partenza, che viene modificato, e quindi è impossibile, a partire da questo nuovo segnale che si è venuto a creare, tornare al segnale di partenza.

Possiamo dunque capire che la classe di segnali campionabili è quella il cui spettro è limitato, o come si suol dire a banda limitata, B .

Esiste una condizione di campionamento per segnali a banda limitata, la cosiddetta Condizione di Nyquist: se la frequenza di campionamento è tale da comprendere al suo interno quantomeno la banda del segnale, B , allora è possibile non subire perdita di informazioni nel segnale. Perchè sia possibile dunque comprendere tutte le frequenze nello spettro periodicizzato, dovremo avere un F_S sufficientemente elevato da poter comprendere tutta la banda; nella fatispecie, F_S deve poter contenere per metà l'intera banda del segnale, e per metà poggiare su segnale nullo, in modo che ci possa essere periodizzazione senza aliasing. Nella fatispecie:

$$\frac{F_S}{2} \geq B \implies F_S \geq 2B$$

A queste condizioni, non avremo fenomeni di Aliasing. Abbiamo così terminato di esporre il teorema del campionamento.

Manca solo l'operazione inversa: come è possibile, data la periodizzazione del segnale, tornare indietro, ed ottenere un singolo spettro? Dato cioè lo spettro periodizzato, $X_\delta(f)$, come si può ricostruire $X(f)$ e dunque $x(t)$? Servirà un filtro ricostruttore, ossia un filtro in grado di deperiodizzare il segnale.

Nulla di più semplice: il più banale dei filtri passa basso è proprio ciò di cui abbiamo bisogno! Eliminando tutte le repliche dello spettro periodizzando, finestrando cioè lo spettro con frequenza di cut-off $\frac{F_S}{2}$, si mantiene solo più la porzione di segnale in grado di rappresentare $X(f)$, e dunque $x(t)$. Il segnale tornerà ad essere continuo, e avremo così ottenuto il nostro obiettivo.

Alcune nomenclature:

- $F_S = 2B$ si dice frequenza critica di campionamento;
- $F_S > 2B$ si dice sovracampionamento (oversampling);
- $F_S < 2B$ si dice sottocampionamento (undersampling)

Prima di affrontare l'ultimo problema del campionamento, proponiamo un esercizio pratico un po' particolare, per cercar di capire meglio ciò che abbiām spiegato.

Esempio Pratico 1 *Consideriamo un segnale $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ dove $f_0 = 5,5$ kHz; cerchiamo a questo punto di fare i furbi, ossia a cercar di capire cosa capita, quando sottocampioniamo. La frequenza di campionamento minima, F_S , sarebbe $2 \cdot 5,5$ kHz = 11 kHz; noi per l'appunto cercheremo di fare i furbi, e proponiamo $F_S = 8$ kHz.*

Procediamo dunque, basandoci su quest'ipotesi; il segnale $x(t)$, nel dominio di Fourier, varrà:

$$X(f) = \frac{1}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

Avremo dunque due impulsi di Dirac, posizionati rispettivamente a $-5,5$ kHz e $+5,5$ kHz.

Procediamo ora col campionamento: replicando questi due impulsi, vedremo che capiterà una cosa interessante: avremo, in banda, due impulsi di Dirac, uno situato a $5,5 - 8$ kHz, ed uno a $-5,5 + 8$ kHz, ossia, replicando il segnale traslandolo in tutte le frequenze con un passo di 8 kHz, avremo, in banda, due impulsi nuovi. A questo punto, utilizziamo il filtro ricostruttore, ossia un passa basso con una frequenza di cut-off pari a $\frac{F_S}{2}$, e quindi a 4 kHz. Il risultato sarà, data $f_1 = -5,5 + 8$ kHz = 3,5 kHz, $f_2 = 5,5 - 8$ kHz = -3,5 kHz, e dunque il segnale sarà:

$$X(f) = \frac{1}{2} (\delta(f - f_1) + \delta(f - f_2))$$

Come possiamo vedere facilmente, le due δ stanno in posizioni simmetriche tra loro rispetto all'asse delle ascisse, dunque avremo di nuovo un coseno, ma questa volta di frequenza $f_1 = 3,5$ kHz. Di fatto, è come se, campionando la voce di un soprano, finissimo per ascoltare un baritono o un basso.

Il segnale $x(t)$ ora ottenuto non è più quello di partenza: questo perchè, dal momento che non abbiamo rispettato la condizione di Nyquist, sulla frequenza minima di campionamento, abbiamo ottenuto un effetto di aliasing.

Avevamo accennato all'ultimo problema che possiamo porci: potremmo voler campionare un segnale a banda non limitata, cosa che finora non abbiamo potuto fare a causa dell'aliasing. L'idea di base, è quella di pre-processare lo spettro, mediante un filtro anti-aliasing: esso è semplicemente un filtro passa basso, con frequenza pari a quella di cut-off del segnale da ricostruire, ossia pari a quella del passa basso ricostruttore. Mediante questo pre-processamento, si sceglie di tagliare le code al di sopra di un certo valore da noi prefissato: perdendo informazioni sul segnale di partenza (informazioni non molto importanti, in quanto comunque si tagliano tendenzialmente contributi di frequenze piuttosto alte, e contributi spesso molto ridotti), riusciamo ad ottenere un segnale $x_r(t)$ limitato in banda, con una banda pari alla frequenza di cut-off del filtro anti-aliasing, F_C . A questo punto, campionando con una F_S idonea, sarà possibile periodicizzare lo spettro del segnale $x_r(t)$ derivato da $x(t)$, diverso da quello di partenza, ma non troppo, se il filtraggio è stato scelto in modo intelligente. Anzichè dunque introdurre semplicemente in un DSP il segnale in ingresso, prima lo si introduce in un trasduttore analogico/digitale, ottenendo un segnale numerico $x[n]$, che quindi sarà utilizzabile dal DSP in questione. Il trasduttore finale, è in grado di prolungare per continuità il segnale numerico $y[n]$ in uscita dal DSP, in $y(t)$. I trasduttori sono proprio i blocchi, i sistemi, in grado di effettuare i fenomeni di filtraggio del segnale.

Si può dimostrare che, filtrando con il filtro anti-aliasing il segnale $x(t)$, o meglio il suo spettro $X(f)$, si ottiene un errore, una perdita di informazioni, sempre minore o uguale a quella che si otterrebbe con l'aliasing. Formalizzando meglio, considerando il segnale in ingresso nel continuo $x(t)$, $x_t(t)$ il segnale troncato, e $x_a(t)$ il segnale non troncato ma soggetto a fenomeni di aliasing, l'errore dovuto all'aliasing sarà sempre maggiore a quello dovuto al troncamento. Per poter dimostrare ciò, consideriamo gli errori quadratici medi del segnale, ossia studiamo l'energia degli scarti ottenuti sottraendo al segnale $x(t)$ una volta $x_t(t)$ e un'altra $x_a(t)$:

$$\varepsilon_t = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - x_t(t)|^2 dt$$

$$\varepsilon_a = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - x_a(t)|^2 dt$$

Vogliamo dimostrare dunque che:

$$\varepsilon_t \leq \varepsilon_a$$

Per fare ciò, consideriamo l'uguaglianza di Parseval, in forma generalizzata, ossia passando alla frequenza, e svolgendo il modulo quadro dello spettro di frequenza come lo spettro di frequenza moltiplicato per il suo complesso coniugato:

$$\varepsilon_r = \int_{-\infty}^{+\infty} [X(f) - X_t(f)] \cdot [X(f) - X_t(f)]^* df$$

Ma sappiamo che, se la frequenza è superiore alla frequenza di taglio, B_t , $X_t(f) = 0$, e otteniamo dunque che, nella banda inferiore a quella di taglio del filtro anti-aliasing, i due segnali coincidono perfettamente, e dunque la loro differenza sarà nulla:

$$\int_{-B_t}^{+B_t} [X(f) - X_t(f)] \cdot [X(f) - X_t(f)]^* df = 0$$

Di conseguenza, potremo dire che:

$$\varepsilon_t = \int_{-\infty}^{-B_r} |X(f)|^2 df + \int_{B_e}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Con lo stesso ragionamento possiamo considerare l'energia del segnale non tagliato ma sottoposto ad aliasing come:

$$\varepsilon_a = \int_{-\infty}^{-B_a} |X(f)|^2 df + \int_{B_a}^{+\infty} |X(f)|^2 df + \int_{-B_a}^{+B_a} |X(f) - X_a(f)|^2 df$$

Come notiamo, il terzo termine dell'integrale generalmente non è nullo, di conseguenza possiamo dire tranquillamente che:

$$\varepsilon_r \leq \varepsilon_a$$

7.2 Trasformata di Fourier Discreta: DFT

Abbiamo poco fa presentato il percorso che un segnale continuo deve fare per essere processato da un DSP: questo blocco, il Digital Signal Processor, è il cuore del sistema: esso effettua le operazioni sul segnale numerico $x[n]$ che lo portano a diventare $y[n]$. Una delle operazioni che potrebbero risultare essere particolarmente interessanti per un DSP, è la trasformata di Fourier, ossia la possibilità di passare i nostri valori dal dominio del tempo al dominio della frequenza, anche se trattiamo solamente un numero finito di valori del segnale campionati nel dominio del tempo.

Esiste una versione discretizzata della trasformata di Fourier, ossia la DFT (Discrete Fourier Transform): di fatto si tratta di una variante della trasformata di Fourier che, mediante dei trucchi, riesce a lavorare su funzioni numeriche, ossia definite mediante un vettore di valori. Abbiamo parlato finora come sappiamo di funzioni continue, ossia definibili mediante una relazione $x(t)$, $y(t)$, e quant'altro. Nel discreto dovremo effettuare invece le operazioni su un numero finito di punti di valori, su di un vettore di punti in sostanza, che sarà l'ingresso della nostra trasformata, $x[n]$. La trasformata di Fourier discreta dunque funziona, ma a condizione di rispettare due vincoli, fuori dai quali non possiamo uscire:

1. Lavorare in campo strettamente discreto, e anzi con un numero finito di punti;
2. Utilizzare versioni periodicizzate del segnale in questione e del suo spettro.

Cosa significa ciò? La DFT, come vedremo, fornisce ed è in grado di legare parametri di uno spettro di un segnale e il segnale stesso, ma a condizione che essi siano periodicizzati, mediante i metodi studiati precedentemente. Sia quando tratteremo il segnale nel dominio del tempo, che lo spettro delle frequenze, dovremo periodicizzarli, e quindi aver a che fare con versioni periodicizzate, come ci dice il vincolo.

Come nel continuo, avremo una coppia trasformata \mathcal{F} e antitrasformata \mathcal{F}^{-1} , definite come:

$$DFT : X_p(nF_0) = \frac{1}{T} \sum_{m=0}^{N-1} x_p(mT_0) e^{-j\frac{2\pi}{N}mn}$$
$$IDFT \quad x_p(mT_0) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} X_p(nF_0) e^{+j\frac{2\pi}{N}mn}$$

Dove la *DFT* è l'equivalente nel discreto di \mathcal{F} , e la *IDFT* è l'equivalente nel discreto della \mathcal{F}^{-1} . Le due uscite, $x_p(mT_0)$ e $X_p(nF_0)$ sono le versioni periodicizzate (come suggerisce il pedice p rispettivamente del segnale nel dominio del tempo e dello spettro in frequenza dello stesso segnale.

Cerchiamo di proporre una dimostrazione piuttosto pesante del collegamento esistente tra *DFT* e *IDFT*: consideriamo il segnale prolungato per periodicità, in modo da essere utilizzabile nell'ambito della trasformata discreta, definito come:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT)$$

Utilizziamo ora le nostre conoscenze riguardanti le trasformate dei treni di impulsi: consideriamo un treno di δ , e l'antitrasformata di una costante come segnale periodico; otteniamo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

Possiamo facilmente estendere questo risultato per qualsiasi segnale $x(t)$, aggiungendolo in prodotto di convoluzione ad ambo i membri dell'equazione appena proposta:

$$x(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = x(t) \otimes \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

Vediamo facilmente che abbiamo appena ottenuto il segnale di partenza: portando infatti $x(t)$ dentro la serie, otteniamo il segnale di partenza:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \otimes \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT) = x_p(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \otimes e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$$

Abbiamo trovato una nuova equivalenza con il segnale $x_p(t)$, che possiamo immediatamente sfruttare, dopo aver svolto ancora un calcolo: in quest'ultimo membro dell'uguaglianza, dentro al segno di serie abbiamo un prodotto di convoluzione; svolgiamolo mediante la definizione:

$$\begin{aligned} x(t) \otimes e^{jn\frac{2\pi}{T}t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) e^{j\frac{2\pi}{T}n(t-\theta)} d\theta = e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) e^{-jn\frac{2\pi}{T}\theta} d\theta = \\ &= e^{jn2\pi f_0 t} X(nf_0) \end{aligned}$$

Dove $f_0 = \frac{1}{T}$

Da ciò, abbiamo trovato un'espressione più intelligente dell'argomento della serie, che ora si può esprimere come:

$$x_p(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nf_0) e^{j2\pi n f_0 t}$$

Utilizzando la proprietà di parità, si può giustificare immediatamente il duale di quest'espressione, ossia:

$$X_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nB_w) = \frac{1}{B_w} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{B_w}\right) e^{-jn\frac{2\pi}{B_w}f}$$

Queste equazioni, valutate in un insieme finito di punti, sono implementabili mediante algoritmi, e quindi in software di elaborazione dati; siamo tuttavia ancora in campo infinito, in quanto stiamo trattando un'infinità seppur numerabile di dati. In un calcolatore ovviamente è impossibile introdurre infiniti dati, ma al più un vettore determinato da N valori dello spettro e del segnale. Cerchiamo dunque di ultimare la nostra dimostrazione, limitando i dati a N , e verificando cosa ne ricaviamo: dividiamo il periodo T del segnale nel dominio del tempo in versione periodicizzata in N sottointervalli, ciascuno di ampiezza T_0 : otterremo dunque che:

$$T_0 = \frac{T}{N}$$

A questo punto, calcoliamo i parametri μ_n in grado di portarci nel dominio della frequenza, come:

$$\mu_n = \frac{1}{T} X(nf_0)$$

Quindi, consideriamo il nostro segnale periodicizzato $x_p(t)$ ed interpretiamolo come:

$$x_p(mT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k e^{jk\frac{2\pi}{T}mT_0} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k e^{jk\frac{2\pi}{N}m}$$

Questa serie si può ora scomporre come somma di infinite serie, nel seguente modo: consideriamo k variarne esclusivamente da rN a $rN + N - 1$, con r che varia da $-\infty$ a $+\infty$: per ogni livello r -esimo, si scorrono $N - 1$ valori, e così si ottiene:

$$x_p(mT_0) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=rN}^{rN+N-1} \mu_k e^{jk \frac{2\pi}{N} m}$$

Effettuando ora il cambio di variabili, $n = k - rN$, possiamo riscrivere l'equazione in una più agile:

$$x_p(mT_0) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_{n+rN} e^{j(n+rN) \frac{2\pi}{N} m}$$

Consideriamo ora il solo esponenziale interno alle sommatorie, e facciamo un'osservazione molto furba: vediamo che esso vale:

$$e^{j(n+rN) \frac{2\pi}{N} m} = e^{jn \frac{2\pi}{N} m} \cdot e^{jrm2\pi}$$

Tuttavia, r ed m sono numeri interi, ossia numeri che appartengono all'insieme di \mathbb{Z} , dunque possiamo dire con certezza che il secondo esponenziale varrà sempre 1, poichè vi saran solo multipli di 2π ; abbiamo così ottenuto:

$$x_p(mT_0) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn \frac{2\pi}{N} m} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \mu_{n+rN}$$

Dal momento che abbiamo definito i μ_n come:

$$\mu_n = \frac{1}{T} X(nf_0)$$

Allora possiamo dire che il termine della seconda sommatoria valga:

$$\mu_{n+rN} = \frac{1}{T} X(nf_0 + rNf_0)$$

Considerando il termine B_w accennato nell'espressione a quella duale a quella del segnale periodicizzato, definito come:

$$B_w = Nf_0$$

Riprendiamo la definizione di $X_p(f)$, proposta precedentemente quando abbiamo introdotto la dualità, ossia:

$$\frac{1}{B_w} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x \left(\frac{n}{B_w} \right) e^{-jn \frac{2\pi}{B_w} f}$$

Dal momento che dobbiamo sostituire l'espressione di μ_{n+rN} in questa, otterremo finalmente l'espressione della *DFT*:

$$x(mT_0) \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} X_p(nf_0) e^{jm \frac{2\pi}{N} n}$$

Dove possiamo far variare m a seconda del valore del segnale nel dominio del tempo che intendiamo considerare; del tutto dualmente, si può anche dimostrare la validità dell'espressione della *IDFT*, che sarà:

$$X_p(nf_0) = \frac{T}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_p(mT_0) e^{-jn \frac{2\pi}{N} m}$$

Dove, dualmente a prima, possiamo far variare n a seconda del valore dello spettro, ossia del segnale nel dominio delle frequenze, che vogliamo considerare.

Sicuramente vedere una tal dimostrazione può sembrare quantomeno scoraggiante; cerchiamo dunque di capire come utilizzare queste conoscenze, in modo da renderle utili ed impadronircene.

Supponiamo di aver a che fare con un segnale qualsiasi, per esempio un classico:

$$x(t) = u(t) e^{-kt}$$

Cosa significa tutto ciò che abbiamo finora detto? Cerchiamo di capirlo: lo spettro in frequenza del segnale continuo, $X(f)$, sarebbe:

$$X(f) = \frac{1}{k + j2\pi f}$$

Abbiamo dunque un segnale definito nel dominio del tempo solo per $t \leq 0$, ossia solo per tempi positivi, ed uno spettro a campana.

Consideriamo di avere un tempo di periodizzazione nel dominio del tempo molto elevato: T quindi è abbastanza grande da poter contenere una buona parte del segnale, ossia è abbastanza grande da avere in buona approssimazione il segnale; si noti che, limitando a T il segnale, non avremo tutto il segnale, ma ne avremo tagliata una coda, ottenendo sì una buona approssimazione, ma non il segnale perfetto; il segnale compreso tra 0 e T sarà il periodo base del nostro segnale, periodo base che, per rispettare i principi, dovremo prolungare per periodicità, con il solito procedimento: considerando un tempo di campionamento T_0 , dovremo considerare il segnale così definito:

$$x_p(t) = x(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Scegliendo un T sufficientemente elevato, potremo dire di aver quasi eliminato i fenomeni di aliasing: poichè abbiamo a che fare con esponenziali, funzioni che tendono molto velocemente a 0, ci sarà sì una sommatoria delle code, ma, con un periodo adeguatamente grande, si elimina questo tipo di interferenza, o quantomeno si riduce a termini del tutto trascurabili.

Sulle frequenze ciò purtroppo non è vero: abbiamo a che fare con una funzione sostanzialmente polinomiale, e che dunque è infinitesima per $f \rightarrow \pm\infty$, però molto più lentamente di un esponenziale. Qua, anche con un B_w adeguato (dove ricordiamo che B_w rappresenta il periodo base dello spettro periodicizzato, con la stessa tecnica appena utilizzata per periodicizzare il segnale nel dominio del tempo), avremo comunque fenomeni di aliasing assolutamente non trascurabili. Lo spettro periodicizzato dunque avrà una forma del tipo:

$$X_p(f) = X_f \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nB_w)$$

Ora che abbiamo periodicizzato, separatamente, segnale nel dominio del tempo e spettro in frequenza, possiamo passare al campionamento: campioniamo dunque a questo punto, con passo temporale T_0 , dal punto $t = 0$ al punto $t = (N - 1)T_0$, il segnale nel dominio del tempo. Facciamo lo stesso lavoro nel dominio delle frequenze, campionando le frequenze da $f = 0$ a $f = (N - 1)F_0$, dove F_0 rappresenta il passo di campionamento in frequenza. Si noti che stiamo anche contando fenomeni di aliasing, in questo ambito.

Entra finalmente in gioco la DFT: ciò che abbiamo studiato, ci permette di legare i parametri nel seguente modo:

$$B_w = \frac{1}{T_0}; \quad F_0 = \frac{1}{T}; \quad N = \frac{T}{T_0}; \quad N = \frac{B_w}{F_0}$$

Questo è l'enorme potere che ci fornisce la DFT: abbiamo due equazioni che ci vincolano, ossia l'equazione della DFT e l'equazione della IDFT; abbiamo però libertà di agire su 4 parametri, e quindi due gradi di libertà, poichè disponiamo di un sistema di 4 incognite libere e 2 equazioni. Questa libertà si potrà utilizzare per ottimizzare il processamento del segnale, mediante la trasformata di Fourier discreta. Con gli attuali calcolatori elettronici, di fatto parlare di ottimizzazione in un problema come lo studio della trasformata di Fourier non è molto utile, in quanto abbiamo una potenza di calcolo molto elevata rispetto ai problemi che dobbiamo affrontare, quindi non sarà necessario studiare ad-hoc i problemi, nella pratica. Una prima osservazione che possiamo fare, è come ottimizzare i segnali in ingresso alla DFT, ossia come

migliorare l'effetto anti-aliasing ed eventualmente la risoluzione del segnale, ossia il numero di punti che studiamo con questo tipo di algoritmo.

- Diminuendo il parametro T_0 , come si osserva dalle relazioni, si aumenta la banda B_w in frequenza, ossia si aumenta la lunghezza del periodo base del segnale che andrà a replicarsi, dunque le varie repliche nel dominio delle frequenze tendono ad allontanarsi. Nel dominio del tempo si vedrà una riduzione del passo di campionamento, e dunque una miglior risoluzione nel tempo. Supponendo di avere un segnale che subisce molto pesantemente l'aliasing, facendo tendere a 0 il tempo di campionamento T_0 , quindi $T_0 \rightarrow 0$, si riesce a campionare abbastanza efficacemente un segnale a banda molto larga.
- Per aumentare la risoluzione, il numero di punti, ossia N , come si nota dalle equazioni, dovremmo diminuire la frequenza di campionamento nel dominio delle frequenze, F_0 , e quindi aumentare il periodo T : quindi, più si considera lungo il periodo base nel dominio del tempo, più aumenteremo, miglioreremo la risoluzione nel dominio della frequenza.

Approfondiamo l'argomento, vedendo come sfruttare in modo ottimale i due parametri liberi, i due gradi di libertà che abbiamo a disposizione.

7.2.1 Criteri per la scelta dei parametri liberi

Esponiamo ora diverse casistiche, al fine di avere alcune idee su come scegliere opportunamente i vari parametri della DFT, in diversi tipi di problemi.

x(t) a banda limitata

Dato un segnale $x(t)$ a banda limitata, ossia il cui spettro è nullo per frequenze superiori ad una certa frequenza B , possiamo procedere in questo modo: un parametro da impostare in modo intelligente sarà sicuramente la B_w , ossia la frequenza di cut-off del filtro anti-aliasing e del filtro ricostruttore al termine del segnale; scegliamo dunque, come periodo base dello spettro in frequenza, per la periodizzazione:

$$B_w = 2B$$

Abbiamo dunque dal problema un suggerimento valido: un'idea su che frequenza impostare come cut-off; possiamo considerare questo parametro come un terzo parametro, vincolato dal problema e non dalla definizione di DFT. Come parametro libero a nostra totale discrezione, scegliamo F_0 , ossia

il passo di campionamento nel dominio delle frequenze. Abbiamo dunque finalmente un problema ben definito, infatti:

$$N = \frac{B_w}{F_0} = \frac{2B}{F_0}; \quad T_0 = \frac{1}{B_w} = \frac{1}{2B}$$

N.B. : in problemi di questo tipo, talvolta si sceglie fissare il parametro N anzichè F_0 , ossia la risoluzione del campionamento.

x(t) limitato nel tempo

Dato un segnale $x(t)$ limitato nel tempo, ossia la cui rappresentazione nel dominio del tempo è nulla al di sopra di un certo valore T , abbiamo come parametro fissato dal problema per l'appunto la durata del periodo base, T . Come parametro libero, potremmo scegliere questa volta il passo di campionamento nel dominio del tempo, T_0 , e quindi:

$$N = \frac{T}{T_0}; \quad F_0 = \frac{1}{T}; \quad B_w = \frac{1}{T_0}$$

x(t) periodico di periodo T_x

In situazioni come questa, scegliamo ancora una volta di fissare T , come un multiplo del periodo T_x : $T = kT_x$, dove $k \in \mathbb{Z}$.

In questo modo, otteniamo due enormi vantaggi:

- Non abbiamo rischio di avere fenomeni di aliasing;
- Il segnale periodico ha uno spettro a righe, con frequenza fondamentale f_x , dove f_x si definisce come l'inverso del periodo:

$$f_x = \frac{1}{T_x}$$

A questo punto, lo spettro è uno spettro a righe, che esiste solamente sui multipli della frequenza fondamentale, f_x . Possiamo di conseguenza scegliere il parametro F_0 in modo intelligente, ossia.

$$F_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{kT_x} = \frac{f_x}{k}$$

Avremo cioè F_0 sottomultiplo di f_x , per il campionamento del segnale. Sarà banale trovare tutti gli altri parametri, con le solite equazioni.

Zero Padding

Supponiamo di avere un problema di tipo molto diverso: abbiamo a disposizione 1000 campioni, e dunque la risoluzione, $N = 1000$. Supponiamo a questo punto che ci servano, nel DSP, 5000 valori, e quindi che nel vettore che si inserisce nel processore servano 5000 elementi. La tattica da usare è molto semplice: utilizzare un metodo di interpolazione, noto come zero padding. Questo consiste semplicemente nell'aggiungere zeri in determinati punti del vettore, in modo da poter avere un vettore completo; nel nostro caso dunque, dovremmo inserire 4000 zeri: in questo modo, si può dimostrare che l'algoritmo della DFT è in grado di reagire a questi zeri nel vettore interpolando ulteriormente il segnale, e dunque migliorando notevolmente la risoluzione, a spese minime.

Cenni su FFT

Concludiamo questo capitolo fornendo alcuni cenni su di un'implementazione della DFT: la FFT. Come detto, la DFT nacque per poter rendere utilizzabile in processori elaboranti segnali numerici un equivalente della trasformata di Fourier nel discreto; la FFT (Fast Fourier Transform) rappresenta una veloce implementazione di questo algoritmo. Poichè in software per l'elaborazione numerica quali Matlab si utilizza sempre questo algoritmo, è meglio quantomeno fornire cenni sul suo funzionamento: esso è estremamente più efficiente della DFT pura, in quanto quest'ultima ha una complessità computazionale, in caso di worst case, come $O(N^2)$, dove N è la lunghezza del vettore in input; la FFT è in grado di avere una complessità computazionale in caso di worst case pari a $O(N \log(N))$, ottimizzando dunque notevolmente l'algoritmo padre.

La FFT ha la proprietà di processare prima la parte positiva del segnale, poi quella negativa: analizzando il segnale, osserveremmo qualcosa di molto diverso (apparentemente) da ciò che ci potremmo aspettare da un ipotetico processore in grado di trasformare il continuo; semplicemente, fissato B_w , la FFT da 0 a $\frac{B_w}{2}$ processa la parte positiva del segnale, poi solo dopo, sfruttando la periodicità (imposta tra i vincoli all'inizio della trattazione) processa la parte negativa, da $\frac{B_w}{2}$ a B_w , al contrario di come dovrebbe fare. Volendo dunque estrarre per esempio in un nostro studio le sole frequenze positive, dovremmo considerare solo quelle da 0 a $\frac{B_w}{2}$.

La FFT è un algoritmo geniale, probabilmente il più utilizzato nel settore delle comunicazioni e non solo, e, conoscendolo bene, è possibile sfruttare pienamente le sue enormi potenzialità.

Capitolo 8

Processi Stocastici

Abbiamo finora parlato esclusivamente di processi deterministici: processi dei quali siamo in grado di determinare presente, passato, e futuro. Ora intendiamo parlare di un tipo di segnali, di processi ben diversi da tutti quelli che abbiamo considerato finora, ossia processi casuali, processi dei quali non è possibile conoscere il futuro, ossia i valori in un punto temporale più avanzato rispetto a quello in cui ci troviamo, più avanti nel tempo rispetto al nostro presente.

Nella realtà capita molto spesso di dover studiare segnali dei quali non conosciamo il futuro, sull'andamento dei quali possiamo in qualche modo provar a fare previsioni, dopo aver effettuato uno studio, in qualche modo che ora vedremo, su di essi.

Consideriamo un esempio veramente storico di studio di processi stocastici, effettuato da uno dei più grandi geni della fisica: Albert Einstein. Nel 1905, Einstein propose un lavoro, un articolo, riguardante il moto browniano. Il botanico Robert Brown nel 1827 studiando con un microscopio particelle di polline in un dischetto d'acqua, praticamente isolato rispetto a fonti di energia esterne, notò un fatto sorprendente: le molecole di polline, apparentemente non animate da alcun oggetto, si muovevano, spontaneamente, con un moto estremamente irregolare, seguendo molte spezzate. Ai tempi non esistevano teorie in grado di esporre una fenomenologia del genere, di conseguenza, ingenuamente, Brown pensò che il polline fosse dotato di vita.

Quello che mancava ai tempi, la teoria in grado di spiegare questo tipo di fenomeni, era una teoria atomistica, che però Einstein aveva evidentemente in mente, quando ebbe una delle sue geniali intuizioni: il fatto che la particella di polline si muova, dipende da urti con altre particelle, nella fatispecie le particelle costituenti l'acqua, ossia le molecole di H_2O .

Einstein notò che gli andamenti di queste particelle al variare del tempo si assomigliavano in un certo senso, pur non essendo identici: si notava un anda-

mento in qualche modo divergente del moto delle particelle, tuttavia si poteva notare notevoli similitudini tra i vari esperimenti compiuti. Oltre all'idea geniale però, Einstein introdusse un notevole formalismo matematico, dando così vita ad una modellizzazione matematica in grado di presentare fenomeni di diffusione di qualsiasi genere, modello che si utilizza in moltissime branche della fisica e dell'ingegneria. Einstein, di suo, riuscì a provare l'esistenza degli atomi, trasformando di fatto il suo articolo sul moto browniano in un articolo dimostrante l'esistenza degli atomi, ossia di particelle fondamentali che compongono la materia.

Abbandonando l'esempio riguardante l'illustre scienziato, per presentare due concetti che ci accompagneranno spesso nello studio dei processi stocastici:

- Se osserviamo sulle orizzontali, ossia seguendo il solo asse orizzontale, un singolo grafico, rappresentante un singolo esperimento, un singolo andamento del segnale, abbiamo una realizzazione, ossia una lettura orizzontale di un esperimento.
- Se ci fissiamo su di un certo tempo t_1 , l'insieme dei t_1 su ciascuna delle varie realizzazioni (di cui abbiamo presentato un numero limitato, anche se in realtà, parlando di processi stocastici, esse sono infinite), è una densità di probabilità, ossia una $f_{X(t_1)}(x_1)$. In altre parole, dato un t_1 , vi sono infiniti punti in cui esso si può trovare, ma disponiamo di una densità di probabilità che ci afferma dove è più o meno probabile che il fenomeno sia, in un determinato momento t_1 .

L'insieme di tutte le realizzazioni, considerate in ognuno dei tempi, e dunque l'insieme di tutte le variabili aleatorie in ogni tempo, è un processo casuale. Possiamo dire che un processo casuale sia un modo di vedere come un insieme di variabili aleatorie si evolve nel tempo.

8.1 Analisi semplificata dei processi stocastici

Le variabili aleatorie (o casuali) costituenti il processo stocastico non sono però scorrelate tra loro: dal momento che l'andamento di ogni realizzazione, ossia di ogni esperimento, è simile, si può dire che esse siano l'una dipendente dall'altra, e ciò dal punto di vista fisico è eccellente, in quanto rispecchia ciò che volevamo trovare: una modellizzazione fisica di un evento.

Dal punto di vista della matematica, abbiamo a che fare con una vera catastrofe: ogni variabile aleatoria è stocasticamente dipendente dalle altre,

è correlata con le altre, dunque, quando intendiamo studiare le densità di probabilità del processo stocastico, dovremmo studiare probabilità di tipo congiunto: ad esempio, volendo studiare la densità di probabilità congiunta di due singoli istanti, $F_{X(t_1), X(t_2)}(x_2; x_2)$, il fatto che le due variabili aleatorie sian correlate, ci porta un'enorme complessità nel calcolo della funzione di nostro interesse. Avremmo addirittura a che fare con funzioni di densità di probabilità congiunte di ordine N , con N molto elevato, a seconda del numero di istanti che intendiamo considerare assieme, avendo quindi enormi problemi di calcolo.

Negli anni, tuttavia, sono maturate conoscenze, che ci hanno portato a sacrificare una parte delle informazioni che potevamo ricavare da funzioni di densità di variabili aleatorie congiunte, ai fini di sviluppare un'analisi semplificata dei processi casuali, considerando solo lo studio di momenti, come vedremo tra breve. Studiando solo momenti della variabile aleatoria troviamo un buon compromesso tra le informazioni che abbiamo a disposizione, e la difficoltà nei calcoli da affrontare. Nella nostra analisi semplificata, avremo a che fare sostanzialmente con tre importanti grandezze, tre importanti quantità, che permetteranno di determinare il nostro processo casuale con una buona approssimazione.

8.1.1 Valore Atteso o Media

Proponiamo un esempio teorico, per spiegare l'idea che sta dietro al primo degli elementi che ci permetterà di studiare un processo stocastico: supponiamo di aver appena invitato nella nostra città una persona che abita molto lontano, e dunque non conosce il clima della zona. In città ci sono zone più calde, zone meno calde, ma troviamo molto spesso per le strade termometri, per esempio quelli così utili delle farmacie, che ci forniscono la temperatura locale. Non possiamo però dire al nostro amico il valore misurato da ciascun termometro: non avrebbe senso, in quanto come dato è illeggibile, abbastanza inutile dunque di per sé. Immaginiamo di essere di mattina (dopo estenderemo), ad un certo istante temporale t_1 , e dunque di disporre, con tutti i termometri, di una densità di probabilità. Per fornire un dato utile all'estraneo, potremmo dargli quello che viene chiamato, in Calcolo delle Probabilità, il valore atteso della funzione di temperatura $X(t_1)$, all'istante t_1 , o più comunemente, la media $\mu(t_1)$:

$$\mu(t_1) = \mathbb{E}[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t_1)}(x) dx$$

Per un altro tempo t_2 avremo un'altra $\mu(t_2)$ definita analogamente, e così

via. Possiamo dunque definire, per un generico tempo, la funzione media come:

$$\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$$

Questa è la prima delle grandezze importanti che si introduce, nella nostra analisi semplificata dei processi stocastici. La media, di fatto, è una funzione che evolve nel tempo: a seconda degli istanti della giornata, questa assumerà valori diversi.

8.1.2 Varianza dal Valore Atteso

Supponiamo che il nostro amico che viene a farci visita sia un gran pignolo, e supponiamo che voglia avere un'informazione sull'errore della media: la media di per sè è certo significativa, ma non abbiamo informazioni sulla dispersione dei valori che la compongono: potrebbero di fatto essere tutti valori concentrati in un piccolo intorno della media, come potrebbero essere valori sparpagliati a qualsiasi temperatura: è chiaramente improbabile che ciò accada in una città, ma supponiamo di vivere nel mondo dei balocchi. Il nostro amico vuole dunque sapere se è il caso di portare un certo numero di indumenti nei bagagli, se la media rappresenta male lo stato della città, oppure non appesantirsi troppo, se di fatto la media è molto indicativa della situazione termica in cui ci si trova. Serve dunque un termine di affidabilità della media, quella che viene chiamata in metrologia l'incertezza sulla media, ossia un indice sulla dispersione dei valori che la forniscono. Per questo, si riprende la definizione probabilistica di varianza $\sigma^2(t)$ (considerando subito il caso generale, estendendo immediatamente il caso di varianza in evoluzione nel tempo durante la giornata):

$$\sigma^2(t) = \mathbb{E}[(X(t_1) - \mathbb{E}[X(t_1)])^2]$$

Ossia, si definisce la varianza come il valore atteso (la media) degli scarti quadratici della media dal processo. Ricordando che $\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$, possiamo generalizzare la definizione come:

$$\sigma^2(t) = \mathbb{E}[(X(t) - \mu(t))^2]$$

Esiste una differente formula per il calcolo della varianza, più agile: sviluppando il quadrato del binomio interno al valore atteso, e sfruttando la linearità del valore atteso (derivante dal fatto che esso si definisce mediante un integrale, che è un operatore lineare su spazi vettoriali), si ottiene che:

$$\sigma^2(t) = \mathbb{E}[X^2(t) - 2X(t)\mu(t) + \mu^2(t)]$$

Usando la linearità dunque, e il fatto che $\mu(t)$ è una funzione indipendente dalla variabile aleatoria $X(t)$, svolgiamo così:

$$= \mathbb{E} [X^2(t)] + \mu^2(t) - 2\mu(t)\mathbb{E} [X(t)]$$

Ma notiamo che $\mathbb{E} [X(t)] = \mu(t)$:

$$\implies \sigma^2(t) = \mathbb{E} [X^2(t)] - \mu^2(t)$$

Se abbiamo a che fare con un segnale a media nulla, la varianza coincide con quello che viene di solito chiamato momento semplice del secondo ordine, ossia valore atteso del quadrato della variabile aleatoria:

$$\sigma^2(t) = \mathbb{E} [X^2(t)]$$

Di solito però quella che si fornisce agli amici è $\sigma(t)$, e non la varianza, ossia la deviazione standard, la radice quadrata della varianza: la varianza infatti è una grandezza quadratica, il valore atteso una grandezza lineare, e dunque si è soliti consegnare un risultato ben dimensionato, e quindi valore e incertezza sul valore della stessa dimensione.

8.1.3 Funzione di autocorrelazione

Vorremmo dunque inserire, nel set delle informazioni da fornire al nostro amico, ancora un dato: una funzione in grado di quantificare l'inerzia, la lentezza di un sistema a variare, nell'ambito dei processi casuali. Riprendendo dunque un vecchio concetto dal mondo dei segnali deterministici, sappiamo che l'inerzia di un segnale si può tradurre con la funzione di autocorrelazione. Siamo dunque soliti definire una funzione, detta funzione di autocorrelazione, come:

$$R(t_1; t_2) = \mathbb{E} [X(t_1) \cdot X^*(t_2)]$$

Ossia, volendo studiare l'inerzia del sistema tra due tempi, si può utilizzare la funzione di autocorrelazione appena definita: essa studia il legame tra due tempi, e quindi tra due diverse variabili aleatorie. Anche essa è di fatto un momento secondo, in quanto consideriamo il valore atteso di una grandezza quadratica, anche se in questo caso non è semplice, perchè abbiamo a che fare con due distinte variabili casuali: per questo motivo, si parla di autocorrelazione a due tempi.

Qual è ora il nostro problema? Questa funzione certo fa il suo mestiere, ma è molto difficile da determinare: serve infatti la densità congiunta di $X(t_1)$ e di $X(t_2)$, come sappiamo molto difficile da calcolare.

Si introduce dunque una classe di segnali privilegiati, detti segnali WSS (Wide Stationary Signals), comprendenti i segnali che soddisfano due proprietà, in tutto il loro campo di esistenza (nel tempo):

- $\mu(t) = \mu$: la media è una funzione costante nel tempo.
- $R(t_1; t_2) = R(t_1 - t_2)$: l'autocorrelazione è esclusivamente funzione della distanza $t_1 - t_2$, ma non conta la differenza dovuta ad una traslazione tra le due variabili aleatorie. Dunque esclusivamente funzione di $\tau = t_1 - t_2$, dove τ , il lag, esprime appunto un ritardo tra le due variabili aleatorie. Si è soliti scrivere infatti in questo ambito, $R(\tau)$ invece di $R(t_1; t_2)$.

La funzione di autocorrelazione dunque in questo ambito sarà:

$$R(\tau) = \mathbb{E}[X(t) \cdot X^*(t + \tau)]$$

Si noti che ciò deve essere vero per un sistema con segnali WSS, dato qualsiasi t_1 e t_2 in cui i sistemi son definiti. Consideriamo un esempio teorico per capire quanto siano restrittive in realtà le condizioni che abbiamo imposto.

Esempio Teorico 3 *Dato un segnale descritto come un segnale definito e non nullo da $t = 0$ a $t = T$, qui a valor medio nullo, quindi $\mu = 0$, e nullo altrove, esso è un processo WSS?*

Risolviamo il problema: la prima condizione è soddisfatta, in quanto la media è costante, e anzi nulla:

$$\mu(t) = \mu = 0$$

Il fatto che la media sia nulla, ci implica un fatto molto interessante: proviamo a calcolare la funzione di autocorrelazione. Notiamo che, come già accennato, se $\mu(t) = 0$, allora la varianza coinciderà con il momento secondo della variabile aleatoria. Notiamo a questo punto che possiamo calcolare facilmente la funzione di autocorrelazione di questo processo, poichè:

$$R(0) = \mathbb{E}[X(t)X(t + 0)] = \sigma^2(t)$$

In questo ambito, capiamo che la varianza dovrebbe essere costante, ma ciò non è vero: dovremmo avere le stesse proprietà della funzione di autocorrelazione in ogni punto del segnale, per ogni t , da $-\infty$ a $+\infty$, ma questa cosa non si verifica, in questo segnale, come è possibile vedere grazie a questo trucco della varianza.

Anche a occhio si può vedere facilmente, poichè abbiamo detto che la funzione di autocorrelazione, in un processo WSS, deve essere indipendente per

traslazione, ossia, variando $\tau = t_1 - t_2$, ossia variando la distanza temporale dei punti che analizziamo, non dobbiamo avere variazioni dalla funzione di autocorrelazione originaria. Possiamo dire senza troppi indugi che questo processo casuale non sia un WSS.

Si noti che non sempre è così facile fare verifiche: qua $\tau = 0$ ci ha permesso di effettuare un test sulla varianza, ma non sempre è possibile una cosa del genere.

8.2 Analisi in frequenza di processi stocastici

Supponiamo di avere un processo casuale, le cui rappresentazioni ricordano un andamento, che ricorda vagamente una sinusoidale (per quanto esso ovviamente non sia sinusoidale).

Potrebbe venirci spontanea una domanda: dato un processo casuale, è possibile fare analisi in frequenza, come avevamo fatto per processi determinati? La risposta è sì, con alcune riserve, con alcune condizioni: nella nostra analisi semplificata, abbiamo sacrificato parte delle informazioni di cui disponevamo del processo stocastico, al fine di ottenere parametri semplici da trattare. L'unica cosa che sarà possibile studiare dunque, in analisi in frequenza di processi stocastici, è lo spettro di potenza del processo. Ricordiamo, dalla teoria dei segnali determinati (poichè il significato è in questo caso del tutto analogo) il fatto che lo spettro di potenza in frequenza si può scrivere come:

$$G_X(f) = \mathcal{F}\{R(\tau)\}$$

Ossia, come trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione.

Consideriamo ora un processo WSS: sappiamo che esso è definito da $-\infty$ a $+\infty$; molto spesso esso sarà un segnale a potenza finita (anche se in realtà non è assolutamente detto ciò, saran possibili anche segnali a potenza non finita, come vedremo tra breve in un esempio): unica cosa sicura è che parlare di energia, in questo ambito, è assolutamente fuori luogo.

Dunque:

$$G_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Dato dunque un segnale tranquillo, lento, senza particolari frastagliamenti, lo spettro di potenza potrebbe avere un'estensione elevata solamente in basse frequenze, intuitivamente come nel caso di segnali deterministici; analogamente ai segnali non deterministici, se abbiamo un processo casuale

le cui rappresentazioni sono molto irregolari, frastagliate, lo spettro di potenza sarà molto esteso, ampio, tendenzialmente molto più piatto: dal momento che servono molte più frequenze, servono frequenze molto elevate al fine di poter rappresentare un segnale così frastagliato, così veloce, allora lo spettro sarà molto più completo sulle alte frequenze, quasi simile ad una costante.

Un'altra osservazione: dato un intervallo di frequenze compreso tra f_1 ed f_2 frequenze limite, l'area sottesa a questa porzione di spettro è la potenza media del segnale: come già in altri casi, vincolarci a $\mathbb{E}[X]$ ci ha portati a perdere la possibilità di disporre di informazioni più dettagliate, dobbiamo quindi accontentarci esclusivamente di informazioni sulla potenza, non disponendo di informazioni superiori.

Una nota: dato un segnale a valor medio nullo, ossia in cui $\mu(t) = 0$, la regola introdotta nell'esempio precedente è sempre valida, per un processo WSS:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Si verifica dunque il fatto che, con $\tau = 0$, la varianza σ^2 vale:

$$\sigma^2(t) = \sigma^2 = R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(f) df$$

Ossia la varianza, data $\mu(t) = 0$, si può anche pensare come l'area sottesa a tutto lo spettro di potenza.

Ultima nota conclusiva, prima di introdurre l'ultimo esempio teorico, che terminerà la trattazione, è la seguente: dato un sistema LTI, esso può processare un processo casuale, descritto da $G_X(f)$. Si può dunque ottenere lo spettro del segnale in uscita, $G_Y(f)$, mediante l'applicazione di $H(f)$: in questo ambito si lavorerà, come possiamo immaginare, sul modulo quadro di $H(f)$, ossia:

$$G_Y(f) = |H(f)|^2 \cdot G_X(f)$$

8.3 Esempio Teorico: Il Rumore Bianco

Per rumore bianco si intende un processo casuale dotato delle seguenti caratteristiche:

$$\begin{cases} \mu(t) = 0 \\ R(\tau) = \delta(\tau) \end{cases}$$

Questa cosa è molto molto particolare ed interessante: solo in $\tau = 0$ la correlazione è non nulla, ossia considerando ritardi, lag di qualsiasi tipo, abbiamo a che fare con variabili aleatorie totalmente scorrelate tra loro. La cosa ci permette di studiare con una certa semplicità processi casuali di questo tipo. Lo spettro di potenza del rumore bianco inoltre, dal momento che abbiamo a che fare con una funzione di autocorrelazione impulsiva, sarà una costante:

$$G_X(f) = \mathcal{F}\{R(\tau)\} = \mathcal{F}\{\delta(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = 1$$

Da ciò deriva il nome rumore bianco: esso è un segnale che al suo interno contiene tutte le frequenze, in egual misura, esattamente come la luce bianca contiene tutti i colori al suo interno. Calcoliamo ora la varianza di questo processo:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_X(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 df = +\infty$$

Questo segnale ha varianza infinita. Si tratta di un qualcosa che non abbiamo finora incontrato nei nostri studi. Le sue caratteristiche, e la sua semplicità di studio sotto il punto di vista dei calcoli, permette di utilizzare questo segnale per modellizzare i rumori di tipo stazionario, in prima approssimazione quantomeno.

8.3.1 Rumore Bianco Gaussiano

Uno dei processi casuali appartenenti alla classe dei rumori bianchi molto interessante, in elettronica, è il rumore bianco gaussiano (WGN: White Gaussian Noise): un processo in cui $\mu(t) = 0$, $R(\tau) = \delta(\tau)$, ma che in ogni tempo t ha come variabile aleatoria una gaussiana. Quest'ultima caratteristica rende questo processo molto più interessante di ogni altro white noise: se consideriamo la funzione di autocorrelazione, essa è nulla al di fuori del punto $\tau = 0$, quindi le variabili aleatorie per lag diversi da 0, ossia per tempi $t_1, t_2, t_1 \neq t_2$, sono gaussiane scorrelate, tra loro indipendenti, e il calcolo delle loro funzioni di densità congiunte è molto semplice.

Poiché non vi è legame nei vari istanti tra le varie variabili casuali, si parla del white gaussian noise come di un caso particolare di WSS, ossia di SSS, ossia segnale stazionario in senso stretto.