Politecnico di Torino

Filtri e reti non lineari

Progetto di un filtro passa-alto

Autori:
Ivan Demaria
David Tabacco
Alberto Tibaldi

Docente:
Mario Biey

8 febbraio 2009

Introduzione

Il presente documento contiene una relazione del lavoro effettuato per il progetto dei filtri assegnati nel corso di Filtri e Reti non Lineari tenuto al Politecnico di Torino, nell'anno accademico 2008/2009.

Per ciascuno dei filtri si descriveranno i passi seguiti e si proporranno i risultati calcolati, per poi proporre il circuito finale e i risultati delle simulazioni effettuate mediante il software PSpice.

Come la precedente frase suggerisce, la relazione sarà suddivisa in 3 capitoli, ciascuno associato ad uno dei progetti effettuati; in ciascun capitolo si cercherà di esaurire i quesiti richiesti nelle specifiche, in modo da presentare i risultati conseguiti in seguito alle fasi di progetto e simulazione.

Le specifiche richiedono il progetto di un filtro passa alto con:

- Curva di risposta alla Chebyshev;
- Banda passante da 35 kHz a $+\infty$, con attenuazione non superiore a $\alpha_M = 1,25$ dB;
- Banda attenuata da 0 kHz a 10 kHz, con attenuazione minima $\alpha_m = 55$ dB.

Le tre possibili realizzazioni circuitali delle precedenti specifiche sono:

- Filtro basato su circuito LC passivo bicaricato;
- Filtro basato su circuito LC passivo monocaricato;
- Filtro basato su circuito RC attivo.

Capitolo 1

Sintesi del filtro mediante circuito LC passivo bicaricato

In questo primo capitolo si proporranno alcuni calcoli comuni a tutte le realizzazioni possibili del filtro, calcoli che quindi non verranno riproposti in altri capitoli del documento: il calcolo del fattore ε e quello dell'ordine del filtro n infatti sono validi per qualsiasi realizzazione, sia essa effettuata mediante circuiti passivi o attivi.

1.1 Sintesi funzione di trasferimento passa-basso normalizzato

Dalla teoria si riprende l'espressione operativa per il calcolo del parametro ε, a partire dal quale si potrà quindi calcolare l'ordine n del filtro:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1\cdot\alpha_M} - 1} = 0,57751314458$$

Si calcola quindi, per quanto riguarda il filtro passa-alto, la pulsazione normalizzata Ω_S indicante l'inizio della banda di attenuazione, come:

$$\Omega_S = \frac{\omega_0}{\omega_S} = 3,5\,\mathrm{Hz}$$

A partire da questi parametri è dunque possibile calcolare l'ordine del filtro come:

$$n \geq \frac{\operatorname{arccosh}\left(\frac{\sqrt{10^{0,1\cdot\alpha_m} - 1}}{|\varepsilon|}\right)}{\operatorname{arccosh}(\Omega_S)} \simeq 4$$

Il filtro in questione dunque deve avere almeno ordine 4; al fine di minimizzare il numero di elementi reattivi, quindi, si sceglie di sintetizzare un filtro di ordine 4.

Al fine di scegliere il filtro che meglio potrebbe soddisfare le specifiche, dal catalogo si sceglie quello corrispondente alla sezione "C0450". L'idea principale è stata quella di considerare il filtro Chebyshev già sintetizzato, a partire dunque dall'uso della riga "T" della tabella del catalogo; mediante una verifica (in seguito proposta in forma grafica) dell'andamento qualitativo del filtro, è stata stimata un'attenuazione minima di 54 dB, dunque insufficiente al fine di soddisfare le specifiche di progetto.

La soluzione al problema è adottare il metodo di sintesi manuale del filtro, mediante i metodi studiati in sede di lezione. Dalla teoria, dunque, si sa che il modulo quadro della funzione di trasferimento del circuito è quantificabile come:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{M}{1 + |h(j\Omega)|^2}$$

Dal momento che si intende utilizzare una approssimazione alla Chebyshev, si può dire che:

$$\left|h(j\Omega)^2\right| = \varepsilon^2 \left|T_4(\Omega)\right|^2$$

Dove $T_4(\Omega)$ è il polinomio di Chebyshev di ordine 4; esso si può ricavare mediante sintesi a partire dalla formula recursiva, ottenendo:

$$T_4(j\Omega) = 8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1$$

Si può dunque dire che, essendo il filtro passa-alto dotato di guadagno unitario in banda passante, $M = 1$; l'espressione operativa della funzione di trasferimento nel dominio di Fourier (normalizzata in Ω) sarà dunque:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left|8\Omega^4 - 8\Omega^2 + 1\right|^2}$$

Dal momento che il procedimento di sintesi viene comunemente utilizzato nel dominio della variabile s, ossia nel dominio di Laplace, considerando l'ascissa di convergenza nulla, si può effettuare il passaggio di dominio considerando semplicemente la seguente trasformazione:

$$s = j\omega$$

Quindi la funzione di trasferimento, espressa nel dominio di Laplace, avrà la seguente espressione operativa:

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[8s^4 + 8s^2 + 1\right]^2}$$

Il metodo di sintesi a questo punto richiede il calcolo della funzione $H(s)$; essa si può ricavare, a partire dalla seguente osservazione:

$$|H(s)|^2 = H(s) \cdot H(-s) = \frac{f(s) \cdot f(-s)}{g(s)g(-s)}$$

Cosa significa ciò? Il filtro che si intende calcolare deve essere un circuito stabile, ossia tale per cui i poli della sua funzione di trasferimento si trovino nel semipiano sinistro del dominio di Laplace (in termini di piano complesso, nel cerchio unitario); al fine di determinare la "corretta" $H(s)$, sarà necessario fattorizzare, mediante l'ausilio di un calcolatore (al fine di risparmiare tempo rispetto a metodi analitici egualmente validi se non nell'efficienza), ricavare gli zeri del denominatore di $|H(s)|^2$, che definiremo con la funzione $g(s)$; dunque:

$$H(s) = \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{1}{g(s)}$$

Mediante il calcolatore, dunque, è stato possibile ricavare i seguenti valori:

$$s_{1,2,3,4} = \pm 0,309643375347 \pm j0,403604817274$$

$$s_{5,6,7,8} = \pm 0,128258485568 \pm j0,974388223702$$

Al fine di garantire la stabilità, come già detto, dunque, è necessario selezionare tutte le soluzioni tali da avere poli nel semipiano sinistro del dominio s, e moltiplicarle tra di loro in modo da "costruire" il polinomio $g(s)$; scrivendo solo una cifra decimale per compattezza (anche se nei calcoli successivi saranno mantenute tutte), si descrive dunque il calcolo della funzione $H(s)$ del filtro passa-basso normalizzato:

$$H(s) = \frac{1}{g(s)} =$$

$$= \frac{1}{[s-(-0,3+j0,4)]\cdot[s-(-0,3-j0,4)]\cdot[s-(-0,1+j)]\cdot[s-(-0,1-j)]}$$

Mediante il calcolatore, è stata quindi ottenuta la seguente espressione analitica di $H(s)$ (delle quali verranno scritte cinque cifre decimali, per quanto si continuino a conservare tutte le cifre nel calcolatore per calcoli successivi):

$$H(s) = \frac{1}{g(s)} = \frac{1}{4,62011s^4 + 4,04631s^3 + 6,39199s^2 + 3,07024s + 1,15478}$$

Il fine ultimo del metodo di sintesi in uso è ricavare l'espressione operativa dell'impedenza vista in ingresso al circuito, $z(s)$, a partire dalle espressioni finora ottenute; si definisce il coefficiente di riflessione in ingresso al circuito, $\rho(s)$, come:

$$\rho(s) = \frac{R_G - z(s)}{R_G + z(s)}$$

Questa definizione è stata introdotta al fine di poter applicare, a questo punto, il teorema di Darlington, il quale afferma che:

$$|H(s)|^2 + |\rho(s)|^2 = 1$$

Esprimendo i moduli come prodotti di funzioni per le relative complesse coniugate, si ha che:

$$\frac{f(s)\cdot f(-s)}{g(s)\cdot g(-s)} + \rho(s)\cdot\rho(-s) = 1$$

Quindi, ricordando che $f(s) = f(-s) = 1$:

$$|\rho(s)|^2 = 1 - \frac{1}{1+|h(s)|^2} \longrightarrow |\rho(s)|^2 = \frac{|h(s)|^2}{|g(s)|^2}$$

Considerando esclusivamente le radici negative del denominatore, si possono ricavare le due possibili espressioni di $\rho(s)$ come:

$$\rho(s) = \frac{h(s)}{g(s)}$$

Da qui, finalmente, è possibile ottenere un'espressione di $z(s)$: dal momento che si sta considerando la sintesi di un circuito passa-basso normalizzato, $R_G = 1$; riprendendo la definizione di coefficiente di riflessione, e invertendola, si può ricavare $z(s)$ come:

$$z(s) = \frac{1-\rho(s)}{1+\rho(s)} = \frac{1-\frac{h(s)}{g(s)}}{1+\frac{h(s)}{g(s)}}$$

Finalmente:

$$z(s) = \frac{g(s)-h(s)}{g(s)+h(s)}$$

A questo punto, ci si trova davanti ad una scelta, dal momento che è possibile scegliere una di due possibili espressioni di $h(s)$:

$$h(s) = \pm\varepsilon \left[8s^4 + 8s^2 + 1\right]$$

Si sceglie di utilizzare la versione "negativa", e quindi di realizzare il filtro usando:

$$h(s) = -\varepsilon \left[8s^4 + 8s^2 + 1\right]$$

A questo punto, è possibile, con l'ausilio del calcolatore, elaborare l'espressione di $z(s)$, mediante l'ultima definizione ricavata; come già fatto in precedenza, si riportano solo 5 cifre decimali, continuando a mantenere le restanti nella memoria del calcolatore:

$$z(s) = \frac{2,28362s^4 + s^3 + 2,27152s^2 + 0,75878s + 0,42812}{s^3 + 0,43790s^2 + 0,75876s + 0,14267}$$

In ingresso al circuito elettronico, quindi si "vede" un'impedenza, funzione della variabile di Laplace s, di questo genere. Al fine di sintetizzare il circuito, quindi, si utilizza il metodo delle divisioni successive, con l'ausilio del calcolatore elettronico. Effettuando dunque la divisione tra polinomi, si ottengono, ripetendo iterativamente le operazioni, i seguenti risultati:

1. $z_1(s) = 2,2836166941845s$: si tratta di un'induttanza in serie all'ingresso;
2. $y_2(s) = 1,0113623374604s$: si tratta di una capacità in parallelo a $z_1(s)$;
3. $z_3(s) = 3,03494304453s$: si tratta di un'induttanza in serie al resto del circuito;
4. $y_4(s) = 0,760990860062s + 0,333239313761$: si tratta di una capacità in parallelo ad una conduttanza;

La resistenza di uscita si potrà calcolare come reciproco della conduttanza finale, ottenendo:

$$z_u = \frac{1}{0,333239313761} = 3,00084641489$$

[1]

Quello appena ottenuto è il filtro passa-basso normalizzato in grado di soddisfare le specifiche richieste; è a questo punto necessario effettuare, sui parametri ricavati, le seguenti operazioni:

- Trasformazione passa-basso $\longrightarrow$ passa-alto;
- De-normalizzazione rispetto all'impedenza di ingresso del circuito.

1.1.1 Trasformazione passa-basso $\longrightarrow$ passa-alto

Per "convertire" il progetto attualmente realizzato, ossia un filtro passa-basso, in un filtro passa-alto, è possibile utilizzare semplicemente dei cambi di variabile, studiati in modo da permettere una conversione del tipo di filtro da passa-basso (considerato lo "standard" a partire dal quale si effettuano normalmente progetti di filtri di qualsiasi tipo) a filtri di tipo generico.

Le due trasformazioni effettuate sono sostanzialmente le seguenti:

$$s = \frac{\omega_0}{p}; \Omega = -\frac{\omega_0}{\omega}$$

Dal momento che la funzione di trasferimento del circuito è pari, il "-" non provoca problemi; esso viene comunque inserito per completezza.

[1] Non sono state sinora utilizzate unità di misura, al fine di evidenziare il fatto che si stanno esclusivamente utilizzando grandezze normalizzate.

Al fine di studiare gli effetti della trasformazione di frequenza sulle impedenze di tipo induttivo/capacitivo, si applica la trasformazione sulle definizioni, nel dominio di Laplace, dei due tipi di reattanze.

Per quanto riguarda le capacità, date l'ammettenza $y = sc$ e l'ammettenza trasformata secondo la trasformazione di frequenza da passa-basso a passa alto, $\overline{y}$:

$$y = sc \longrightarrow \overline{y} = \frac{\omega_0}{p} c = \frac{1}{p \cdot \frac{1}{\omega_0 c}}$$

Si può quindi affermare che l'ammettenza capacitiva, in seguito alla trasformazione di frequenza, venga trasformata in un'ammettenza induttiva di valore:

$$l = \frac{1}{\omega_0 c}$$

Per quanto riguarda le induttanza, date l'impedenza $z = sl$ e l'impedenza trasformata secondo la trasformazione di frequenza da passa-basso a passa alto, $\overline{z}$:

$$z = sl \longrightarrow \overline{z} = \frac{\omega_0}{p} l = \frac{1}{p \cdot \frac{1}{\omega_0 l}}$$

Si può quindi affermare che l'ammettenza induttiva, in seguito alla trasformazione di frequenza, venga trasformata in un'ammettenza capacitiva di valore:

$$c = \frac{1}{\omega_0 l}$$

1.1.2 De-normalizzazione rispetto impedenza

Le impedenze normalizzate, finora ricavate, rispettano la seguente regola di normalizzazione: data Z l'impedenza non normalizzata e z l'impedenza normalizzata rispetto all'impedenza di normalizzazione Z_0, la legge di normalizzazione è:

$$z = \frac{Z}{Z_0} \longleftrightarrow Z = z \cdot Z_0$$

Nel circuito sono presenti resistenze, induttanze e capacità; studiando gli elementi de-normalizzati nel dominio di Laplace, si possono trarre le seguenti conclusioni:

- Una resistenza nel dominio di Laplace si trasforma in un'altra resistenza (essendo la trasformata di Laplace un operatore lineare, e la resistenza un coefficiente moltiplicativo rispetto alla corrente al fine di ottenere la tensione; si può dunque dire che, de-normalizzando una resistenza, si ottiene:

$$R = Z_0 \cdot r$$

- Un'induttanza nel dominio di Laplace si trasforma nel seguente modo:

$$L \longrightarrow sL$$

  De-normalizzando l'impedenza $z = s \cdot l$, si ottiene:

$$Z = s \cdot l \cdot Z_0$$

  Il valore equivalente dell'induttanza, anti-trasformando nel dominio del tempo, sarà:

$$L = l \cdot Z_0$$

Ossia, il valore dell'induttanza viene moltiplicato per il valore dell'impedenza di normalizzazione;

- Una capacità nel dominio di Laplace si trasforma nel seguente modo:

$$C \longrightarrow \frac{1}{sC}$$

De-normalizzando l'impedenza $z = \frac{1}{sC}$, si ottiene dunque:

$$Z = \frac{1}{sC} \cdot Z_0$$

Il valore equivalente della capacità, anti-trasformando nel dominio del tempo, sarà:

$$C = \frac{c}{Z_0}$$

Ossia, il valore della capacità viene diviso per il valore dell'impedenza di normalizzazione.

1.2 Calcolo dei parametri del circuito

A partire dalle osservazioni teoriche finora introdotte è possibile calcolare i parametri finali del circuito, semplicemente applicando le seguenti tre regole (differenziando i casi di impedenze resistive, capacitive, induttive), ricavabili combinando le precedenti osservazioni:

- Per quanto riguarda il calcolo delle resistenze, si può ottenere il valore della resistenza R_i come:

$$R_i = r_i \cdot R_0$$

- Per quanto riguarda il calcolo delle induttanze, si può ottenere il valore dell'induttanza L_i, a partire dall'elemento capacitivo c_i del circuito passa-basso normalizzato, come:

$$L_i = \frac{R_0}{2\pi f_0 c_i}$$

- Per quanto riguarda il calcolo della capacità, si può ottenere il valore della capacità C_i, a partire dall'elemento induttivo l_i del circuito passa-basso normalizzato, come:

$$C_i = \frac{1}{2\pi f_0 l_i R_0}$$

A partire dai valori normalizzati precedentemente calcolati, dunque, considerando $f_0 = 35\,\text{kHz}$ e $R_0 = 150\,\Omega$ (seguendo le specifiche), sono stati ottenuti i seguenti valori dei parametri del circuito:

$$R_i = 1 \cdot 150\,\Omega = 150\,\Omega$$

$$C_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 35\,\text{kHz} \cdot 150\,\Omega \cdot 2{,}2836166941845} = 13{,}2750944293\,\text{nF}$$

$$L_2 = \frac{150\,\Omega}{2 \cdot \pi \cdot 35\,\mathrm{kHz} \cdot 1,0113623374604} = 0,67442951748\,\mathrm{mH}$$

$$C_3 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 35\,\mathrm{kHz} \cdot 150\,\Omega \cdot 3,0349430445259} = 9,98873020378\,\mathrm{nF}$$

$$L_4 = \frac{150\,\Omega}{2 \cdot \pi \cdot 35\,\mathrm{kHz} \cdot 0,76099086006243} = 0,896321689324\,\mathrm{mH}$$

$$R_u = 3,00084641489 \cdot 150\,\Omega = 450,126962234\,\Omega$$

1.3 Simulazione del comportamento in frequenza del circuito

Viene a questo punto effettuata una simulazione del circuito sintetizzato mediante i passi precedentemente esplicati, al fine di verificarne l'effettivo comportamento in frequenza, in modo da verificare il fatto che le specifiche siano state regolarmente soddisfatte.

L'analisi del circuito viene effettuata mediante il software PSpice, in modalità "AC Sweep", considerando tre particolari: dapprima si presenterà un'analisi in banda larga, in modo da osservare l'effettivo andamento della funzione di trasferimento del circuito; verranno quindi evidenziati alcuni dettagli, in modo da verificare il comportamento del circuito nei punti "critici", ossia al termine della banda di attenuazione, e all'inizio della banda passante.

La descrizione del circuito e la scelta delle modalità di funzionamento del simulatore viene racchiusa nel seguente script:

```
V_1 1 0 AC 1
R_i 1 2 150
C_1 2 3 13.2750944293n
L_2 0 3 674.42951748u
C_3 3 4 9.98873020378n
L_4 0 4 896.321689324u
R_u 0 4 450.126962234

.AC DEC 101 8k 200k
.probe
.end
```

Una volta caricata la visualizzazione grafica, si visualizza la seguente uscita, mediante il comando "Add Trace":

```
DB((V(4)/V(1))*2*SQRT(150/450.126962234))
```

Il comando in questione permette la visualizzazione del comportamento in frequenza del circuito, considerando come uscita la tensione ai capi di R_u, in decibel, tenendo conto del fattore correttivo da applicare a circuiti di tipo bi-caricato, come quello realizzato; infatti:

$$t(s) \triangleq 2\sqrt{\frac{R_i}{R_u}}\frac{V_4(s)}{V_1(s)}$$

I risultati grafici ottenuti dal procedimento sono allegati con la presente relazione; vengono esposti alcuni risultati significativi:

$$f = 10,000\,\text{kHz} \longrightarrow t(j\omega) = -56,087\,\text{dB}$$

$$f = 35,078\,\text{kHz} \longrightarrow t(j\omega) = -1,2019\,\text{dB}$$

Osservando inoltre che l'andamento è quello previsto per un filtro basato su approssimazione alla Chebyshev, si può dire che il progetto risulti essere completato con successo.

1.3.1 Simulazione del comportamento in frequenza con $Q(j\omega_0) = 60$

Si considera la simulazione del comportamento in frequenza del circuito considerando induttanze non ideali, quantificando il fattore $Q(j\omega)$, per la frequenza di inizio della banda passante, a 60. Dalla teoria, si sa che:

$$Q(j\omega) = \frac{\omega L_s}{R_s}$$

La presenza di un Q è dunque modellizzabile mediante l'introduzione di una resistenza serie, di valore variabile con la frequenza. Per quanto riguarda il circuito attualmente in studio, si può ricavare che:

$$R_s = \frac{\omega L_s}{Q(j\omega)}$$

$$L_2 \longrightarrow R_{s2} = 2,47191328761\Omega$$

$$L_4 \longrightarrow R_{s4} = 3,28519057423\Omega$$

Lo script PSpice utilizzato per la simulazione è quindi il seguente:

```
V_1 1 0 AC 1
R_i 1 2 150
C_1 2 3 13.2750944293n
L_2 0 5 674.42951748u
R_2 5 3 2.47191328706
C_3 5 4 9.98873020378n
L_4 0 6 896.321689324u
R_4 6 4 3.28519057351
R_u 0 4 450.126962234

.AC DEC 101 9k 500k
.probe
.end
```

Considerando induttori non ideali, si nota una variazione della funzione di trasferimento per frequenze minori di quella di taglio. Questo fenomeno è dovuto al fatto che, induttori non ideali sono caratterizzati da una resistenza serie, che per frequenze elevate non viene presa in considerazione a causa del comportamento dellinduttanza che simula un circuito aperto.

1.3.2 Simulazione del comportamento in frequenza con aumento dei componenti del 20% dal valore nominale

Seconda simulazione riguardante i comportamenti "anomali" del circuito coinvolge l'aumento di tutti i parametri reattivi del 20 % rispetto al valore nominale. Viene immediatamente presentato lo script PSpice, contenente i valori originali, moltiplicati per un fattore 1,2 (aggiungendo dunque il 20 % rispetto al valore originale).

```
V_1 1 0 AC 1
R_i 1 2 150
C_1 2 3 15.93011331516n
L_2 0 3 809.315420976u
C_3 3 4 11.986476244536n
L_4 0 4 1.0755860271888m
R_u 0 4 450.126962234

.AC DEC 101 9k 500k
.probe
.end
```

Si nota una traslazione della funzione di trasferimento a frequenza più alte, quindi un aumento della frequenza di taglio.

Capitolo 2

Sintesi del filtro mediante circuito LC passivo monocaricato

Essendo il progetto del tutto analogo a quello precedentemente affrontato, si può anticipare il fatto che una soluzione "esatta" può essere ricavata esclusivamente mediante sintesi manuale, dunque non mediante l'uso di tavole e cataloghi. La sintesi di un filtro monocaricato tuttavia esula dalle competenze attese dal progettista nel presente corso, di conseguenza l'uso del manuale, in una situazione come la presente, è obbligatorio.

Si anticipa un ulteriore fatto: il catalogo, al fine di sintetizzare filtri basati su approssimazioni alla Butterworth o alla Chebyshev (quest'ultimo nella fattispecie è il caso in studio), modifica il circuito filtrante per renderlo "simile" ad un filtro ellittico ("alla Cauer"), dunque l'andamento del filtro sintetizzato non sarà esattamente quello di un filtro Chebyshev, ma comunque abbastanza simile (come si discuterà, confrontando con i risultati precedentemente ottenuti).

Le disquisizioni teoriche affrontate nel precedente capitolo non verranno riprese, dunque si proporranno immediatamente i metodi di progetto utilizzati ed il calcolo dei parametri del filtro.

Scegliendo dal catalogo la sezione "C0450c", riga "T" (riferita alla sintesi mediante polinomio di Chebyshev), si seleziona la seconda colonna, riferita al circuito "A", considerando $r_1 = \infty$, $r_2 = 1$:

Sfruttando il teorema di reciprocità, applicabile su di una rete passiva, si sceglie di introdurre il circuito sui morsetti "a destra", e di prelevare l'uscita "a sinistra", ossia di "girare" il circuito.

L'impedenza di uscita del circuito, in questo modo, è infinita, dunque il circuito è, come le specifiche richiedono, monocaricato; applicando la trasformazione di frequenza, combinata con la de-normalizzazione per l'impedenza Z_0, è possibile ricavare i seguenti valori (utilizzando una teoria del tutto analoga alla precedente):

$$R_i = 1 \cdot 150\,\Omega = 150\,\Omega$$

$$C_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 35\,\text{kHz} \cdot 150\,\Omega \cdot 0,835897} = 36,2667018252\,\text{nF}$$

$$L_2 = \frac{150\,\Omega}{2 \cdot \pi \cdot 35\,\text{kHz} \cdot 1,609548} = 0,423778982206\,\text{mH}$$

$$C_3 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot 35\,\text{kHz} \cdot 150\,\Omega \cdot 0,835897} = 19,5629819756\,\text{nF}$$

$$L_4 = \frac{150\,\Omega}{2 \cdot \pi \cdot 35\,\text{kHz} \cdot 1,614017} = 0,422605594149\,\text{mH}$$

2.1 Simulazione del comportamento in frequenza del circuito

Analogamente a quanto fatto per quanto concerne il primo progetto, viene ora presentata una simulazione PSpice atta a evidenziare i risultati ottenuti in seguito alla fase di progetto.

La descrizione del circuito e la scelta delle modalità di funzionamento del simulatore viene racchiusa nel seguente script:

```
V_1 1 0 DC 0V AC 1
R_i 1 2 150
C_1 2 3 36.2667018252n
L_2 0 3 0.423778982206m
C_3 3 4 19.562981976n
L_4 0 4 0.422605594149m

.AC DEC 101 8k 200k
.probe
.end
```

Una volta caricata la visualizzazione grafica, si visualizza la seguente uscita, mediante il comando "Add Trace":

```
DB(V(4)/V(1))
```

Il comando in questione permette la visualizzazione del comportamento in frequenza del circuito, considerando come uscita la tensione ai capi di R_u, in decibel; in ambito di filtri mono-caricati, non è necessario introdurre correzioni legate al rapporto delle resistenze di ingresso e uscita, quindi l'espressione utilizzata è più semplice della precedente.

I risultati grafici ottenuti dal procedimento sono allegati con la presente relazione; vengono esposti alcuni risultati significativi:

$$f = 10,000\,\text{kHz} \longrightarrow t(j\omega) = -53,457\,\text{dB}$$

$$f = 35,055\,\text{kHz} \longrightarrow t(j\omega) = -1,2251\,\text{dB}$$

Come previsto teoricamente all'inizio della fase di progetto, il circuito non è in grado di soddisfare la condizione di attenuazione minima in banda attenuata; senza ricorrere alla sintesi manuale, tuttavia, questo è il miglior risultato ottenibile.

2.1.1 Simulazione del comportamento in frequenza con $Q(j\omega_0) = 60$

Analogamente a quanto precedentemente fatto, si considera la simulazione del comportamento in frequenza del circuito considerando induttanze non ideali, quantificando il fattore $Q(j\omega)$, per la frequenza di inizio della banda passante, a 60. Il procedimento teorico utilizzato è del tutto analogo a quello precedentemente presentato, dunque si sceglie di presentare immediatamente lo script PSpice utilizzato per la simulazione:

```
V_1 1 0 DC 0V AC 1
R_i 1 2 150
C_1 2 3 36.2667018252n
L_2 0 5 0.423778982206m
R_2 5 3 1.55323109345
C_3 3 4 19.562981976n
L_4 0 6 0.422605594149m
R_4 6 4 1.54893040142

.AC DEC 101 9k 500k
.probe
.end
```

Valutando induttori reali con Q diverso da zero, si ottiene un peggioramento delle caratteristiche del filtro uscendo fuori dalle specifiche di progetto. Alla frequenza di taglio di banda passante si ha un aumento dellattenuazione.

2.1.2 Simulazione del comportamento in frequenza con aumento dei componenti del 20% dal valore nominale

Seconda simulazione riguardante i comportamenti "anomali" del circuito coinvolge l'aumento di tutti i parametri reattivi del 20 % rispetto al valore nominale. Viene immediatamente presentato lo script PSpice, contenente i valori originali, moltiplicati per un fattore 1,2 (aggiungendo dunque il 20 % rispetto al valore originale).

```
V_1 1 0 DC 0V AC 1
R_i 1 2 150
C_1 2 3 43.52004219024n
L_2 0 3 0.5085347786472m
C_3 3 4 23.4755783712n
L_4 0 4 0.5071267129788m

.AC DEC 101 9k 500k
.probe
.end
```

Si modificano i valori dei componenti LC del filtro aumentandoli del 20 %. Si nota una riduzione della banda attenuata, quindi una frequenza di taglio minore rispetto alle specifiche.

Capitolo 3

Sintesi del filtro mediante circuito RC attivo

La terza realizzazione del filtro in questione è effettuata mediante circuiti basati su componenti attivi, nella fattispecie su amplificatori operazionali reazionati mediante reti RC passivi

L'idea alla base del progetto è suddivisa nelle seguenti fasi:

- Caratterizzazione di una singola cella RC attiva biquadratica (ossia in grado di realizzare circuitalmente una funzione di trasferimento di ordine 2), ricavando la funzione di trasferimento;
- Unione di più celle, inserite in cascata tra loro, al fine di ottenere il filtro.

Una cella RC attiva biquadratica, come già accennato, è in grado di realizzare solo un particolare tipo di filtri: quelli di ordine due. Dal momento che le specifiche di progetto richiedono, come calcolato nel primo capitolo, un filtro di ordine quattro, una sola cella non sarà sufficiente. Dal momento che il filtro è di ordine pari, tuttavia, osservazione immediatamente effettuabile è la seguente: è sufficiente un solo tipo di celle, dal momento che un filtro passa-alto di quarto ordine è realizzabile mediante una cascata di due celle di tipo anche uguale, purchè siano entrambe di tipo passa-alto, con parametri ovviamente differenti.

Fattorizzazione della funzione di trasferimento

$$H(s) = \frac{Ks^4}{as^4 + bs^3 + cs^2 + ds + e} = \frac{K_1 s^2}{a_1 s^2 + b_1 s + c_1} \cdot \frac{K_2 s^2}{a_2 s^2 + b_2 s + c_2}$$

La funzione di trasferimento del filtro, $H(s)$, si ricava a partire dalla funzione $H_{LP}(s)$, ossia dalla funzione passa-basso normalizzata precedentemente ricavata, mediante il procedimento di sintesi manuale:

$$H_{LP}(s) = \frac{1}{4,62011s^4 + 4,04631s^3 + 6,39199s^2 + 3,07024s + 1,15478}$$

Sostituendo, mediante il calcolatore, alla variabile s l'espressione:

$$s \longrightarrow \frac{\omega_0}{p}$$

Si ottiene la seguente espressione, presentata in forma approssimata (nonostante sul calcolatore si continuino a mantenere tutte le cifre significative):

$$H(p) = \frac{0,866p^4}{(p^2 + 526,28 \cdot 10^3 p + 186,88 \cdot 10^9) \cdot (p^2 + 58,4 \cdot 10^3 p + 50 \cdot 10^9)}$$

Si propongono ora, scritti con tutte le cifre che il calcolatore propone, i coefficienti della funzione di trasferimento ora proposta:

$$K = 0,86596432336$$

$$a_1 = 1; b_1 = +526,278861631 \cdot 10^3; c_1 = 186,883969746 \cdot 10^9$$

$$a_2 = 1; b_2 = +58,403604481 \cdot 10^3; c_2 = 50,0692931847 \cdot 10^9$$

La fattorizzazione è quindi ultimata: si dispone dei parametri che si intende introdurre in ciascuna cella.

Calcolo della funzione di trasferimento della cella

Mediante l'uso del metodo dei nodi, è stato possibile ricavare l'espressione della funzione di trasferimento della cella proposta per il progetto.

$$\begin{cases} (V_1 - V_i)sC_1 + (V_1 - V_u)G_2 + (V_1 - V_2)sC_3 = 0 \\ (V_2 - V_1)sC_3 + V_2G_4 = 0 \\ (V_3 - V_u)G_6 + V_3G_5 = 0 \end{cases}$$

Si noti che:

$$V_u = (V^+ - V^-) \cdot A$$

$$V_u = (V_2 - V_3) \cdot A = V_2A - V_3A$$

Da qui:

$$V_3 = \frac{V_2A - V_u}{A}$$

Una volta ricavata V_3, si può sostituire nella terza relazione, ricavando:

$$\left(\frac{V_2A - V_u}{A} - V_u\right) G_6 + \frac{V_2A - V_u}{A} G_5 = \left(\frac{V_2A - V_u - V_uA}{A}\right) G_6 + \frac{V_2A - V_u}{A} G_5 = 0 =$$

$$= \frac{V_2AG_6}{A} + \frac{V_2AG_5}{A} - \frac{V_uG_6}{A} - \frac{V_uG_5}{A} = 0$$

Raccogliendo:

$$V_2(G_6 + G_5) = V_u \left(\frac{G_6}{A} + G_6 + \frac{G_5}{A}\right)$$

Quindi:

$$V_2 = \frac{V_u}{G_6 + G_5} \left(\frac{G_6 + AG_6 + G_5}{A}\right)$$

A questo punto è possibile sostituire questa espressione nella seconda equazione:

$$\left[\frac{V_u}{G_6 + G_5} \left(\frac{G_6 + AG_6 + G_5}{A}\right) - V_1\right] sC_3 + \frac{V_u}{G_6 + G_5} \left(\frac{G_6 + AG_6 + G_5}{A}\right) G_4 = 0$$

Si riordina a questo punto l'espressione, ottenendo:

$$\frac{V_u sC_3}{G_6+G_5}\left(\frac{G_6+AG_6+G_5}{A}\right)-V_1 sC_3+\frac{V_u}{G_6+G_5}\left(\frac{G_6+AG_6+G_5}{A}\right)G_4=0$$

Si ricava quindi V_1:

$$V_1=\frac{V_u}{sC_3(G_6+G_5)}\left[sC_3\left(\frac{G_6+AG_6+G_5}{A}\right)+G_4\left(\frac{G_6+AG_6+G_5}{A}\right)\right]$$

Modificando a questo punto la prima equazione, si ottiene:

$$V_1(sC_1+G_2+sC_3)-V_2 sC_3-V_i sC_1-V_u G_2=0$$

Sostituendo l'espressione di V_1 ricavata:

$$\frac{V_u}{sC_3(G_6+G_5)}\left[sC_3\left(\frac{G_6+AG_6+G_5}{A}\right)+G_4\left(\frac{G_6+AG_6+G_5}{A}\right)\right](sC_1+G_2+sC_3)-$$

$$+\frac{V_u}{G_6+G_5}\left(\frac{G_6+AG_6+G_5}{A}\right)sC_3-V_i sC_1-V_u G_2=0$$

Quindi:

$$V_u\left\{\left[\frac{sC_3(G_6+AG_6+G_5)}{sC_3(G_6+G_5)A}+\frac{G_4(G_6+AG_6+G_5}{sC_3(G_6+G_5)A}\right](sC_1+G_2+sC_3)-\frac{G_4(G_6+AG_6+G_5}{(G_6+G_5)A}sC_3-G_2\right\}=V_i sC_1$$

Semplificando:

$$V_u\left\{\left[\frac{G_6+AG_6+G_5}{(G_6+G_5)A}+\frac{G_4(G_6+AG_6+G_5}{sC_3(G_6+G_5)A}\right](sC_1+G_2+sC_3)-\frac{G_4(G_6+AG_6+G_5}{(G_6+G_5)A}sC_3-G_2\right\}=V_i sC_1$$

Si raccoglie quindi il contenuto della parentesi in modo da raggruppare, nel seguente modo:

$$V_u\left\{\frac{\left[sC_3(G_6+AG_6+G_5)+G_4(G_6+AG_6+G_5)\right](sC_1+G_2+sC_3)-...}{A(G_5+G_6)sC_3}\right.$$

$$\left.\frac{...+(G_6+AG_6+G_5)(sC_3)^2-G_2\left[A(G_5+G_6)sC_3\right]}{A(G_5+G_6)sC_3}\right\}=V_i(sC_1)$$

Si può a questo punto scrivere, invertendo l'equazione, la seguente relazione:

$$V_u=\frac{V_i sC_1\left[A(G_5+G_6)sC_3\right]}{\left[sC_3(G_6+AG_6+G_5)+G_4(G_6+AG_6+G_5)\right](sC_1+G_2+sC_3)-(G_6+AG_6+G_5)(sC_3)^2-G_2\left[A(G_5+G_6)sC_3\right]}$$

$$=\frac{V_i sC_1\left[A(G_5+G_6)sC_3\right]}{(s^2C_1C_3)(G_6+AG_6+G_5)+sC_3(G_6+AG_6+G_5)G_2+s^2C_3^2(G_6+AG_6+G_5)+G_4(G_6+AG_6+G_5)sC_1+...}$$

$$\frac{V_i sC_1\left[A(G_5+G_6)sC_3\right]}{...+G_4(G_6+AG_6+G_5)G_2+G_4(G_6+AG_6+G_5)sC_3-(G_6+AG_6+G_5)(sC_3)^2-G_2A(G_5+G_6)sC_3}$$

$$= \frac{V_i s C_1 \left[A(G_5+G_6)sC_3\right]}{(s^2C_1C_3)(G_6+AG_6+G_5)+s\left\{C_3(G_6+AG_6+G_5)G_2+C_1(G_6+AG_6+G_5)G_4+C_3(G_6+AG_6+G_5)G_4-\ldots\right.}$$

$$\frac{V_i s C_1 \left[A(G_5+G_6)sC_3\right]}{\left.\ldots+C_3(G_5+G_6)AG_2\right\}+G_4(G_6+AG_6+G_5)G_2}$$

$$= \frac{V_i s C_1 \left[A(G_5+G_6)sC_3\right]}{(s^2C_1C_3)(G_6+AG_6+G_5)+s\left\{(G_6+AG_6+G_5)(C_3G_2+C_1G_4+C_3G_4)-C_3(G_5+G_6)AG_2\right\}+\ldots}$$

$$\frac{V_i s C_1 \left[A(G_5+G_6)sC_3\right]}{\ldots+G_4(G_6+AG_6+G_5)G_2}$$

$$= \frac{V_i s C_1 \left[A(G_5+G_6)sC_3\right]}{s^2+s\left\{\frac{(G_6+AG_6+G_5)(C_3G_2+C_1G_4+C_3G_4)-C_3(G_5+G_6)AG_2}{C_1C_3(G_6+AG_6+G_5)}\right\}+\frac{G_4(G_6+AG_6+G_5)G_2}{C_1C_3(G_6+AG_6+G_5)}}$$

Quindi:

$$\frac{V_u}{V_i} = \frac{\frac{s^2[A(G_5+G_6)]}{G_6+AG_6+G_5}}{s^2+s\left\{\frac{(G_6+AG_6+G_5)(C_3G_2+C_1G_4+C_3G_4)-C_3(G_5+G_6)AG_2}{C_1C_3(G_6+AG_6+G_5)}\right\}+\frac{G_4(G_6+AG_6+G_5)G_2}{C_1C_3(G_6+AG_6+G_5)}}$$

Giunti a questa espressione, è possibile calcolare i parametri della cella, ossia la pulsazione ω_0 e il fattore di qualità q_p:

$$\omega_0^2 = \frac{G_2G_4}{C_1C_3} \longrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{G_2G_4}{C_1C_3}}$$

Si può dunque ottenere:

$$q_p = \frac{\sqrt{\frac{G_2G_4}{C_1C_3}}}{\frac{(G_6+AG_6+G_5)(C_3G_2+C_1G_4+C_3G_4)-C_3(G_5+G_6)AG_2}{(C_1C_3)(G_6+AG_6+G_5)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{G_2G_4}{C_1C_3}}(C_1C_3)(G_6+AG_6+G_5)}{(G_6+AG_6+G_5)(C_3G_2+C_1G_4+C_3G_4)-C_3(G_5+G_6)AG_2} =$$

$$= \frac{\sqrt{G_2G_4C_1C_3}(G_6+AG_6+G_5)}{(G_6+AG_6+G_5)(C_3G_2+C_1G_4+C_3G_4)-C_3(G_5+G_6)AG_2} =$$

$$= \frac{\sqrt{G_2G_4C_1C_3}(G_6+AG_6+G_5)}{(G_6+AG_6+G_5)\left[(C_3G_2+C_1G_4+C_3G_4)-\frac{C_3(G_5+G_6)AG_2}{G_6+AG_6+G_5}\right]} =$$

$$= \frac{\sqrt{G_2G_4C_1C_3}}{\left[(C_3G_2 + C_1G_4 + C_3G_4) - \frac{C_3(G_5+G_6)AG_2}{G_6+AG_6+G_5}\right]} =$$

$$= \frac{\sqrt{G_2G_4C_1C_3} \cdot \frac{1}{C_3G_4}}{\frac{C_3G_2}{C_3G_4} + \frac{C_1G_4}{C_3G_4} + \frac{C_3G_4}{C_3G_4} - \frac{C_3(G_5+G_6)AG_2}{C_3G_4(G_6+AG_6+G_5)}}$$

Riordinando quest'ultima espressione, è possibile ottenere un'espressione operativa del fattore di qualità q_p:

$$q_p = \frac{\sqrt{\frac{C_1G_2}{C_3G_4}}}{1 + \frac{C_1}{C_3} + \frac{G_2}{G_4}\left[1 - \frac{A(G_5+G_6)}{G_6+AG_6+G_5}\right]}$$

Si decide, al fine di preparare il calcolo del prodotto guadagno-sensibilità, di introdurre una semplificazione dell'espressione di q_p, mediante l'uso della seguente sostituzione:

$$\mu = \frac{A}{1 + \frac{A}{\mu_i}}$$

Dove μ_i è il guadagno della cella:

$$\mu_i = 1 + \frac{R_6}{R_5} = 1 + \frac{G_5}{G_6} = \frac{G_5+G_6}{G_6}$$

Si sostituisce quindi l'espressione di μ_i in μ:

$$\mu = \frac{A}{1 + \frac{A}{\frac{G_5+G_6}{G_6}}} = \frac{A}{1 + \frac{AG_6}{G_5+G_6}} = \frac{A(G_5+G_6)}{G_5+G_6+AG_6}$$

Si noti a questo punto il fatto che è possibile ricondurre questa espressione ad una contenuta in q_p; se infatti si considera - $(\mu - 1)$, si ottiene ciò:

$$-(\mu-1) = -\left(\frac{A(G_5+G_6)}{G_6+AG_6+G_5} - 1\right) = -\frac{A(G_5+G_6) - (G_6+AG_6+G_5)}{G_6+AG_6+G_5} = \frac{-AG_5+G_5+G_6}{G_6+AG_6+G_5}$$

Sostituendo questa espressione in quella di q_p, si ottiene la seguente semplificazione:

$$q_p = \frac{\sqrt{\frac{C_1G_2}{C_3G_4}}}{1 + \frac{C_1}{C_3} - \frac{G_2}{G_4}(\mu-1)}$$

3.0.3 Calcolo del prodotto guadagno-sensibilità

Al fine di ottimizzare il progetto del filtro, è necessario calcolare a questo punto un'espressione operativa del prodotto guadagno-sensibilità, dove la sensibilità è relativa alle variazioni del fattore di qualità q_p al variare di A. Idealizzando l'amplificatore operazionale utilizzato per la realizzazione di ciascuna cella, considerandolo dunque con $A \to \infty$, si intende calcolare:

$$\Gamma_A = \lim_{A \to +\infty} A \cdot \mathrm{S}_A^{q_p}$$

Dunque:

$$\mathrm{S}_A^{q_p} = \mathrm{S}_\mu^{q_p} \cdot \mathrm{S}_A^\mu = \left(\mathrm{S}_\mu^{\frac{\sqrt{\frac{C_1 G_2}{C_3 G_4}}}{1 + \frac{C_1}{C_3} - \frac{G_2}{G_4}(\mu - 1)}} \right) \cdot \left(\mathrm{S}_A^{\frac{A}{1 + \frac{A}{\mu_i}}} \right)$$

$$\mathrm{S}_\mu^{q_p} = \mathrm{S}_\mu^{\sqrt{\frac{C_1 G_2}{C_3 G_4}}} - \mathrm{S}_\mu^{1 + \frac{C_1}{C_3} - \frac{G_2}{G_4}(\mu - 1)} =$$

$$= -\frac{(-\mu)\frac{G_2}{G_4}\mathrm{S}_\mu^{-(\mu-1)\frac{G_2}{G_4}}}{1 + \frac{C_1}{C_3} - (\mu - 1)\frac{G_2}{G_4}} = \frac{\mu \frac{G_2}{G_4}\mathrm{S}_\mu^{-\mu\frac{G_2}{G_4}}}{1 + \frac{C_1}{C_3} - (\mu - 1)\frac{G_2}{G_4}} =$$

$$= \frac{\mu \frac{G_2}{G_4}}{1 + \frac{C_1}{C_3} - (\mu - 1)\frac{G_2}{G_4}}$$

Per quanto riguarda S_A^μ:

$$\mathrm{S}_A^\mu = \mathrm{S}_A^{\frac{A}{1 + \frac{A}{\mu}}} = \mathrm{S}_A^A - \mathrm{S}_A^{1 + \frac{A}{\mu_i}} = 1 - \frac{1 \cdot \mathrm{S}_A^1 + \frac{A}{\mu_i} \cdot \mathrm{S}_A^{\frac{A}{\mu_i}}}{1 + \frac{A}{\mu_i}} =$$

$$= 1 - \frac{\frac{A}{\mu_i}}{1 + \frac{A}{\mu_i}} = 1 - \frac{A}{\mu_i + A} = \frac{\mu_i}{\mu_i + A} = \frac{1}{1 + \frac{A}{\mu_i}}$$

$$\cdot \mathrm{S}_A^{q_p} = \mathrm{S}_\mu^{q_p} \cdot \mathrm{S}_A^\mu = \frac{\mu \frac{G_2}{G_4}}{1 + \frac{C_1}{C_3} - (\mu - 1)\frac{G_2}{G_4}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{A}{\mu_i}}$$

A questo punto è possibile calcolare il prodotto guadagno-sensibilità:

$$\lim_{A \to +\infty} A \cdot \mathrm{S}_A^{q_p}$$

Si noti innanzitutto che, per $A \to +\infty$, $\mu \longrightarrow \mu_i$:

$$\lim_{A \to +\infty} \mu = \frac{A}{1 + \dfrac{A}{\mu_i}} = \mu_i$$

Quindi:

$$\Gamma_A = \lim_{A \to +\infty} A \cdot \mathrm{S}_A^{q_p} = \lim_{A \to +\infty} \frac{\mu_i^2 \dfrac{G_2}{G_4}}{1 + \dfrac{C_1}{C_3} - \mu_i \dfrac{G_2}{G_4} + \dfrac{G_2}{G_4}} = \frac{G_2 \left(1 + \dfrac{G_5}{G_6}\right)^2}{1 + \dfrac{C_1}{C_3} - \left(1 + \dfrac{G_5}{G_6}\right) \dfrac{G_2}{G_4} + \dfrac{G_2}{G_4}} =$$

$$= \frac{G_2 \left(1 + \dfrac{G_5}{G_6}\right)^2}{1 + \dfrac{C_1}{C_3} - \dfrac{G_5}{G_6} \dfrac{G_2}{G_4}}$$

Al fine di minimizzare il prodotto guadagno-sensibilità Γ_A, quindi, è necessario soddisfare la seguente condizione:

$$C_1 \gg C_3$$

3.0.4 Formule di progetto

Al fine di completare il discorso teorico, si propone la dimostrazione delle formule di progetto in seguito utilizzate in combinazione con il software MATLab; le due espressioni fondamentali riguardano il calcolo di due parametri del circuito: R_2 e R_6

Calcolo di R_2

$$R_4 = PR_2; f_p = \frac{1}{2pi\sqrt{C_1 R_2 C_3 R_4}}$$

Sostituendo la prima nella seconda, si ottiene:

$$R_2 = \frac{1}{2\pi f_p \sqrt{C_1 C_3 P R_4}}$$

Calcolo di R_6

Partendo dall'espressione operativa di q_p:

$$q_p = \frac{\sqrt{\dfrac{R_4 C_1}{R_2 C_3}}}{1 + \dfrac{C_1}{C_3} - \dfrac{R_4 R_6}{R_2 R_5}} = \frac{\sqrt{\dfrac{R_4 C_1}{R_2 C_3}}}{\dfrac{R_2 R_5 C_3 + C_1 R_2 R_5 - C_3 R_4 R_6}{C_3 R_2 R_5}}$$

L'espressione si può invertire nel seguente modo:

$$R_2R_5C_3 + C_1R_2R_5 - C_3R_4R_6 = \frac{\sqrt{\frac{R_4C_1}{R_2C_3}}C_3R_2R_5}{q_p}$$

Da qui, si può ricavare R_6 come:

$$R_6 = \frac{R_2R_5C_3}{R_4C_3} + \frac{C_1R_2R_5}{R_4C_3} - \frac{\sqrt{\frac{R_4C_1}{R_2C_3}}C_3R_2R_5}{q_pR_4C_3} =$$

$$= R_5\left[\frac{R_2}{R_4} + \frac{C_1R_2}{R_4C_3} - \frac{\sqrt{\frac{R_4C_1}{R_2C_3}}R_2R_5}{q_pR_4}\right] =$$

$$= R_5\left[\frac{1}{P}\left(1 + \frac{C_1}{C_3}\right) - \frac{1}{Pq_p}\sqrt{\frac{R_4C_1}{R_2C_3}}\right]$$

Ordinando, si può ricavare la seguente espressione:

$$R_6 = R_5\left[\frac{1}{P}\left(1 + \frac{C_1}{C_3}\right) - \frac{1}{q_p}\sqrt{\frac{C_1}{PC_3}}\right]$$

3.1 Calcolo dei parametri delle celle

Il filtro RC, come già accennato, viene sintetizzato mediante l'uso di due celle RC biquadratiche basate sull'uso di un amplificatore operazionale; al fine di riprodurre, mediante le suddette celle, la funzione di trasferimento precedentemente sintetizzata, è stato necessario percorrere un certo numero di passi, che ora verranno descritti:

- A partire dalla funzione di trasferimento fattorizzata in termini con denominatore polinomiale di secondo grado, e numeratore di secondo grado monomiale (precedentemente proposta), si seleziona l'ordine delle celle da inserire in cascata, in modo da avere celle in cascata con q_p crescente.
- Calcolo dei guadagni K_i per ciascuna i-esima cella, secondo i seguenti criteri:
  - Il massimo della prima cella, $T_{1,max}$, moltiplicato per il K_1, della prima cella, deve essere pari al massimo della funzione di trasferimento finale (sintetizzata precedentemente);
  - Per la i-esima cella, il prodotto $T_{i,max} \cdot K_i$, moltiplicato per tutti i $T_{j,max} \cdot K_j$ delle celle per $j \in [1; i-1]$, deve essere pari al massimo della funzione di trasferimento finale.

  Avendo nel progetto solo due celle, e guadagno massimo in banda passante pari a 1 (0 dB) il criterio per il calcolo dei K_i si riduce a:

  $$T_{1,max} \cdot K_1 = 1$$

  Poichè $T_{1,max} \simeq q_{p,1}$, si può dire che:

  $$q_{p,1} \cdot K_1 = 1 \longrightarrow K_1 = \frac{1}{q_{p,1}}$$

Per quanto riguarda il calcolo di K_2, si parte dalla seguente relazione:

$$K_1 T_{1,max} \cdot K_2 T_{2,max} = 1$$

Il calcolo di $T_{2,max}$ è stato effettuato mediante il seguente script MATLab:

```
% Progetto di un filtro RC attivo con celle in cascata
% Calcolo del massimo di |T2|
% Prima cella
wr1 = sqrt(186.883969746*10^9);
qr1 = wr1/(526.278861631*10^3);
T1_Max = qr1
% Seconda cella
wp2 = sqrt(50.0692931847*10^9);
qp2 = wp2/(58.403604481*10^3);
%
%
f = linspace(2000, 50000, 14010);
w = 2*pi * f;
p = 0 + w*j;
%
% Evaluate partial transfer function T2 on the j-omega axis:
nT2a = p.^2;
nT2=nT2a.*(p.^2);
dT2a = (p.^2 + p.*(wr1./qr1) + (wr1).*(wr1));
dT2 = dT2a.*(p.^2 + p.*(wp2./qp2) + (wp2).*(wp2));
T2 = nT2./dT2;
%
% Evaluate amplification:
ampl = abs(T2);
T2_Max=abs(max(T2))

%
% Plot attenuation:
plot(f, ampl);
grid;
K_tot=0.86596432336;
K_2=T1_Max/T2_Max
K_1=K_tot/K_2
```

In realtà, per semplicità, il calcolo dei K_i è incluso nello script; quella appena proposta è il procedimento teorico seguito.

In seguito ai calcoli, effettuati dallo script, sono stati ricavati i seguenti valori:

$$K_1 = 1,21739047475583$$

$$K_2 = 0,71132832178081$$

Una volta calcolati questi parametri "globali", si lavora sulle singole celle, in modo da riprodurre la funzione di trasferimento finale.

3.1.1 Cella 1

La prima cella del filtro, secondo il criterio dei q_p crescenti, realizza la seguente funzione di trasferimento (dato q_p calcolato a priori):

$$H(p) = \frac{1,21739047475583p^2}{p^2 + 58,4 \cdot 10^3 p + 50 \cdot 10^9}$$

Si possono semplicemente calcolare, a partire da questa funzione di trasferimento, i seguenti parametri:

$$\omega_{p,1} = 4,32300786196370432 \cdot 10^5 \,\mathrm{rad/s}$$

$$q_{p,1} = 0,82142912762375$$

A questo punto è necessario dimensionare i parametri della cella, in modo da ottenere i suddetti valori; al fine di minimizzare il prodotto guadagno-sensibilità Γ_A, è stato scelto $C_1 \gg C_3$; a partire dalle formule di progetto precedentemente ricavate, è stato utilizzato il seguente procedimento:

- Sono stati scelti i valori delle capacità, in modo da minimizzare Γ_A;
- Seguendo lo schema a blocchi allegato con le specifiche, le cui formule sono state precedentemente ricavate, sono stati ricavati i restanti parametri del circuito;

Mediante uno script MATLab, sono stati dunque ricavati i seguenti valori:

$$C_{1,1} = 100\,\mathrm{nF}$$
$$C_{1,2} = 0\,\mathrm{nF}$$
$$C_3 = 1\,\mathrm{nF}$$
$$R_2 = 31,47872218445133\,\Omega$$
$$R_4 = 1,699850997960372\,\mathrm{k}\Omega$$
$$R_6 = 2,137117626872152\,\mathrm{k}\Omega$$
$$R_5 = 10\,\mathrm{k}\Omega$$

Utilizzando questi valori, il K effettivo della cella risulta essere il seguente:

$$K = 1,21371176268722$$

Con un prodotto guadagno-sensibilità pari a:

$$\Gamma_A = 0,889$$

Lo script MATLab utilizzato è il seguente:

```
%%%CELLA 1%%%

wp1 = sqrt(186.883969746*10^9)
qp1 = wp1/(526.278861631*10^3)
fp1=wp1/(2*pi)
C11=100e-9
C12=22e-9
C3=0.1e-9
C1=C11+C12;

P=((C1/C3)/(4*(qp1^2)))*(sqrt(1+12*qp1^2*(1+(C3/C1)))-1)^2

R2=1/(2*pi*fp1*sqrt(P*C1*C3))
R4=P*R2
R5=10000
R6=R5*((1/P)*(1+(C1/C3))-(sqrt(C1/(P*C3))*(1/qp1)))
K=(C11/C1)*(1+(R6/R5))
GSP=qp1*(1+R6/R5)^2*sqrt((P*C3)/C1)

%%%CELLA 2%%%
wp2 = sqrt(50.0692931847*10^9)
qp2 = wp2/(58.403604481*10^3)
fp2=wp2/(2*pi)
C11=100e-9
C12=22e-9
C3=0.1e-9
C1=C11+C12;

P=((C1/C3)/(4*(qp2^2)))*(sqrt(1+12*qp2^2*(1+(C3/C1)))-1)^2

R2=1/(2*pi*fp2*sqrt(P*C1*C3))
R4=P*R2
R5=10000
R6=R5*((1/P)*(1+(C1/C3))-(sqrt(C1/(P*C3))*(1/qp2)))
K=(C11/C1)*(1+(R6/R5))
GSP=qp2*(1+R6/R5)^2*sqrt((P*C3)/C1)


p=0+j*w;
T1=((p.*p))/(((p.*p)-((567.67*10^3)*p)+(186.88*10^9)))
x=max(T1)
```

Seguendo il flow-chart allegato, è stato calcolato un primo valore di P, definito come:

$$P = \frac{R_4}{R_2}$$

La prima iterazione ha portato a una R_6 negativa; come si può osservare dall'espressione operativa di R_6:

$$R_6 = R_5 \left[\frac{1}{P} \left(1 + \frac{C_1}{C_3} \right) - \sqrt{\frac{C_1}{PC_3}} \frac{1}{q_p} \right]$$

Al fine di rendere positiva R_6, è necessario ridurre P, in modo da rendere prevalente il termine positivo della somma.

Dopo varie iterazioni, si imposta $P = 54$, quindi si ricavano i valori precedentemente esposti.

3.1.2 Cella 2

La seconda cella del filtro, secondo il criterio dei q_p crescenti, realizza la seguente funzione di trasferimento (dato q_p calcolato a priori):

$$H(p) = \frac{0,71132832178081p^2}{p^2 + 526,28 \cdot 10^3 p + 186,88 \cdot 10^9}$$

Si possono semplicemente calcolare, a partire da questa funzione di trasferimento, i seguenti parametri:

$$\omega_{p,2} = 2,23761688375602 \cdot 10^5 \,\mathrm{rad/s}$$

$$q_{p,2} = 3,83129928989908$$

Seguendo lo stesso procedimento precedentemente esposto, sono stati ricavati i seguenti valori:

$$C_{1,1} = 68 \,\mathrm{nF}$$
$$C_{1,2} = 47 \,\mathrm{nF}$$
$$C_3 = 1 \,\mathrm{nF}$$
$$R_2 = 24,17934796217750 \,\Omega$$
$$R_4 = 71,82673310105153 \,\mathrm{k\Omega}$$
$$R_6 = 2,250676509173192 \,\mathrm{k\Omega}$$
$$R_5 = 10 \,\mathrm{k\Omega}$$

Utilizzando questi valori, il K effettivo della cella risulta essere il seguente:

$$K = 0,7243878283685$$

Con un prodotto guadagno-sensibilità pari a:

$$\Gamma_A = 9,241$$

In questo caso, è stato sufficiente utilizzare il P legato alla formula presente sul flow-chart; dai calcoli è stato possibile ricavare:

$$P = 2,97 \cdot 10^3$$

3.2 Simulazione del comportamento in frequenza del circuito

Al fine di effettuare un'analisi in frequenza del comportamento del circuito, viene introdotto un modello ideale di amplificatore operazionale, mediante l'opzione SUBCKT di PSpice; si è scelto di realizzare un amplificatore modellizzato sostanzialmente con un generatore di tensione pilotato in tensione, con un guadagno pari a 10^8; lo script PSpice utilizzato per la simulazione è il seguente:

```
* Definizione amplificatore operazionale *

.SUBCKT OA 1 2 3
*          | | |
*          | | | output
*          | inverting input
*          non inverting input
E1 3 0 1 2 1E8
.ENDS OA

* Cella 1 (CA) *

.SUBCKT CA 1 5
C_11 2 1 100n
C_3 3 2 1n
R_2 2 5 31.47872218445133
R_4 0 3 1.699850997960372k
R_5 0 4 10k
R_6 4 5 2.137117626872152k
XOA 3 4 5 OA
.ENDS CA

* Cella 2 (CB) *

.SUBCKT CB 1 5
C_11 2 1 68n
C_12 2 0 47n
C_3 3 2 0.1n
R_2 2 5 24.1793479621775
R_4 0 3 71.82673310105153k
R_5 0 4 10k
R_6 4 5 2.250676509173192k
XOA 3 4 5 OA
.ENDS CB

* Definizione circuito *

V1 1 0 AC 1
XCA 1 2 CA
XCB 2 3 CB

* Opzioni di analisi *
```

```
.AC DEC 101 9k 500k
.probe
.end
```

Dalle simulazioni effettuate, si può osservare il fatto che il progetto del filtro sia andato a buon fine: le specifiche, sia per quanto riguarda la banda attenuata sia per quanto riguarda le attenuazioni minima e massima in banda passante si possono dire rispettate.

3.2.1 Simulazione del comportamento in frequenza con $f_t = 1,5\,\mathrm{MHz}$

Al fine di introdurre un modello di amplificatore operazionale con una frequenza di taglio f_t non infinita, si realizza la seguente idea: utilizzando un generatore di corrente pilotato in tensione, con transconduttanza g_m, si alimentano una resistenza R e una capacità C ideali; al variare della frequenza, varierà la resistenza equivalente della capacità, dunque la tensione che cadrà su di essa; prelevando questa tensione con un generatore di tensione pilotato in tensione con guadagno unitario, infine, si disaccoppia l'impedenza di uscita del modello con eventuali carichi.

Il calcolo della pulsazione di taglio ω_t si basa sul seguente fatto:

$$\omega_t \simeq A_0 \cdot \omega_r$$

Dove:

$$A_0 = g_m \cdot R; \omega_r = \frac{1}{RC}$$

Si può dunque scrivere che:

$$2\pi f_t \simeq g_m \cdot R \frac{1}{RC} \longrightarrow C = \frac{g_m}{2\pi f_t}$$

Si è dimensionato un $A_0 = 10^7$, con $g_m = 1 \cdot 10^3$, $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$; in tali condizioni, $C = 106,103295395\,\mu\mathrm{F}$.

La simulazione del comportamento in frequenza del circuito è stata dunque realizzata con il seguente script PSpice:

```
* Definizione amplificatore operazionale *

.SUBCKT OAI 1 2 3
*           | | |
*           | | | output
*           | inverting input
*           non inverting input
E1 3 0 1 2 1E8
.ENDS OAI


.SUBCKT OA 1 2 3
*          | | |
*          | | | output
*          | inverting input
```

```
*          non inverting input
G_1 0 4 1 2 1000
R_2 4 0 10k
C_3 4 0 106.103295395u
E_1 3 0 4 0 1
.ENDS OA

* Cella 1 (CA) *

.SUBCKT CA 1 5
C_11 2 1 100n
C_3 3 2 1n
R_2 2 5 31.47872218445133
R_4 0 3 1.699850997960372k
R_5 0 4 10k
R_6 4 5 2.137117626872152k
XOA 3 4 5 OAI
.ENDS CA

* Cella 2 (CB) *

.SUBCKT CB 1 5
C_11 2 1 68n
C_12 2 0 47n
C_3 3 2 0.1n
R_2 2 5 24.1793479621775
R_4 0 3 71.82673310105153k
R_5 0 4 10k
R_6 4 5 2.250676509173192k
XOA 3 4 5 OA
.ENDS CB

* Definizione circuito *

V1 1 0 AC 1
XCA 1 2 CA
XCB 2 3 CB

* Opzioni di analisi *

.AC DEC 101 9k 1.25MEG
.probe
.end
```

Dai risultati della simulazione, allegata con la presente relazione, si può osservare un comportamento anomalo in banda passante: il fatto di aver introdotto una frequenza di taglio troppo bassa, ha accentuato il ripple in banda passante.

Da un'analisi effettuata (i cui risultati verranno allegati alla relazione), si nota il fatto che, introducendo una non idealità nella sola prima cella, provoca variazioni della funzione di trasferimento solo per frequenze elevate, oltre a circa 50 kHz, mentre, in un intorno di 35 kHz, non si riscontrano sostanziali variazioni. Questo comportamento è prevedibile, dal momento che la prima cella inizi ad attenuare solo da 68 kHz in poi, dunque non possa influenzare in modo sensibile le frequenze più basse; idealizzando la sola prima cella, invece, si ha un peggioramento del comportamento sia per quanto concerne l'inizio della banda passante, che le frequenze più elevate; ciò è imputabile al fatto che la frequenza di taglio della seconda cella sia circa pari a 35 kHz. La forma d'onda finale è una combinazione delle due, come osservato: in un intorno di 35 kHz sostanzialmente si ha il solo contributo della prima cella, per frequenze più elevate entrambi i contributi.

3.2.2 Simulazione del comportamento in frequenza con $f_t = 300\,\mathrm{kHz}$ e aumento dei componenti

Si ripete il discorso precedente, introducendo una frequenza di taglio dell'amplificatore operazionale pari a 300 kHz (un quinto della precedente), e aumentando i valori dei componenti della cella del 20 %. La simulazione del comportamento in frequenza del circuito è stata dunque realizzata con il seguente script PSpice (contenente i valori calcolati):

```
* Definizione amplificatore operazionale *

.SUBCKT OA 1 2 3
*          | | |
*          | | | output
*          | inverting input
*          non inverting input
G_1 0 4 1 2 1000
R_2 4 0 10k
C_3 4 0 530.516476973u
E_1 3 0 4 0 1
.ENDS OA

* Cella 1 (CA) *

.SUBCKT CA 1 5
C_11 2 1 120n
C_3 3 2 1.2n
R_2 2 5 37.77446662134159
R_4 0 3 2.039821197552446k
R_5 0 4 12k
R_6 4 5 2.564541152246582k
XOA 3 4 5 OA
.ENDS CA

* Cella 2 (CB) *

.SUBCKT CB 1 5
C_11 2 1 81.5999999999999n
C_12 2 0 56.4n
C_3 3 2 0.12n
R_2 2 5 29.0152175546130
```

```
R_4 0 3 86.192079721261836k
R_5 0 4 12k
R_6 4 5 2.7008118110078304k
XOA 3 4 5 OA
.ENDS CB

* Definizione circuito *

V1 1 0 AC 1
XCA 1 2 CA
XCB 2 3 CB

* Opzioni di analisi *

.AC DEC 101 9k 500k
.probe
.end
```

Si può osservare, come prevedibile, un ulteriore peggioramento rispetto al circuito di partenza: aumentando i componenti del 20 % si esce violentemente dalle specifiche. Il fatto di ridurre ulteriormente la frequenza di taglio degli amplificatori, inoltre, riduce a tal punto la banda passante del circuito, da non permettere neanche ai ripple previsti dalla funzione di trasferimento originale di terminare.