

Calcolo Differenziale ed Integrale in più variabili

Alberto Tibaldi

6 settembre 2007

Capitolo 1

Introduzione

Mi aspetto, da chi legge questo testo, che abbia una conoscenza dell'Analisi Matematica a livello di saper studiare funzioni, funzioni definite in \mathbb{R} con immagine in \mathbb{R} ossia di saper trattare con una certa sicurezza funzioni che abbiano sia come dominio che come immagine l'insieme dei numeri reali, \mathbb{R} . Per vedere le cose in modo più geometrico, partendo da punti appartenente ad una retta, i cui punti rappresentano tutti i numeri reali, una funzione come quella sopra descritta trasforma ogni punto della retta appartenente al dominio della funzione in punti appartenenti sempre alla retta reale. Ciò è visibilissimo ad esempio con la rappresentazione cartesiana di un punto: un punto sull'asse delle x , può avere un punto associato sull'asse delle y , così si può identificare la funzione come un insieme di punti su di un piano. Un'altra visione interessante è quella che si basa sul concetto di spazio vettoriale: dato lo spazio vettoriale dei numeri reali, \mathbb{R} , la funzione trasforma i propri elementi in elementi appartenenti sempre allo stesso spazio, e quindi di nuovo in \mathbb{R} . Per affrontare tuttavia molti tipi di studi in matematica, fisica, o ingegneria, le nozioni finora apprese sono insufficienti. Per questo, intendiamo approfondirle, studiando funzioni trasformanti elementi da spazi vettoriali di una certa dimensione, ad altri spazi di altre dimensioni; il caso più generale studiabile in fatto di spazi vettoriali, è in effetti il seguente:

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m, n \neq m$$

Si sceglie di affrontare questo tipo di introduzione allo studio di funzioni in più variabili, affrontando due fondamentali tipi di problemi:

- Funzioni da $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$;
- Funzioni da $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Unendo questi due step, vedremo che sarà possibile studiare il caso più generale, appena citato.

Capitolo 2

Funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R}^n

Il primo problema che si sceglie di affrontare, è il passaggio da un dominio di tipo scalare, ossia da uno spazio vettoriale di dimensione 1, ad un'immagine di tipo vettoriale, ossia, all'averne un'immagine appartenente ad uno spazio vettoriale, di dimensione n . Come già esposto, finora sia il dominio che l'immagine erano rappresentabili mediante una retta, ossia l'asse reale. In questo capitolo parleremo di come, partendo da un dominio unidimensionale come quelli finora trattati, si possano avere immagini di più dimensioni: al variare quindi di uno scalare, si potranno avere superfici, volumi, o strutture di tipo più complesso. Incominciamo, dunque, con l'introdurre, a più variabili, i nostri primi concetti.

2.1 Concetto di curva

Vogliamo introdurre il concetto di curva nello spazio: intuitivamente, possiamo affermare che la curva sia un vettore che si muove nello spazio, al variare di un parametro, che chiameremo t . Sempre intuitivamente, possiamo immaginare dunque che, date n funzioni, in funzione del parametro t , esse rappresentino un vettore nello spazio, ossia un punto. Al variare del parametro, le funzioni varieranno, e così i vettori indicheranno punti diversi. t è un parametro scalare, ossia una coordinata posta su di un dominio rettilineo: dal momento che t appartiene di fatto ad una retta, la sua posizione sarà semplicemente individuata dal suo valore, e dal suo segno (rappresentante il verso). Ovviamente, dato uno spazio vettoriale di dimensione 2, un punto sarà univocamente individuato da 2 valori, di dimensione 3 da 3, di dimensione n da n valori. Nelle nostre considerazioni e nei nostri esempi, scegliamo di lavorare con uno spazio di dimensione 3, a meno che non si specifichi diversamente: le nozioni sono immediatamente riconducibili ad

uno spazio di dimensione qualunque, purchè finita (come quella degli spazi vettoriali). Lavorare in uno spazio vettoriale di dimensione 3 ci permette inoltre di osservare molto facilmente riscontri con la realtà: quello in cui noi viviamo, a meno di effetti relativistici, è infatti uno spazio vettoriale! Si cercherà dunque spesso di ricondurre gli esempi qui esposti alla realtà, per facilitare il lettore.

Tengo ad esempio a far notare una notevole analogia tra ci che ho finora introdotto, e la cinematica di un punto nello spazio: data una legge oraria di un moto, ossia un insieme di funzioni che, al variare del tempo, fanno variare la posizione nello spazio di un punto, considerando come funzioni, ad esempio, le proiezioni sui tre assi cartesiani delle componenti ad esse paralleli delle velocità variabili con un certo parametro, che si identifica perfettamente con il nostro t (infatti, t può benissimo essere interpretato come un certo tempo in cui ci si trova, e l'asse reale dunque un asse di tempi), la curva rappresenterebbe quella che noi comunemente chiamiamo la traiettoria del moto:

$$t \longrightarrow \gamma(t) \longrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_x(t) \\ \gamma_y(t) \\ \gamma_z(t) \end{pmatrix}$$

Come già intuito, t è il tempo che scorre, le tre funzioni sono le proiezioni sui tre assi cartesiani del punto, e quindi la posizione di questo ad un certo tempo, nello spazio cartesiano tridimensionale $(x; y; z)$. Individuiamo sull'asse reale, a cui appartiene t , un certo intervallo I , ossia un insieme di punti adiacenti compresi tra il minimo dei maggioranti (estremo superiore), e il massimo dei minoranti (estremo inferiore) dell'intervallo I . Consideriamo tale intervallo continuo, ossia senza buchi. Possiamo ora definire la nostra $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la funzione γ nella variabile t nel seguente modo:

$$t \longrightarrow \gamma(t) \longrightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \end{pmatrix}, t \in I$$

Introduciamo ora, finalmente, una definizione di curva:

Definizione 1 dato intervallo $I \in \mathbb{R}$, si dice curva parametrica in \mathbb{R}^n una n -pla (ossia un vettore di n elementi) del tipo $\begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \dots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}$, di funzioni continue in I

Consideriamo ora alcune definizioni e nomenclature:

- Dato un intervallo chiuso e limitato, del tipo $I = [a; b]$, la parte di curva racchiusa in I è detta arco di curva; $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ sono detti - estremi dell'arco; se infine $\gamma(a) = \gamma(b)$, l'arco in questione è detto arco chiuso;
- Si definisce con il simbolo $\overset{\circ}{I}$ l' interno di I , ossia l'intervallo I senza considerare gli estremi.
- Una funzione si definisce semplice se $\forall t_1, t_2 \in \overset{\circ}{I}, t_1 \neq t_2 \longrightarrow \gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ (si noti che questa condizione ricorda molto l'iniettività di una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
- $\gamma(I)$ è detto sostegno della curva: riprendendo la nostra interpretazione fisica, esso sarebbe la traiettoria del vettore, ossia l'insieme di tutti i punti in cui si andrà a trovare, con lo scorrere del tempo. Si tratta, dunque, di una sorta di disegno del percorso.

2.2 Velocità - Vettore Tangente (di una curva)

Consideriamo l'equazione di una curva (quindi le n funzioni del vettore che si considera, in funzione del nostro parametro temporale t . Il nostro t è un parametro temporale; ciò ci fa pensare che la nostra funzione abbia una certa velocità: vi sia dunque una certa rapidità con cui, al variare del parametro temporale, si vada da una posizione ad un'altra: in parole povere, una certa quantità di tempo che si usa per raggiungere, data una posizione temporale a ed una posizione b , partendo dalla posizione $\gamma(a)$, la posizione $\gamma(b)$.

Possiamo pensare che questa velocità della funzione, ossia la rapidità con la quale si percorre il sostegno della curva, sia di fatto rappresentata, in ogni suo punto, dal vettore tangente alla curva. Si verifica infatti che la velocità istantanea nel punto t_1 sia proprio il suo vettore tangente:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\gamma(t_2) - \gamma(t_1)}{t_2 - t_1} = \gamma'(t_1)$$

2.3 Curve Regolari

Finora, l'unica imposizione che abbiamo fatto parlando della curva parametrizzata in n -ple, la continuità di ogni singola funzione appartenente al vettore

di funzioni nel parametro tempo. Vogliamo ora introdurre un nuovo concetto, o meglio un nuovo tipo di curva, restringendo l'insieme delle funzioni da continue a regolari. Una funzione si dice regolare se rispetta le seguenti condizioni:

- $\gamma(t) \in C^{(1)}(I)$ (La derivata di ordine 1 della funzione γ valutata nell'intervallo temporale I è continua);
- $\gamma'(t) \neq \vec{0} \forall t \in I$ (Il vettore tangente alla curva non è mai uguale al vettore $\vec{0}$, ossia al vettore nullo).

Se infatti la derivata prima non fosse continua, si avrebbe una funzione in qualche modo squadrata, quindi non da considerarsi regolare. Ha inoltre poco senso considerare curve con vettore tangente nullo: il vettore tangente ad una curva infatti le assegna un verso di percorrenza, una direzione di percorrenza, ed una velocità; se il vettore risultasse essere nullo, ci sarebbero dunque punti in cui la funzione non avanza, cosa non molto sensata.

Esempio Pratico 1 Data curva f tale per cui: $t \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, t \in [0; 2\pi]$, trovarne il sostegno, e studiarne la regolarità. *Soluzione: il vettore che ci è stato fornito contiene informazioni sulla variazione, parametrica, di x e y in funzione del parametro t .*

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

A questo punto, per trovare il sostegno della curva, non dobbiamo far altro che trasformare le funzioni, mediante artifici di vario tipo, in forma cartesiana, ossia eliminare la dipendenza dal parametro t , per ottenere semplicemente una funzione in x e y . In questo frangente, un interessante artificio è quello di sfruttare la prima formula fondamentale della goniometria:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \implies \begin{cases} x^2 = (\cos t)^2 \\ y^2 = (\sin t)^2 \end{cases} \implies x^2 + y^2 = 1$$

Il sostegno della curva, dunque, è semplicemente una circonferenza.

Studiamo ora la regolarità della funzione. Ricordo che una funzione, per essere regolare, deve disporre di due condizioni:

- $\gamma(t) \in C^{(1)}(I)$
- $\gamma'(t) \neq \vec{0} \forall t \in I$

Deriviamo dunque il vettore della funzione in forma parametrica:

$$t \xrightarrow{f'} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t \in [0; 2\pi]$$

Questa funzione ha derivata continua per ogni punto dell'intervallo, in quanto non presenta punti di discontinuità. Inoltre, se provassimo a risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{cases} -\sin t = 0 \\ \cos t = 0 \end{cases}$$

vedremmo che non ha soluzioni, dunque la curva risulta essere effettivamente regolare. Altro trucco per verificare la regolarità, è studiare il modulo (o norma euclidea) del vettore di equazioni parametriche. Se infatti il modulo fosse diverso da 0, avremmo la garanzia che la curva non possa essere non-regolare: perchè una curva sia regolare, tutti gli elementi del vettore devono contemporaneamente andare a 0; se il modulo è diverso da 0, almeno un valore dovrà per forza essere non nullo. Chiamando \vec{v} il nostro vettore di equazioni parametriche, la norma euclidea $|\vec{v}|$ sarà:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1 \neq 0$$

Oltretutto, ultima osservazione interessante, la componente orizzontale x del vettore velocità è negativa ($x = -\sin x$, dunque punta verso sinistra), la componente verticale y del vettore velocità è positiva ($y = +\cos x$, dunque punta verso l'alto), dunque possiamo determinare, in questo modo, la direzione della velocità, come alto-sinistra.

2.4 Lunghezza di un arco di curva

Volendo determinare, dato un arco di curva, la sua lunghezza $l_{\gamma(I)}$, partiamo da una considerazione: non è assolutamente possibile determinare in modo istantaneo la sua lunghezza, mediante una differenza di posizioni. Facendo una prima approssimazione, provando a determinare la distanza tra i due estremi a e b , $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, troveremmo semplicemente il segmento che li congiunge, ottenendo una pessima approssimazione.

Quale idea possiamo sfruttare? Vediamo che un intervallo temporale si pu spezzettare in numerosi sottointervalli di lunghezza arbitraria, purchè inferiore alla lunghezza dell'arco di curva (che tuttavia non conosciamo); per fare ciò, possiamo ragionare in modo dicotomico: ogni intervallo, dividerlo in due sottointervalli prendendo il punto centrale nell'asse dei tempi tra i

due. Iterando questo processo, si riesce a ricondursi al concetto di limite già illustrato in Analisi Matematica I, poichè:

$$l_{\gamma(I)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \sum_{i=0}^n |\gamma(m_{i+1}) - \gamma(m_i)|$$

Si dimostra dunque che questo

$$l_{\gamma(I)}$$

si può ricondurre semplicemente con il calcolo di un integrale:

$$l_{\gamma(I)} = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

La lunghezza dell'arco compreso tra a e b è data quindi dall'integrale del modulo di $\gamma'(t)$ rispetto alla variabile temporale t . Il modulo, come già fatto per quanto riguarda l'esempio per chiarificare lo studio della regolarità di una funzione, si può intendere come norma euclidea del vettore delle funzioni parametriche. Chiarifichiamo un po' meglio come procedere per determinare la lunghezza di un arco di curva, chiarendo poi con un breve esempio pratico.

Studiamo una particolare famiglia di curve, dette curve grafico: data $f \in C^{(1)}(I)$, tale per cui:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}$$

Derivando quest'espressione, otteniamo:

$$t \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} \implies t \xrightarrow{f'} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$$

La lunghezza del nostro arco di curva, tornando al teorema precedentemente introdotto, sarebbe pari a:

$$l_{\gamma(I)} = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

Vorrei far notare che questo procedimento, apparentemente banale, nasconde calcoli molto difficili da svolgere. Desidero mostrare, con una funzione banale, che tipo di calcoli è necessario effettuare:

Esempio Pratico 2 Data funzione $y = x^3, I = [0; 1], t \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$

$$l_{\gamma(I)} = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x^2} dt$$

Integrale risolubile, ma decisamente complicato da calcolare, in senso indefinito.

2.5 Cambio della descrizione dei tempi

Data una curva del tipo $t \longrightarrow \gamma(t), t \in I = [a; b]$, è possibile rappresentare la stessa curva mediante un altro parametro temporale, ossia, cambiare la descrizione dei tempi. Al posto di far variare t in $I_1 = [a; b]$, potremmo far variare τ in $I_2 = [\alpha; \beta]$. Quello che intendiamo dunque fare, è trovare una certa funzione $\theta(\tau)$ tale per cui $t = \theta(\tau)$:

$$\tau \longrightarrow \theta(\tau) \longrightarrow \gamma[\theta(\tau)] = \delta(\tau) = \gamma(t)$$

Di fatto, quelle che studiamo sono funzioni uguali, tranne che nel tempo che usiamo per percorrerle. A questo punto, ci possiamo chiedere, come vari la derivata, ossia la velocità di percorrenza della curva. Determiniamo dunque la derivata della funzione $\delta(\tau)$: per il teorema della derivata composta,

$$\delta'(\tau) = \gamma'[\theta(\tau)] \cdot \theta'(\tau) \implies \gamma'(t) \cdot \theta'(\tau)$$

Come si intuisce, abbiamo dunque la normale derivata prima finora studiata del vettore delle funzioni, ma anche un altro coefficiente, che procura, alla derivata, una dilatazione o una compressione, o un cambio di verso. Si vuol far notare, che quest'ultimo non ha assolutamente senso! Un cambio di verso della derivata, implica un cambio nel verso di percorrenza della funzione, quindi si tornerebbe indietro sulla parte di sostegno già percorsa, cosa priva di senso.

Capitolo 3

Funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}

Ora, in qualche modo, affrontiamo il problema di prima, ribaltato: parleremo infatti ora di funzioni scalari, partendo da un dominio di tipo vettoriale. Muovendoci dunque su di un dominio a superficie, a volume, o su strutture più complesse, si otterranno valori scalari, cioè raffigurabili sul solo asse reale. Quella che però sarà vettoriale, sarà la cosiddetta variabile indipendente, per come l'abbiamo finora chiamata.

3.1 Rappresentazione cartesiana di funzioni a dominio multidimensionale

Come già accennato, il nostro dominio non sarà più costituito dall'asse reale o da una sua parte, ma da qualcosa di più articolato, come un piano, una superficie generica, un volume, o volendo qualcosa di più complesso, ragionando in n variabili e dunque in n dimensioni. La variabile dipendente della funzione, tuttavia, è uno scalare reale, dunque rappresentabile di fatto su di una retta. L'idea, dunque, è quella di muoversi sul dominio, qualsiasi sia la sua forma, variando i valori delle singole variabili indipendenti, raggruppabili in un unico vettore variabile indipendente, ed associare ad ogni punto della variabile indipendente (composta dunque da n valori, con n dimensione dello spazio del dominio, quindi in \mathbb{R}^2 ad esempio, ci muoveremo su uno spazio a due dimensioni, ergo su di un piano, e avremo bisogno di due valori per identificare univocamente un punto del piano, un'ascissa e un'ordinata), una variabile dipendente, ossia un valore scalare, detto quota. Esso è un valore che possiamo dunque rappresentare su di un asse (solitamente identificato come asse z). Mentre dunque il dominio di partenza ha dimensione qualsiasi, la variabile indipendente sarà solo la quota, associata al punto del dominio. Per rendere meglio l'idea, paragoniamo ciò che abbiamo finora detto, ad una

cartina geografica: esaminando una cartina, di fatto ci spostiamo su di un piano, quindi abbiamo una funzione di due variabili, per rappresentare la coordinata nella quale ci troviamo. La cartina ha diversi colori, che rappresentano diversi elementi geografici. Per rendere l'idea, immaginiamo di guardare una zona montuosa: muovendoci, la quota varierà con il variare delle coordinate di riferimento, come si vede dalla variazione di intensità di colore. Il colore rappresenta la nostra z , la nostra altitudine, variabile a seconda di x e y , coordinate che indicano la nostra posizione sulla cartina.

Finora abbiamo lavorato con una coppia di assi cartesiani; introduciamo ora la terna di assi cartesiani, ossia tre assi a due a due ortogonali tra loro, x, y, z . Poichè lo spazio è suddiviso da questi tre assi, possiamo pensare lo spazio diviso in 8 sezioni, dette ottanti: l'idea è quella di considerare i semispazi divisi dai piani ortogonali agli assi x, y, z . Avremo così 8 ottanti:

Risulta molto facilmente rappresentabile, in questo tipo di sistema di riferimento, lo spazio vettoriale di dimensione 2, \mathbb{R}^2 : se consideriamo la funzione di variabili indipendenti x e y , ossia il cui dominio è una porzione del piano xy , possiamo considerare l'asse z per rappresentare le sole quote, e muoverci sul piano, come già accennato. Datoci un punto $P = (x_P; y_P)$, e una certa funzione $z = f(x; y)$, basterà sostituire a x il nostro x_P , idem per y e y_P , e così troveremo il valore del nostro z_P , ossia la quota del punto P .

Esempio Pratico 3 *Data la funzione $z = x^2 + y^2, P = (2; 2), z_P = f(2; 2) = 4 + 4 = 8$*

3.2 Topologia di \mathbb{R}^n

Arriva ora un nuovo stravolgimento per la nostra concezione di Analisi Matematica. Questo tipo di studi, nacque grazie all'introduzione di un concetto fondamentale, il concetto di intorno, che ha permesso l'introduzione di nuovi strumenti quali i limiti, quindi le derivate, gli integrali, e quant'altro. L'Analisi Matematica, in parole povere, si fonda su questo fondamentale concetto, e sulla formalizzazione degli operatori \in, \forall, \exists , come un buon testo di Calcolo Differenziale e Integrale ad una variabile dovrebbe esporre.

Risulta ora necessario rivedere ed estendere il concetto di intorno, studiando domini n -dimensionali. Si sceglie di presentare, come esempio, lo spazio \mathbb{R}^2 , e come sempre le nozioni sono semplicemente estensibili a qualsiasi dimensione. Dato un punto P appartenente al dominio della funzione, studiare l'intorno significa di fatto studiare i punti ad esso vicini. La cosa più naturale che si possa fare per esprimere questo concetto di vicinanza è dunque considerare tutti i punti interni ad una circonferenza, di raggio δ , ar-

bitrario, centrata sul punto del quale studiamo l'intorno. Definiamo dunque, ora, in \mathbb{R}^2 il nostro intorno I di raggio δ , I_δ come:

$$I_\delta[(x_P; y_P)] = \{(x; y) : (x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 < \delta^2\}$$

Come si definisce, in parole povere, questo concetto di intorno in 2 dimensioni: fissato un certo raggio δ , si chiede che, per appartenere all'intorno del punto $P = (x_P; y_P)$, i punti debbano essere contenuti all'interno dell'area del cerchio di centro P e raggio δ . Cosa risulta ora facile capire, estendendo: se in \mathbb{R} il nostro intorno era un segmento lungo 2δ , in \mathbb{R}^2 una circonferenza di raggio δ , in \mathbb{R}^3 sarà una sfera di raggio δ , e in n dimensioni. Potremo usare l'espressione analitica sopra esposta, inserendo n equazioni, una per ogni variabile della funzione. Sarà, ovviamente, molto più difficile (per non dire impossibile) immaginare geometricamente uno spazio di questo tipo, ma aldilà di problemi di calcolo, la difficoltà teorica nel lavorare in spazi n -dimensionali non cambierà minimamente rispetto a quella per spazi più noti.

Introduciamo ora alcune definizioni, avendo come ipotesi, $A \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Definizione 2 Il vettore $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ si dice interno all'insieme A se esiste un intorno di \vec{x} interamente contenuto nell'insieme A

$$\vec{x} \text{ int}(A) \implies \exists I_\delta(\vec{x}) \subset A$$

Definizione 3 Dato $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, si dice esterno all'insieme A se esiste un intorno I_δ tale che $I_\delta \cap A = \emptyset$

$$\exists I_\delta(\vec{x}) : I_\delta \cap A = \emptyset$$

Definizione 4 Dato $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, si dice punto di frontiera dell'insieme A se ogni intorno di \vec{x} ha intersezione non nulla sia con A che con il complementare di A

Definizione 5 Un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^n$ si dice aperto se $\text{int}(A) = A$, ossia se tutti i punti di A sono interni ad A .

Intuitivamente, immaginiamo di trovarci all'interno di un insieme, di uno spazio vettoriale di dimensione n . Ciò che possiamo immaginare, è che, se l'insieme è aperto, allora possiamo spostarci, in punti infinitesimamente vicini, senza il rischio di uscire dall'insieme. Questo perchè di fatto siamo lontani dalla frontiera, e dunque riusciremo sicuramente a spostarci senza uscire. Vorrei affermare che questa visione è molto utile per rendersi conto di quello che intuitivamente sia un insieme aperto, ma solo perchè studiamo

la topologia di uno spazio relativamente semplice: in spazi in cui la concezione di distanza è assolutamente astratta, parlare di vicino o lontano è molto più difficile.

Definizione 6 Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, si definisce chiusura di A l'insieme stesso unito alla sua frontiera. Si definisce chiuso un insieme che contenga tutti i propri punti di frontiera. Altra definizione chiara, è questa: un insieme si dice chiuso, se il suo complementare è aperto.

Un insieme può, in alcuni casi, essere sia chiuso che aperto: due casi fondamentali sono \mathbb{R}^n , e \emptyset .

Definizione 7 Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, si dice limitato se esiste:

$$I_\delta(0) : A \subset I_\delta(0)$$

In altre parole, un insieme è detto limitato se esiste un cerchio (in \mathbb{R}^2), una sfera (in \mathbb{R}^3), o una struttura più complessa (in \mathbb{R}^n) in grado di chiuderlo. Analiticamente, un insieme si può dire limitato se ha diametro finito, e se la sua chiusura è riconoscibile come insieme limitato. Se esiste un numero positivo $K > 0$ tale che la distanza tra due punti qualsiasi appartenenti all'insieme sia sempre minore di K , allora l'insieme è limitato.

Definizione 8 Dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, esso è compatto se è contemporaneamente chiuso e limitato.

Definizione 9 Dato insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, esso è convesso se, per ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in A$, il segmento AB è interamente contenuto nell'insieme. Preso un insieme, e presi due punti qualsiasi, se il segmento che li congiunge è sempre interamente contenuto nell'insieme, allora l'insieme è convesso. Qualsiasi insieme che presenti buchi, o incavature, non è convesso, perchè il segmento congiungente di alcuni punti sarebbe fuoriuscente dall'insieme.

Definizione 10 Dato insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, esso è definito connesso per archi se, per ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in A$, esiste un arco di curva regolare (a tratti, almeno), $[a; b] \xrightarrow{\gamma} A$ tale per cui $\gamma(a) = P_1; \gamma(b) = P_2$. il sostegno della curva deve essere inoltre incluso in A . Ovviamente, un insieme convesso, allora è anche connesso. Il viceversa non è valido. La definizione di connessione e connessione per archi solitamente non coincidono per forza: studiando più nel dettaglio questa definizione (come anche altre già viste), si andrebbe a studiare topologie ben più difficili di quella di \mathbb{R}^n ; poichè ci troviamo comunque in uno spazio sufficientemente regolare, allora possiamo dire che connesso e connesso per archi si equivalgono, come idee.

Le prossime definizioni sulla topologia dello spazio \mathbb{R}^n saranno molto importanti, soprattutto per determinati argomenti che saranno affrontati in questo testo.

Prendiamo una funzione che ricicleremo più volte, per poter dare un esempio pratico di come rappresentare graficamente un dominio di una funzione in più variabili.

Esempio Pratico 4 *Data la funzione $z = f(x; y) = \log(x^2 + y + 1)$, determinarne e rappresentarne il dominio, e determinarne alcune caratteristiche.*

Soluzione: poichè il campo di esistenza di un logaritmo è l'insieme dei punti in cui il suo argomento è strettamente positivo, vediamo che:

$$D = x^2 + y + 1 > 0 \implies y > -1 - x^2$$

Osservando il disegno e la funzione, possiamo affermare che D è un insieme aperto, non limitato (in quanto la frontiera non appartiene al dominio), non convesso (in quanto la parabola impedisce a certi segmenti di appartenere interamente al dominio), connesso per archi.

3.3 Limiti

3.3.1 Concetto di limite

Come già accennato, partendo dal concetto di intorno, nell'analisi delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, eravamo riusciti a trovare una definizione del concetto di limite. Ci proponiamo ora di riprenderla, ed estenderla in funzioni del tipo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Prima di tutto, ci preoccupiamo di introdurre un importante concetto, che spesso si trascurava studiando le funzioni ad una variabile, in quanto non indispensabile.

Definizione 11 *Dato insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, e vettore $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, rappresentante le coordinate di un punto nel dominio studiato, quest'ultimo è detto punto di accumulazione per l'insieme A se per ogni intorno di raggio δ , I_δ , intersecato con l'insieme A a parte il punto stesso \vec{x} , risulti essere un insieme non nullo:*

$$\forall I_\delta(\vec{x}) : I_\delta(\vec{x}) \cap A$$

$$\{\vec{x}\} \neq \emptyset$$

Introdurre il concetto di punto di accumulazione serve ad un motivo particolare: perchè abbia senso calcolare un limite, deve esistere un intorno di un punto nel quale si possa calcolare. Il limite infatti non fornisce normalmente il valore preciso di una funzione in un punto, ma il valore alla quale

tenderebbe questa, studiando l'intorno del punto interessato. Per questo motivo, il punto di accumulazione serve a distinguere questi stessi dai cosiddetti punti isolati, ossia punti in cui la funzione è definita ed ha effettivamente un valore, ma il cui intorno è nullo, in quanto non appartenente al dominio della funzione. Un punto di accumulazione, dunque, è un punto non-isolato.

Passiamo ora al concetto di limite. Ovviamente, avrà senso calcolare il limite di una funzione solamente in un punto di accumulazione. Prendendo come esempio una funzione $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ed un punto di accumulazione $P = (x_P; y_P)$,

$$\lim_{(x;y) \rightarrow (x_P; y_P)} f(x; y) = l$$

Se l è finito, allora avremo una calotta, ossia un punto in cui la funzione ha un andamento regolare; se $l \rightarrow \infty$, la forma sarà simile a quella del bicchiere di Champagne. Si dice in questi casi che la funzione esplosa in quel punto, in quanto va all'infinito.

Perchè abbia senso calcolare il limite di una funzione, dunque, vi sono due fondamentali condizioni, che desidero mettere in evidenza:

- $f(x; y)$ deve essere definita in $I_\delta(\vec{x})$;
- \vec{x} deve essere punto di accumulazione per $\text{Dom}(f)$.

3.3.2 Limiti all'infinito

Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, era possibile considerare limiti per $x \rightarrow \pm\infty$. Poichè ora non ci troviamo più su una retta, ma al meglio su di un piano, calcolare un limite all'infinito vuol dire calcolare il limite in ogni direzione, tendente all'infinito. Cerchiamo di esprimere in matematica tale affermazione, per poi provare a renderla meglio appetibile:

$$\forall M > 0 \exists I_\delta(\infty) : \forall(\vec{x}) \in I_\delta(\infty) \implies f(x; y) > M$$

Abbiamo fatto un esempio pratico, in precedenza, parlando di spazio a due dimensioni, e quindi di intorno considerato come circonferenza. Per noi, dire che il limite va a infinito, significa dire che per una circonferenza di raggio qualsiasi, comunque il nostro limite andrà oltre il bordo della stessa.

3.3.3 Calcolo di limiti

Per calcolare limiti a più variabili, conviene tener conto di alcuni accorgimenti che possono notevolmente semplificare:

- Per calcolare un limite apparentemente difficile, può essere molto utile passare in polari le coordinate: spesso, quando troviamo dei termini quadratici, del tipo $x^2 + y^2$ (nel caso ottimale), ricondurci alla classica trasformazione in coordinate polari può permettere di perdere numerosi termini scomodi, e quindi risolvere a occhio il limite prima molto difficile; la trasformazione da adottare è:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

- Una strategia completamente diversa, è quella di cercare di dimostrare la divergenza di un limite: se si dimostra che il limite non esiste, tagliando la curva con altre curve, semplici, come $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, e se sostituendo dunque alla funzione una di queste funzioni si verifica divergenza con anche solo una di queste curve, il limite è divergente.

Vorrei ora proporre due esempi pratici, sulle due metodologie spiegate per affrontare calcolo di limiti.

Esempio Pratico 5 *Data la funzione:*

$$f(x; y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$$

calcolare il limite per $x, y \leftarrow 0$.

Soluzione: osserviamo che nel dominio D la funzione risulta essere continua. Vogliamo vedere che valore assume il limite, per x tendente a $(0; 0)$ la funzione.

$$\lim_{(x; y) \rightarrow (0; 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

Esempio Pratico 6 *Data la funzione:*

$$f(x; y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, D = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\}$$

calcolare il limite a ∞ della funzione.

Soluzione: prendiamo la funzione, e tagliamola con alcune funzioni importanti: $x = 0$; $y = 0$; $y = x$:

$$y = 0 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0}{x^2} = 0; x = 0 \implies \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{0}{y^2} = 0; y = x \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2x^2} = \frac{1}{2} \cdot x \longrightarrow \infty$$

Il limite risulta essere divergente, se sezionato con la bisettrice del primo e terzo quadrante.

Prima di concludere l'argomento, si vuol far notare una cosa: se, per qualsiasi curva sezioniamo, appare sempre lo stesso limite, non è assolutamente detto che comunque il limite della funzione tenda effettivamente a quel valore: Giuseppe Peano dimostrò infatti che, è sì possibile studiare la non-convergenza, cercando una curva mediante la quale il limite diverga, ma non è possibile, mediante questa stessa strada, dimostrare la convergenza.

3.4 Continuità

3.4.1 Introduzione al concetto di continuità di una funzione in \mathbb{R}^n

Come nell'Analisi ad una variabile, il concetto di continuità è legato al concetto di limite. Data infatti una funzione $f(x)$ definita in un punto x_0 , essa si dice continua se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Normalmente, sarebbe necessario procedere in questo modo, ossia verificare se il limite effettivamente tende a dove l'intorno ci farebbe intuire, o se si ha un qualche tipo di discontinuità. Fare conti simili risulta essere molto difficile, noioso, inutile. Abbiamo infatti la possibilità di usare un teorema che ci garantisce, con molta meno fatica, la continuità.

Teorema 1 *Sia $\phi(x) : I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$, continua in I . Allora la funzione $f(\vec{x}) = \phi(x) \forall x \in I \times \mathbb{R}$ è continua in $I \times \mathbb{R}$*

Cosa facciamo in parole povere: la funzione $\phi(x)$ è ad una variabile, mentre $f(\vec{x})$ a n variabili. Ma noi consideriamo così solo la variabile x , per il momento. Ciò che facciamo, è studiare la continuità della funzione, una variabile per volta. Questo perchè di fatto una funzione a più variabili è rappresentabile considerando i contributi di ogni singola funzione di una variabile, traslata in tutto lo spazio. A seconda delle operazioni tra porzioni di funzioni, gli effetti sulla funzione finale saranno ovviamente diversi.

Ciò che intendiamo dunque fare è vedere, mediante lo studio delle singole funzioni, se vi siano discontinuità in esse. Naturalmente, una somma, differenza o prodotto di funzioni continue, come risultato daranno una funzione continua. Mediante questa sorta di divide et impera, possiamo dunque evitare di calcolare i limiti, per studiare la continuità di una funzione.

Esempio Pratico 7 *Data la funzione $f(x; y) = \log(x^2 + y + 1)$, verificare perchè è continua nel dominio:*

Soluzione: basandoci sul teorema appena citato, vediamo che: $f(x) = x^2$ è continua; $g(y) = y$ è continua; $h(x; y) = 1$ è continua. Poiché le tre funzioni sono legate tra loro, all'interno del logaritmo, da un'operazione di somma, allora possiamo affermare tranquillamente che all'interno del dominio la funzione è continua.

3.4.2 Estensione teoremi fondamentali sulle funzioni continue

Nello studio delle funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, esistono alcuni teoremi particolarmente utili, data come ipotesi la continuità della funzione. Intendiamo estendere a più variabili due di questi: il teorema di Weierstrass ed il Teorema di esistenza degli zeri. C'è da dire che le ipotesi cambiano radicalmente; vediamo meglio, approfondendo i due teoremi uno ad uno:

Teorema 2 di Weierstrass : *Data funzione f continua in un dominio D , tale che questo sia un insieme compatto, allora in D la funzione f assume punti di massimo e minimo assoluto*

Teorema 3 di esistenza degli Zeri: *Dato D un insieme connesso, e f continua in D , dati $P_1, P_2 \in D, f(P_1) \cdot f(P_2) < 0$, data $\gamma(t)$ curva regolare a tratti tale che $[a; b] \rightarrow D, \gamma(a) = P_1, \gamma(b) = P_2$, allora in D la f ha uno zero. In matematica:*

$$\exists t_0 \in [a; b] : f[\gamma(t_0)] = 0$$

Capitolo 4

Derivabilità, differenziabilità

Intendiamo ora riprendere in più variabili il concetto di derivata, e studiare teoremi ad essa legati, o estendere teoremi già precedenti. Riprenderemo innanzitutto il concetto di derivata in più variabili, introdurremo un nuovo operatore, il gradiente, dopodichè discuteremo su eventuali legami tra derivabilità e continuità di una funzione in più variabili.

4.1 Derivate parziali - Gradiente

Dato un punto $P = \vec{x} \in \text{dom}(f)$, ossia un punto con un intorno in cui f è definita (punto di accumulazione). In un intorno di questo punto, potrà essere definito uno spazio superficiale, volumetrico, o di qualsiasi altro tipo. Consideriamo il caso a 2 variabili, dove, nello spazio, avremo dunque una superficie.

Sappiamo lavorare con derivate ad una variabile; possiamo, come idea, sfruttare il fatto di considerare una variabile costante rispetto ad un'altra. In altre parole, potremmo pensar di considerare la variazione della funzione, esclusivamente considerando la variazione di una variabile alla volta. Questo, è il concetto che permise l'introduzione della derivata parziale; data una funzione $f(x; y)$, e dato un punto $P \in \mathbb{R}^2$, $P = (x_P; y_P)$, immaginando di voler derivare la funzione parzialmente, rispetto alla variabile x , fissiamo la y ad un valore y_0 , e a questo punto consideriamo il limite del rapporto incrementale, esattamente come in funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_P + h; y_P) - f(x_P; y_P)}{h} = l$$

Se l esiste ed è finito, viene detto derivata parziale di $f(x; y)$ in $(x_P; y_P)$ rispetto alla variabile x : la nomenclatura che si è soliti usare, è la seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} (x_P; y_P)$$

Lo stesso ragionamento è ovviamente applicabile con la variabile y , ottenendo così la derivata parziale di f rispetto a y , $\frac{\partial f}{\partial y}(x_P; y_P)$.

Viene, a questo punto, introdotto un nuovo concetto: il gradiente: esso è semplicemente il vettore contenente le derivate parziali della funzione, rispetto ad ogni variabile di un certo sistema; il gradiente di f si identifica con il simbolo $\nabla f(x; y)$, e, nel caso a due variabili, ad esempio, come appena esposto, il gradiente di f sarà così definito, rispetto ad un sistema di assi cartesiani:

$$\nabla f(x; y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} (x_P; y_P); \frac{\partial f}{\partial y} (x_P; y_P) \right)$$

Esempio Pratico 8 Vogliamo calcolare il gradiente della funzione $f(x; y) = \log(x^2 + y + 1)$, in un generico punto $(x_P; y_P)$

Soluzione: deriviamo parzialmente sia rispetto a x che rispetto a y la nostra funzione, e così troviamo il vettore contenente i contributi di ogni variabile: di fatto, dovremo considerare, per derivare parzialmente, le variabili diverse da quella di derivazione come fossero costanti, numeri, perchè ogni variabile è indipendente dalle altre. Svolgendo quindi i conti, seguendo queste indicazioni, il risultato sarà:

$$\nabla f(x; y) = \left(\frac{2x}{x^2+y+1}; \frac{1}{x^2+y+1} \right)$$

4.2 Derivate Direzionali - Derivabilità e Continuità

4.2.1 Derivate Direzionali

Finora, abbiamo calcolato le derivate parziali rispetto a x , y , z , cioè abbiamo tagliato la superficie con particolari piani, per intenderci ortogonali agli assi appena elencati. In realtà, il concetto di derivata è ulteriormente estensibile, poichè il piano di taglio, può essere qualunque. In altre parole, è possibile quantificare la variazione della funzione, seguendo una certa retta di percorrenza su di essa. Prendiamo ad esempio, come curva, una retta di pendenza qualsiasi, per la quale passano i punti $P = (x_P; y_P) \in f(x; y)$; $\vec{v} = (a; b)$. Potremo dunque ottenere una cosa del tipo:

$$t \longrightarrow t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + x_P \\ at + y_P \end{pmatrix}$$

Il ragionamento fila alla perfezione: se il parametro tempo è zero, cioè se non abbiamo ancora iniziato a percorrere lo spazio, di fatto ci troviamo ancora sulla funzione, dunque in P ; al variare del tempo, le componenti della retta avranno un loro peso, così ci si allontanerà, trovandosi sulla retta parallela al vettore \vec{v} , passante per il punto P . Vediamo ora il significato di questa cosa, studiando il limite del rapporto incrementale, considerando come incremento il tempo t :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_P + at; y_P + bt) - f(x_P; y_P)}{t} = l$$

Se il limite l esiste ed è finito, viene chiamata derivata direzionale nella direzione del vettore \vec{v} e nel punto P .

Come possiamo ora intuire, le derivate parziali prima citate sono nient'altro che particolari derivate direzionali, seguenti come rette gli assi cartesiani.

Non sempre è possibile calcolare le derivate direzionali, in alcuni punti: facciamo un esempio pratico.

Esempio Pratico 9 *Data la funzione $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, in $P = (0; 0)$, $\vec{v} = (a; b)$, determinare se è derivabile in P .*

Soluzione: il punto P rappresenta la singolarità del cono di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sappiamo che:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + at \\ 0 + bt \end{pmatrix}$$

Sostituendo dunque le nostre x e y nell'equazione, otteniamo ciò:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 t^2 + b^2 t^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{|t| \sqrt{a^2 + b^2}}{t} = \cancel{\neq}$$

Abbiamo dunque verificato che, nella singolarità di un cono, non è possibile trovare le derivate direzionali.

4.3 Interpretazione geometrica del Gradiente

Una volta introdotto il concetto di derivata direzionale, possiamo meglio discutere concetto già introdotto di Gradiente. Abbiamo in precedenza definito la derivata direzionale in un punto P come:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} (x_P; y_P) = \nabla f (x_P; y_P) \cdot \vec{v}$$

Notiamo dunque che $\frac{\partial f}{\partial v}$ dipende da $|\vec{v}|$; usiamo un'espressione vettoriale (ossia esprimiamo il tutto con dei versori):

$$\frac{\partial f}{\partial v} (x_P; y_P) = |\nabla f (x_P; y_P)| \cdot |\vec{v}|$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} (x_P; y_P) = |\nabla f (x_P; y_P)| \cdot |\vec{v}| \cos \theta$$

Ma noi sappiamo che $-1 \leq \cos \theta \leq 1$: quindi, possiamo tranquillamente dire che:

$$-|\nabla f (x_P; y_P)| \leq \frac{\partial f}{\partial v} (x_P; y_P) \leq |\nabla f (x_P; y_P)|$$

Al variare dell'angolo θ , abbiamo dunque tre fondamentali casistiche particolari, tre casi estremi:

- Se $\theta = 0$, la derivata direzionale ha la direzione e il verso del gradiente;
- Se $\theta = \pi$, la derivata direzionale ha direzione parallela e verso opposto rispetto al gradiente;
- Se $\theta = K\frac{\pi}{2}, K \in \mathbb{N}$, gradiente e derivata sono ortogonali, dunque avranno prodotto scalare nullo.

Cosa possiamo determinare da ciò: il gradiente, è un vettore che sta sul piano xy ; a seconda della direzione del vettore della derivata direzionale, rispetto al gradiente, la velocità del gradiente calerà man mano che l'angolo tra retta e gradiente tenderà a π , e aumenterà con il diminuire dell'angolo. Si può dunque dire che il gradiente rappresenti la direzione di massimo accrescimento della funzione. Poichè ortogonalmente al gradiente si ha crescita 0, si avrà una linea di livello della funzione, ossia una curva sulla quale tutti i punti hanno crescita nulla. Infine, nel verso del gradiente si avrà un incremento di valori della funzione, nel verso opposto a quello del gradiente avremo decremento della funzione.

4.4 Derivate Totali

Il concetto di Derivata Totale è la generalizzazione ultima, prima di passare al concetto di differenziabilità, del concetto di derivata in funzioni di più variabili. Essa consiste, semplicemente, nel muoverci, anzichè su di una retta, su di una curva qualsiasi. Data una certa curva γ , in forma parametrica,

intenderemo sezionare con questa la superficie. Avremo un processo di questo tipo:

$$t \xrightarrow{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \longrightarrow f(\gamma_1(t); \gamma_2(t)) \longrightarrow \frac{d}{dt} f(\gamma_1(t); \gamma_2(t))$$

Dato dunque un certo valore temporale t_0 , la curva avrà una forma del tipo:

$$\begin{cases} x_0 = \gamma_1(t_0) \\ y_0 = \gamma_2(t_0) \end{cases}$$

La derivata totale, dunque, sarà:

$$\nabla f(x_P; y_P) \cdot \gamma'(t_0)$$

4.4.1 Derivabilità e Continuità

Una volta introdotto il concetto di derivata direzionale, che amplia quello di derivata parziale, ci chiediamo se esista un qualche legame tra derivabilità e continuità, in funzioni di più variabili. Riprendiamo l'osservazione precedentemente scoperta, nel calcolo di limiti in più variabili, da Giuseppe Peano: è possibile studiare, mediante calcolo di limiti, la non continuità di una funzione, non la continuità, a parte determinati casi esposti. In altre parole, la derivata direzionale è un concetto ancora troppo debole per poter dare condizioni forti come la continuità di una funzione: ci potrebbe sempre essere una direzione, o una certa curva di percorrenza, secondo cui la nostra funzione potrebbe risultare non derivabile, e ciò eliminerebbe tutti i casi favorevoli prima trovati. In spazi come \mathbb{R}^n , la vera estensione di quello che è il concetto di derivabilità, in una variabile, è il concetto di differenziabilità.

4.5 Differenziabilità

Quando si parla di funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, una condizione sufficiente per avere certezza di avere continuità in un certo intorno, è la derivabilità. Cerchiamo di ricordare cosa significava derivare in una variabile: ciò che cercavamo di ottenere, era approssimare, mediante la formula di Taylor, una funzione ad una retta, che risultava essere tangente nel punto studiato alla funzione. In matematica, si diceva che:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Una funzione, in altre parole, sarebbe uguale alla funzione valutata in un certo punto, più una retta osculatrice (ossia una retta approssimante la funzione, di coefficiente angolare $f'(x_0)$), a meno di un certo resto $o(x - x_0)$. Cerchiamo di spiegare in altre parole il significato di ciò, per poter capire meglio cosa intendiamo fare: la funzione, può essere approssimata con un'altra funzione (in questo caso, una retta tangente), con un errore $o(x - x_0)$, quindi un errore lineare: se la funzione si avvicina al punto studiato, in modo più che lineare, ossia più rapidamente di quanto lo farebbe una retta (per esempio una parabola, o una cubica, sono più rapide di una retta, ad esempio nell'intorno di $x = 0$). Noi abbiamo dunque garanzie sul fatto che abbiamo, localmente, un'approssimazione lineare (nel caso di derivata prima, si intende) della funzione. Taylor andò avanti, e trovò un teorema generale per approssimare una funzione con un errore locale a proprio piacimento (di ordine 2, o parabolico, di ordine 3, o cubico, e così via per ordini qualunque). Basandoci su questi presupposti, generalizziamo il concetto di derivabilità, in differenziabilità: prendiamo il caso a due variabili, ossia in \mathbb{R}^2 : se quella che cercavamo prima era una retta tangente, quello che ora cerchiamo sarà intuitivamente un piano tangente alla superficie, ossia un'approssimazione locale della superficie, a meno di un piano; per essere più precisi, il piano passante per il punto studiato $P = (x_P; y_P) \in \mathbb{R}^2$, tangente ad esso.

L'equazione che andremo a cercare, avrà una forma del tipo:

$$z = \lambda(x - x_P) + \mu(y - y_P) + f(x_P; y_P)$$

Definizione 12 *La funzione $f(x; y)$ è differenziabile nel punto $P = (x_P; y_P)$ se:*

$$f(x; y) = f(x_P; y_P) + \lambda(x - x_P) + \mu(y - y_P) + o(\sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2})$$

Cerchiamo di spiegare in parole povere: se esiste un piano $z = \lambda(x - x_P) + \mu(y - y_P) + f(x_P; y_P)$ che approssimi la funzione a meno della distanza tra i due punti, calcolata con il teorema di Pitagora (in qualche modo, si parla sempre di errore lineare), la funzione è differenziabile. L'errore deve tendere a 0 più rapidamente di quanto non lo faccia la distanza tra i due punti, ossia il segmento che li congiunge. I valori λ e μ saranno introdotti in seguito.

Teorema 4 *Se f è differenziabile in $P = (x_P; y_P)$, allora essa è continua in P*

Abbiamo parlato di piano tangente, abbiamo dato una definizione formale di esso, ma non abbiamo ancora parlato dei due parametri che permettono

di identificare il piano tangente, λ e μ . Cerchiamo di arrivare a definirli, mediante operazioni analitiche; immaginiamo di spostarci lungo una certa retta, determinata da un vettore $\vec{v} = (a; b) \neq (0; 0)$, partendo dal punto $P = (x_P; y_P) \in \text{dom}(f)$; in forma parametrica, ci muoveremo seguendo un moto del tipo:

$$\begin{cases} x = x_P + at \\ y = y_P + bt \end{cases}$$

Possiamo dunque dire che:

$$f(x_P + at; y_P + bt) - f(x_P; y_P) = \lambda at + \mu bt + o(\sqrt{a^2 t^2 + b^2 t^2})$$

Dividiamo tutto per il parametro temporale t , e passiamo al limite per $t \rightarrow 0$, e sfruttando le eguaglianze del sistema, troviamo che:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_P + at; y_P + bt) - f(x_P; y_P)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda at + \mu bt + o(\sqrt{a^2 t^2 + b^2 t^2})}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda a \cancel{t} + \mu b \cancel{t} + o(t \cdot \sqrt{a^2 + b^2})}{\cancel{t}} = \lambda a + \mu b$$

Il termine $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_P + at; y_P + bt) - f(x_P; y_P)}{t}$ è semplicemente la derivata direzionale rispetto al vettore \vec{v} della funzione; il termine $\lambda a + \mu b$ si può interpretare come prodotto scalare dei termini:

$$(\lambda; \mu) \cdot (a; b)$$

Possiamo dunque ritenere valida la relazione:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = (\lambda; \mu) \cdot (a; b)$$

Il vettore $(a; b)$ è semplicemente il vettore direzionale che abbiamo usato per la derivata direzionale; cerchiamo ora di definire il vettore $(\lambda; \mu)$. Facciamo ora una semplice osservazione: se considerassimo come \vec{v} un vettore della base canonica, come ad esempio \vec{u}_x (versore in direzione asse x), partendo dalla relazione

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_x} = \frac{\partial f}{\partial x} = (\lambda; \mu) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda$$

Stessa cosa si può applicare, con y :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_y} = \frac{\partial f}{\partial y} = (\lambda; \mu) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu$$

Possiamo dunque finalmente dire che il piano tangente, è così definibile: dato un punto $P = (x_P; y_P)$, il piano tangente alla superficie che rappresenta la funzione $f(x; y)$ ha una forma del tipo:

$$z = f(x_P; y_P) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_P; y_P) \cdot (x - x_P) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_P; y_P) \cdot (y - y_P)$$

Il vettore normale al piano, comunemente indicato con \vec{n} , si può identificare con il gradiente, e con il valore -1 :

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_P; y_P); \frac{\partial f}{\partial y}(x_P; y_P); -1 \right)$$

Esponiamo ora un teorema molto importante, riguardante continuità e differenziabilità di una funzione:

Teorema 5 *Dato uno spazio vettoriale, una funzione è differenziabile in un punto appartenente ad esso, se esistono le derivate parziali della funzione nel punto, e lì siano continue.*

Proponiamo ora un paio di esempi, in cui si studia la differenziabilità in un punto:

Esempio Pratico 10 *Data la funzione $f(x; y) = 1 - x^2 - y^2$, ed il punto $P = (0; 0)$, determinare se la funzione sia differenziabile in P , e trovare dunque il piano tangente.*

Soluzione: troviamo il gradiente della funzione con il solito procedimento. Esso sarà:

$$\nabla f(x; y) = (-2x; -2y)$$

in P , le derivate parziali sono continue, e il gradiente valutato in P sarà $(0; 0)$;

Per trovare il piano tangente in P , usiamo la formula di Taylor:

$$f(x; y) = f(0; 0) + (-2 \cdot 0)(x - 0) + (-2 \cdot 0)(y - 0) = 1 - 0 - 0 = 1$$

Il piano tangente sarà dunque di equazione

$$z = 1$$

Esempio Pratico 11 Data la funzione $f(x; y)$ così definita:

$$\begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = (x; y) \neq (0; 0) \\ 0 = (x; y) = (0; 0) \end{cases}$$

Determinare se sia differenziabile in $P = (0; 0)$ e trovarne il piano tangente in P .

Soluzione: Vediamo che le derivate parziali in P dovrebbero essere entrambe nulle, a occhio, poichè la funzione vale 0. dunque, $\nabla f(0; 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vogliamo per verificare la continuità delle derivate parziali, a questo punto: prendiamo la funzione in punti diversi da 0, e scegliamo di tagliarla con rette di forma $y = mx$; ciò significa sostituire all'interno della funzione la seguente espressione;

$$f(x; mx) = \frac{x^2 mx}{x^2 + m^2 x^2} = \frac{mx^3}{x^2(m^2 + 1)} = \frac{mx}{1 + m^2}$$

Vediamo che, al variare di m , variano le soluzioni, che possono quindi tranquillamente non essere 0, e quindi non stare sul piano tangente che noi potevamo prevedere. La funzione, dunque, non è differenziabile.

Possiamo ora riprendere il teorema della differenziabilità, evidenziandone tre punti fondamentali: una funzione, per essere differenziabile in un punto $P = (x_P; y_P)$, deve rispettare questi punti:

- In tutte le direzioni devono esistere le derivate parziali;
- Le derivate direzionali devono tutte essere sullo stesso piano;
- Il piano tangente deve approssimare la curva con un errore esprimibile mediante resto di Peano come: $o(\sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2})$.

4.6 Derivate successive

Dato un intorno di un punto A , aperto, ed una funzione f differenziabile in A , esistono cioè le derivate parziali rispetto alle variabili x e y , vogliamo derivare parzialmente ulteriormente la funzione. Abbiamo, come si può vedere, 4 possibilità:

1. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} (x_A; y_A) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x_A; y_A)$
2. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} (x_A; y_A) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (x_A; y_A)$

$$3. \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} (x_A; y_A) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (x_A; y_A)$$

$$4. \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} (x_A; y_A) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (x_A; y_A)$$

Le espressioni 2) e 3) sono dette derivate miste, le 1) e 4) derivate pure. Ovviamente, questo ragionamento per la derivata seconda; per la derivata terza, sarebbe necessario svolgere molte più derivazioni, e così via.

Dire a questo punto che una funzione f in un dominio di più variabili appartenga a $C^{(2)}(A)$ equivale a dire che la funzione, le derivate parziali prime, e le derivate parziali seconde sono tutte continue in A . Introduciamo ora un'importante formalismo per lo studio della derivata seconda in Analisi in più variabili: la Matrice Hessiana; essa è così definita, nel caso in 2 variabili (e analogamente estendibile in n variabili):

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Esponiamo ora un teorema riguardante le derivate seconde miste, importante per trarre considerazioni dalla matrice Hessiana:

Teorema 6 (di Schwarz) *Data come ipotesi la continuità delle derivate parziali della funzione f in studio, l'ordine di derivazione in derivate parziali di ordine n , miste, è ininfluente.*

Questo teorema ci permette di ridurre notevolmente il numero di calcoli da effettuare; si noti che, inoltre, grazie a questo problema, possiamo determinare una proprietà fondamentale della matrice Hessiana: essa risulta essere, infatti, una matrice simmetrica. Essendo ininfluente l'ordine di derivazione, possiamo dire che gli elementi della matrice, scambiando gli indici, risultano essere uguali.

4.7 Formula di Taylor

E' possibile estendere un'utilissima formula utilizzata nelle funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, al caso di funzioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: la Formula di Taylor. Questa può tornare molto utile per effettuare operazioni di diverso tipo; un esempio classico che esamineremo, è lo studio dei massimi e minimi relativi di una funzione. Nella fattispecie, saremo dunque interessati a studiare la formula di Taylor al primo, e al secondo ordine. Talvolta le informazioni fornite dall'approssimazione in secondo ordine potranno non essere sufficienti, potrebbe essere dunque necessario ricorrere ad osservazioni di altro tipo, per determinare la natura dei punti studiati.

Consideriamo la formula di Taylor con approssimazione al primo ordine, in un punto $P \in \mathbb{R}^2$; essa avrà una forma del tipo:

$$f(x; y) = f(x_P; y_P) + \nabla f(x_P; y_P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix} + o(\sqrt{(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2})$$

Vediamo ora la formula di Taylor con approssimazione a secondo ordine:

$$f(x; y) = f(x_P; y_P) + \nabla f(x_P; y_P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - x_P & y - y_P \end{pmatrix} \cdot H_f(x_P; y_P) \cdot \begin{pmatrix} x - x_P \\ y - y_P \end{pmatrix} + o((x - x_P)^2 + (y - y_P)^2)$$

Abbiamo un'approssimazione quadratica, dunque possiamo togliere la radice nel $o()$;

Cosa capiamo dalla formula di Taylor: mediante il gradiente, e la matrice Hessiana, è possibile ricostruire alcune caratteristiche della funzione. Vediamo ora il già citato esempio precedente, di applicazione pratica di questa formula.

4.7.1 Classificazione dei punti stazionari

Dato insieme aperto A , e punto $P = (x_P; y_P) \in A$, sappiamo per definizione, riadattando le nozioni di Analisi ad una variabile, che:

- P è massimo relativo in $A \iff \exists I_{delta}(x_P; y_P) : f(x; y) \leq f(P) \forall x, y \in I_{delta}(x_P; y_P)$
- P è minimo relativo in $A \iff \exists I_{delta}(x_P; y_P) : f(x; y) \geq f(P) \forall x, y \in I_{delta}(x_P; y_P)$

Per trovare eventuali punti stazionari, dovremo dunque seguire una certa strada: data funzione $f \in C^{(1)}(A)$, mediante il teorema di Fermat possiamo dire che, se il gradiente della funzione nel punto studiato, $\nabla f(P)$ è nullo, allora vi è possibilità che esso sia un punto di massimo o minimo relativo. Per poter trovare i punti con gradiente nullo, dovremo risolvere il sistema omogeneo del gradiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

A questo punto, una volta trovati i punti a gradiente nullo, studiamo la relativa matrice Hessiana, ossia il 2-tensore rappresentante la derivata seconda della funzione a più variabili, il suo coefficiente di Taylor; poichè la matrice Hessiana risulta essere simmetrica, se $f \in C^{(2)}$, allora la matrice avrà autovalori λ_i positivi. A questo punto, si chiede di trovarli, e studiarne i segni; seguendo la casistica sotto riportata, saremo in grado di trarre, in linea di massima, conclusioni sui punti stazionari rilevati con il sistema omogeneo del gradiente.

- Se $\exists \lambda_i < 0, \lambda_j > 0, i \neq j$, allora la matrice non risulta essere definita, e dunque il punto non è nè di massimo nè di minimo;
- Se $\lambda_i > 0 \forall i \in [1; n]$ (n dimensione della matrice Hessiana), la matrice risulta essere simmetrica definita positiva, e dunque il punto essere di minimo relativo;
- Se $\lambda_i < 0 \forall i \in [1; n]$ (n dimensione della matrice Hessiana), la matrice risulta essere simmetrica definita negativa, e dunque il punto essere di massimo relativo;
- Se $\lambda_i = 0$, e gli altri autovalori sono di segno concorde, non è possibile, con la sola derivata seconda, identificare la natura del punto stazionario.

Capitolo 5

Calcolo Integrale

Una volta estesi tutti i concetti fondamentali per il calcolo differenziale in più variabili, possiamo estendere anche, nel caso di funzioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, il calcolo integrale, iniziando a parlare di Integrali Doppi, Integrali Tripli, ed altri concetti; in questa premessa, vorrei far capire qual è la grande problematica: ad una variabile, ossia in funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si è sempre ragionato su intervalli, ossia si è sempre integrato su segmenti; ora di fatto, integreremo su domini ben più complessi, ossia di forma qualunque; in realtà, esistono tre fondamentali step, tre fondamentali tipologie di dominio integrabile:

1. Domini rettangolari;
2. Domini verticalmente od orizzontalmente convessi;
3. Domini misurabili generici.

Impareremo a integrare fundamentalmente nei primi due tipi di domini, prima in funzioni a 2 variabili, per poi estendere in 3 variabili;

5.1 Integrali Doppi

Vogliamo capire cosa sia un integrale doppio, dopodichè calcolarlo; per noi, in qualche modo, l'integrale doppio si potrà definire come una sorta di volume con segno: data una certa superficie, e il nostro dominio D sul piano xy , ciò che di fatto calcoleremo sarà il volume dello spazio compreso tra la superficie e il piano. Del piano, seguendo il primo step, avremo solo una porzione di tipo rettangolare, che poi acquisirà forme più svariate. Ciò che dobbiamo fare, per incominciare, è riprendere ed estendere il concetto di integrazione secondo Cauchy: dato un dominio R compatto, esso ha massimo e minimo

assoluti, per il teorema di Weierstrass. Il nostro dominio in questione, è definibile come il rettangolo: $[a; b] \times [c; d]$. Possiamo dire che, chiamati m ed M rispettivamente il massimo e il minimo assoluti del nostro dominio, possiamo dire che, come facemmo per l'area sotto la curva in Analisi ad una variabile,

$$m(b - a)(d - c) \leq Vol(R) \leq M(b - a)(d - c)$$

Abbiamo ora una stima molto grossolana del nostro dominio; possiamo procedere in modo analogo rispetto a prima, ossia dividere il rettangolo R in quattro sottorettangolini, considerando come tagli gli assi dei lati.

I quattro sottodomini resteranno dunque compatti, potremo re-iterare il nostro ragionamento, e dunque ottenere una precisione maggiore, calcolando separatamente quattro volumetti, e sommandoli. Ragionando all'infinito in questo modo, avremo ottenuto l'integrale doppio della funzione studiata, nel dominio R .

Domanda che lo studente accorto può porsi è la seguente: i bordi dei rettangoli ci interessano o meno nel dominio di integrazione? La risposta è abbastanza immediata: l'integrale doppio lavora su oggetti bidimensionali, e di fatto un lato è un oggetto monodimensionale, di conseguenza, non importa particolarmente se un lato appartenga a un sottodominio piuttosto che a nessuno piuttosto che ad entrambi.

5.1.1 Domini Rettangolari

A questo punto abbiamo definito in modo intuitivo cosa sia un integrale doppio. Il metodo di sezionare l'intervallo in molti intervallini, però, è totalmente inattuabile e insensato: determinare una successione per le suddivisioni del dominio, studiarla, e calcolarne limite all'infinito, è una follia. Da buoni matematici, allora, vogliamo usare un metodo classico: ricondurci al problema precedente; noi siamo infatti in grado di calcolare senza problemi un integrale in funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; procediamo in un modo simile all'idea che utilizzeremo, per introdurre il concetto di derivata parziale: scegliamo di fissare una variabile, come costante, almeno in un primo step dell'integrazione, e far variare l'altra. Immaginiamo ad esempio di far variare la sola y , e quindi di fissare la variabile x ad un certo valore \bar{x} ; potremo dire che quella che di fatto varia, sarà la sola variabile rappresentante le ordinate, mentre l'altra starebbe ferma al suo valore \bar{x} ; consideriamo i valori della funzione corrispondenti in $f(x; y)$ ai punti; ciò che di fatto avremo, variando la sola variabile y , sull'asse z , sarà una curva che inizia sul punto $f(\bar{x}; c)$, e termina

nel punto $f(\bar{x}, d)$, con $[c; d]$ i nostri punti di inizio e fine delle ordinate. Come già annunciato, in qualche modo integriamo parzialmente la funzione prima in dy , nell'intervallo $[c; d]$:

$$\int_c^d f(x; y) dy$$

Questa è evidentemente una funzione in una variabile, poichè di fatto fino a qua la nostra x non è una variabile, ma è una costante, di conseguenza non è stata ancora toccata. Preoccupiamoci ora proprio della nostra seconda variabile; dopo aver fatto il conto col primo integrale, non consideriamo più costante la x , di fatto non dovremo considerare più l'integrazione anche nella variabile y , e avremo così ridotto il calcolo a due integrali in due variabili diverse, ma di fatto trattate separatamente.

Ciò che abbiamo ora definito è il concetto di integrale iterato, ossia:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x; y) dy \right) dx$$

Nella fatispecie, quello che abbiamo appena scritto è l'integrale iterato per verticali: vediamo che fissiamo la x , quindi, ad un certo valore che si identifica con rette verticali, ossia parallele all'asse y ; prima si fa variare la y nel dominio interessato, nel nostro caso i nostri $[c; d]$, dopodichè si fa variare la x , dopo aver già terminato il lavoro per le y .

Esiste l'integrale iterato per orizzontali, ossia dove prima si fa variare la x , poi la y , in modo del tutto analogo. Per noi, sarebbe esprimibile con la notazione:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x; y) dx \right) dy$$

Si dimostra che l'integrale doppio, in un dominio rettangolare, è equivalentemente uguale all'integrale iterato calcolato per orizzontali o per verticali, ossia usando una qualunque delle due formule di riduzione per l'integrale doppio.

Ritengo che per ora non sia necessario proporre un esempio pratico specifico su ciò che è stato appena spiegato, a meno di un caso particolare che può, a determinate condizioni, ridurre notevolmente i calcoli per l'integrazione. Un esempio calcolativo sarà proposto nella prossima parte; capendo quello, è banale capire questo tipo di argomento; si cercherà di essere dunque particolarmente chiari dopo.

Esempio Pratico 12 *Dato R dominio rettangolare, definito $[a; b] \times [c; d]$, e funzione $f(x; y)$, funzione scomponibile per prodotto di funzioni dipendenti*

in un'unica variabile, $g(x)$ e $h(y)$, calcolare l'integrale doppio della funzione nel dominio.

Soluzione: questo caso particolarissimo ci è di particolare aiuto: poter scomporre una funzione in due funzioni di variabili diverse e dunque una indipendente dall'altra, è possibile considerare l'integrale come prodotto di due integrali; osserviamo meglio:

$$\int_R f(x; y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d g(x) \cdot h(y) dy \right) dx = \int_a^b g(x) dx \cdot \int_c^d h(y) dy$$

5.1.2 Domini orizzontalmente convessi, o verticalmente convessi

Abbiamo finora parlato di integrare su domini rettangolari: estendiamo le nostre conoscenze, cercando di imparare a trattare due tipi di domini più generici: domini orizzontalmente convessi e domini verticalmente convessi; abbiamo già visto in precedenza le caratteristiche che contraddistinguono gli insiemi convessi, ossia il fatto che tra due punti qualsiasi appartenenti ad un insieme, il segmento che li unisce deve sempre essere contenuto all'interno dell'insieme. Diamo allora la definizione formale di insieme verticalmente convesso, facilmente poi modificabile in orizzontalmente convesso:

Definizione 13 *Dato insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ limitato, si dice verticalmente convesso se l'intersezione di A con una generica retta verticale è o nulla o un segmento, eventualmente ridotto a un punto.*

Più visivamente, immaginiamo di tagliare il nostro dominio a due dimensioni con rette verticali, ossia parallele all'asse delle y ; le nostre rette potranno o non intersecare il dominio, o intersecarlo, a seconda della retta scelta; la condizione di convessità per verticali prevede che, quando la retta interseca il dominio, vi debba essere o un segmento (non una spezzata!), o un unico punto, considerato come segmento degenere.

Le definizioni di dominio orizzontalmente convesso, è equivalente, considerando rette verticali al posto che orizzontali. Per meglio chiarire, inseriamo disegni di domini di diversi tipi.

Perchè queste definizioni ci tornano così utili? Beh, consideriamo il caso di un dominio verticalmente convesso in un intervallo $[a; b]$; possiamo dire che esso, di fatto, sia uno spazio compreso tra due funzioni della sola variabile x , $\alpha(x), \beta(x) \in C^{(0)}([a; b])$, $\alpha(x) \leq \beta(x) \forall x \in [a; b]$. Di fatto, queste due funzioni della variabile x , α e β , sono come una sorta di estremo inferiore ed estremo superiore di integrazione. Ciò che faremo dunque, di fatto, è un'operazione

di questo tipo: dato un dominio bidimensionale $C \subset \mathbb{R}^2$, verticalmente convesso, e una funzione integranda $f(x; y)$, si dimostra che l'integrale doppio è calcolabile nel seguente modo:

$$\int_C f(x; y) dx dy = \int_a^b \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x; y) dy dx$$

Questa appena riportata, è detta formula di riduzione per verticali di un integrale doppio;

Di fatto, si può rifare la stessa cosa, per orizzontali: considerate due funzioni che limitano il dominio D orizzontalmente convesso, funzioni $\gamma(y)$ e $\delta(y)$, nell'intervallo $[c; d]$, tali per cui $\gamma(y), \delta(y) \in C^{(0)}([c; d])$, $\gamma(y) \leq \delta(y) \forall y \in [c; d]$; la formula di riduzione per orizzontali di un integrale doppio della funzione $f(x; y)$ sarà dunque, date le precedenti ipotesi, la seguente:

$$\int_D f(x; y) dx dy = \int_c^d \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x; y) dy dx$$

5.1.3 Applicazioni dell'integrale doppio alla fisica, su spazi approssimativamente a due dimensioni

Di fatto ciò che abbiamo finora introdotto ha applicazioni fisiche, delle quali intendiamo dare alcuni esempi, spesso molto utili da calcolare, nella fattispecie, in questo caso, per la meccanica classica; prima di tutto, introduciamo un certo formalismo:

Definizione 14 *definiamo densità ϱ come il rapporto della funzione della massa in un certo punto \vec{v} , e della superficie totale del dominio, poichè consideriamo oggetti bidimensionali; in sostanza, si tratta di una funzione che identifica la quantità di massa m presente in relazione alla superficie totale del dominio S ;*

$$\varrho(\vec{v}) = \frac{m(\vec{v})}{S}$$

- La massa totale M di un oggetto C , si definirà come l'integrale della funzione della densità su tutto il dominio:

$$M = \int_C \varrho(x; y) dx dy$$

- Il centro di massa (o baricentro) dell'oggetto, definito come il punto che approssimativamente si può considerare il punto in cui è concentrata la massa, è un vettore di dimensione 2, $(x_G; y_G)$ identificato nel seguente modo:

$$x_G = \frac{\int_C \int x \cdot \varrho(x; y) dx dy}{\int_C \int \varrho(x; y) dx dy}$$

$$y_G = \frac{\int_C \int y \cdot \varrho(x; y) dx dy}{\int_C \int \varrho(x; y) dx dy}$$

- Il momento di inerzia I_z di un oggetto C , data una funzione della distanza dall'asse di inerzia, nelle variabili x e y , quindi del tipo $r(x; y)$, e la densità, si calcola mediante la forma:

$$I_z = \int_C r^2(x; y) \cdot \varrho(x; y) dx dy$$

5.1.4 Simmetrie nel piano

Può tornare molto utile, al fine di semplificare le operazioni di integrazione in più variabili, la ricerca di una simmetria della funzione rispetto alcuni elementi. Qui propongo un elenco di simmetrie, e di corollari, che possono facilitare i conti a chi è dotato di buon occhio. Diamo ora due definizioni, per meglio chiarire ciò che stiamo per mostrare:

Definizione 15 *Dato un insieme D , esso si dice invariante rispetto ad una simmetria S se per ogni punto $P \in D$, $S(P) \in D$*

Definizione 16 *Dato un insieme D , una funzione $f(x; y)$ definita in D si dice pari rispetto alla simmetria S se $f[S(x; y)] = f(x; y)$; una funzione $f(x; y)$ definita in D si dice dispari rispetto alla simmetria S se $f[S(x; y)] = -f(x; y)$;*

Diamo ora alcuni esempi di simmetrie:

- $S_x : (x; y) \longrightarrow (x; -y)$: Simmetria rispetto asse x
- $S_y : (x; y) \longrightarrow (-x; y)$: Simmetria rispetto asse y
- $S_O : (x; y) \longrightarrow (-x; -y)$: Simmetria rispetto origine O
- $S_{bis1} : (x; y) \longrightarrow (y; x)$: Simmetria rispetto retta $y = x$

- $S_{bis2} : (x; y) \longrightarrow (-y; -x)$: Simmetria rispetto retta $y = -x$

Presentiamo ora alcuni corollari, utili per applicare queste simmetrie appena esposte al calcolo di integrali doppi

1. Dato un dominio di integrazione D , se esso è invariante rispetto ad una simmetria S , ed f è dispari rispetto alla stessa simmetria, allora abbiamo che:

$$\int_D f(x; y) dx dy = 0$$

2. Dato $D \in \mathbb{R}^2$, funzione f pari rispetto a simmetria S , e dati due sottoinsiemi del piano, D_1 e D_2 senza punti in comune, tali che $D = D_1 \cup D_2$, $D_2 = S(D_1)$, allora

$$\int_D f(x; y) dx dy = 2 \int_{D_1} f(x; y) dx dy$$

5.1.5 Cambio di Variabili

Molto spesso, nell'integrazione di funzioni $\mathbb{R} \longrightarrow R$ torna utile fare cambi di variabili, o sostituzioni, per integrare con facilità. E' possibile fare una cosa simile in più variabili, per semplificare lo studio del dominio di integrazione, in caso di particolari situazioni. Nel caso di funzioni $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, bisogna tener conto di alcuni accorgimenti. Come al solito, la trasformazione in coordinate polari sarà del tipo:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Questa e qualsiasi altra trasformazione in funzioni a più variabili però hanno delle proprietà particolari, che vanno rispettate:

- Le trasformazioni del piano cartesiano in polari è racchiusa interamente dalla retta con $\theta = 0$, e a quota 2π . Se da un lato è dunque possibile convertire l'intero piano cartesiano in coordinate polari, non è possibile fare il viceversa: al di sopra di 2π dovremmo rappresentare infinite volte lo stesso piano, e la cosa non ha senso;
- Non è possibile dare una rappresentazione univoca di $P(x; y) = (0; 0)$: infatti per rappresentare questo punto si considera sì $\rho = 0$, ma θ è variabile, e di fatto al variare di θ il cambio di coordinate rappresenterà sempre lo stesso punto.

Generalizziamo ora, a coordinate qualunque: c'è una fondamentale differenza rispetto a ciò che facevamo ad una variabile: un cambio di coordinate, provoca un cambio della misura, provoca di fatto una variazione dello spazio (in questo caso, del piano) studiato. E' necessario quantificare questa variazione e considerarla nel calcolo dell'integrale con nuove variabili. Viene per questo introdotta la matrice Jacobiana, e il relativo determinante Jacobiano (o più semplicemente lo Jacobiano); consideriamo, in una funzione di due variabili, una trasformazione dalle coordinate cartesiane a due coordinate generiche u e v ; avremo così due funzioni nelle variabili appena scritte. Vediamo meglio:

$$\begin{cases} x = x(u; v) \\ y = y(u; v) \end{cases}$$

Introduciamo ora la matrice Jacobiana, sulle cui righe inseriamo i gradienti delle trasformazioni:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Nell'integrale, dovremo considerare il determinante di tale matrice, $\det(J)$; in seguito alla trasformazione, la funzione avrà una forma del tipo:

$$\int_D f(x; y) dx dy = \int_D f[x(u; v); y(u; v)] \cdot \det(J) du dv$$

Per esempio, nella trasformazione in coordinate polari, lo Jacobiano, $\det(J) = \rho$.

5.2 Integrali Tripli

La naturale estensione in funzioni di tre variabili, della forma quindi $f(x; y; z)$, è il cosiddetto integrale triplo; la strategia che utilizzeremo per risolvere integrali di questo genere, sarà ovviamente la stessa che abbiamo applicato in precedenza: ricondurci a problemi semplici, già svolti. I domini di prima erano posti su di un piano, ora saranno posti nello spazio, dovremo dunque integrare su domini nello spazio. Dovremo percorrere superfici o volumi nello spazio.

Iniziamo con un problema basilare: il calcolo dell'integrale di una funzione $f(x; y; z)$ su di un volume a forma di parallelepipedo, ossia un solido nello spazio identificabile come: $[a; b] \times [c; d] \times [l; m]$. L'idea di base per questo tipo di operazione, sarà ricondurci ad un integrale doppio e ad un integrale singolo, per poi svolgere ulteriormente l'integrale doppio in due singoli, in un

secondo momento. Abbiamo due sostanziali filosofie di pensiero, applicabili in diverse situazioni:

- **Integrazione per fili:** dato un volume, disegniamolo, e immaginiamo di poterlo percorrere parte per parte con dei fili, ossia delle rette. L'integrazione per fili consiste nel trovare una certa direzione del filo, tale per la quale, qualsiasi sia il filo passante per il dominio, l'intersezione tra dominio e filo non deve mai essere una spezzata: vi deve in sostanza essere, per ogni filo che si sceglie di prendere, un solo punto di ingresso e un solo punto di uscita. Ciò che di fatto si vuol ottenere con questa tecnica, è l'identificazione di una superficie inferiore e di una superficie superiore di integrazione, ossia di due estremi di integrazione, in due variabili. Algebricamente, si tratta di essere in grado di verificare da che superficie iniziale a che superficie finale varia la variabile del filo, ossia, scelto un filo parallelo ad una certa direzione, (di solito x o y o z), si cerca di trovare la variazione della variabile come compresa tra due superfici, identificate come funzioni nelle altre due variabili che non consideriamo. Una volta integrato dunque nella prima variabile, resterà da calcolare un integrale doppio, su di un dominio in cui ormai la variabile precedentemente scelta non compare più. In parole povere, prima si cerca di integrare in una sola variabile, cercando di trovare una variabile che vari tra due funzioni delle altre due. Poi, si calcola l'integrale doppio per le altre due variabili.
- **Integrazione per strati:** si tratta del procedimento concettualmente opposto: prima di tutto, si cerca di vedere dal grafico del dominio, se, tagliandolo con piani paralleli a uno dei piani fondamentali, ossia xz , xy , o yz , si riesce a trovare sempre un dominio abbastanza regolare. Se è possibile determinare, nelle due variabili del piano scelto, la sezione del volume, allora è possibile integrare per strati. Di fatto si tratta dunque di calcolare un integrale doppio, e quindi un integrale singolo. La possibilità di poter o meno effettuare questo tipo di integrazione, dipende dalla facilità nell'individuare una superficie, tagliando il volume con un certo piano, abbastanza regolare indipendentemente dalla quota del piano di taglio. A questa condizione, l'integrazione per strati risulta essere ottimale.

E' naturale estendere l'esempio di funzione scomponibile come prodotto di due funzioni di due variabili, in tre variabili; l'estensione è del tutto analoga all'esempio precedente, quindi non sarà ripetuto. Trovo però utile proporre estensioni a due argomenti precedentemente trattati nella sezione riguardante

Integrali Doppi: lo studio di particolari simmetrie, questa volta nello spazio, e cambi di variabili nello spazio.

5.2.1 Simmetrie nello spazio

E' banale estendere allo spazio ciò che è stato prima detto per quanto riguarda le simmetrie nel piano. I corollari rimangono totalmente inalterati, a meno che ora si tratta, invece che di \mathbb{R}^2 , di uno spazio vettoriale tridimensionale, dunque di \mathbb{R}^3 . Elenchiamo dunque semplicemente le nuove simmetrie che potrà spesso capitare di studiare:

- $S_{x,y} : (x; y; z) \longrightarrow (x; y; -z) : \text{Simmetria rispetto piano } xy$
- $S_{y,z} : (x; y; z) \longrightarrow (-x; y; z) : \text{Simmetria rispetto piano } yz$
- $S_{z,x} : (x; y; z) \longrightarrow (x; -y; z) : \text{Simmetria rispetto piano } zx$
- $S_O : (x; y; z) \longrightarrow (-x; -y; -z) : \text{Simmetria rispetto origine } O$

5.2.2 Cambiamenti di riferimento in \mathbb{R}^3

Come abbiamo visto nel caso di una funzione di due variabili, ossia con dominio $D \in \mathbb{R}^2$, è possibile applicare dei cambiamenti di riferimento anche per quanto riguarda funzioni con dominio spaziale, ossia con $D \in \mathbb{R}^3$. In questo caso, facendo attenzione alle funzioni, e alla forma del dominio (ma anche spesso semplicemente osservando l'espressione algebrica del dominio), è possibile sfruttare particolari situazioni applicando particolari coordinate, in modo da semplificare notevolmente il problema.

Precedentemente, abbiamo fatto una considerazione: per cambiare riferimento, in funzioni su \mathbb{R}^2 , bisogna considerare, per tener conto della variazione di riferimento, lo Jacobiano, ossia il determinante di una particolare matrice. Nel caso di \mathbb{R}^3 , essa sarà la naturale evoluzione di quella su \mathbb{R}^2 . Rivedendo il capitolo precedente, è facilissimo ricostruire a tre variabili la matrice Jacobiana. Consideriamo ora i due esempi per eccellenza di cambiamenti di riferimento nello spazio vettoriale a tre dimensioni.

5.2.3 Coordinate Cilindriche

Le coordinate cilindriche sono la naturale estensione in tre variabili delle coordinate polari sul piano: la trasformazione sarà del tipo:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

La matrice Jacobiana della funzione, J , e il relativo determinante, saranno:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; |J| = \rho$$

Per poter immaginare meglio cosa facciamo, cerchiamo di vederlo sotto questo punto di vista: immaginiamo di passare in coordinate polari solo la base del solido, in casi particolari, uno su tutti in caso di solido di rotazione, ossia che si può immaginare come superficie rotante attorno ad un asse. La variabile rappresentante la variazione di posizione sull'asse di rotazione, resterà uguale, mentre le altre saranno trattate come un cerchio. Se il solido è di rotazione, infatti, la base del solido sarà circolare. Cerchiamo di essere più chiari: Immaginiamo, nello spazio, di avere un cilindro con asse coincidente con l'asse z ; possiamo pensarlo come un rettangolo poggiante su un asse, lo z nel nostro caso, e vi ruota attorno. La base sarà circolare (essendo un cilindro e ruotando senza variare il proprio raggio), e l'unica cosa che ci interesserà sarà la variazione dell'altezza. Questo tipo di coordinate, va dunque applicato quando si riconosce, in qualche modo, una simmetria cilindrica, ossia un solido di rotazione attorno ad un asse. Si noti che spesso, quando ci sono equazioni contenenti la forma $x^2 + y^2$, si tratta di solidi di rotazione. A tale osservazione però sarebbe ottimale una rappresentazione grafica, che dia l'idea della rotazione attorno ad un asse. Le coordinate cilindriche sono funzioni delle variabili ρ, θ, z . La variabile z ha lo stesso significato delle coordinate cartesiane, θ indica l'angolo di inclinazione rispetto all'asse delle x , e ρ il raggio del cerchio che si studia.

Terrei, per meglio far comprendere tali coordinate al lettore, cosa capita variando due variabili per volta, e mantenendone una costante. Studiare questo comportamento può aiutare molto per meglio comprendere queste coordinate, e poi applicarle.

- Mantenendo ρ costante, e variando z e θ , avremo un cilindro, di raggio di base ρ : la retta sul piano xy varierà di pendenza, e quindi il piano sopra si muoverà formando un cilindro di raggio costante.
- Mantenendo z costante, e muovendo ρ e θ , avremo un piano: per essere più precisi, questo sarà parallelo al piano xy , ma di quota z , fissato a priori.

- Mantenendo θ costante, e muovendo ρ e θ , avremo il semipiano incernierato all'asse z .

5.2.4 Teorema di Guldino

Nel 1500 il matematico olandese Guldino, finalizzò tale teorema; cerchiamo di arrivarci in modo intuitivo!

Volendo calcolare l'integrale triplo del solido di rotazione V , faremo:

$$\int_V dx dy dz \xrightarrow{\text{Polar}} \int_{V'} \rho \cdot d\rho d\theta dz$$

Scegliamo di risolvere tale integrale per strati, facendo prima variare ρ e z , e solo in seguito l'angolo θ .

$$\int_0^{2\pi} \left(\int \int_S \rho \cdot d\rho dz \right) d\theta$$

S in questo caso rappresenta la sezione del nostro solido. Dal momento che il solido è di rotazione, indipendentemente da θ , le sezioni saranno sempre uguali. Scegliamo, per facilità, di prendere la sezione sul piano yz . Sfruttando la scomposizione di funzioni in prodotto di funzioni di diverse variabili, poichè $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$, possiamo dire che

$$\int_0^{2\pi} \int \int_S \rho \cdot d\rho dz d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_S \rho d\rho dz = 2\pi \int \int y dy dz$$

Scegliamo di moltiplicare e dividere per

$$\int \int_S dy dz$$

Il teorema di Guldino afferma che il volume del solido di rotazione equivale a: data la superficie S ,

$$V = 2\pi \frac{\int_S y dy dz}{\int_S dy dz} \cdot \int dy dz$$

Il volume di V dunque equivale a 2π moltiplicato per la posizione delle ordinate y del baricentro, per l'area della superficie tagliata dal piano scelto.

Questo teorema non è fondamentale: può facilitare alcuni calcoli, ma mediante integrazioni per fili, per strati, o in cilindriche, si possono ottenere gli stessi risultati.

5.2.5 Coordinate polari sferiche

Consideriamo ora un'ulteriore tipo di cambio di coordinate nello spazio: le coordinate polari sferiche. Se, studiando un dominio, ci rendiamo conto di aver a che fare con una simmetria sferica, allora possiamo applicare un altro tipo di coordinate. Consideriamo il seguente disegno:

In questo caso, il nostro ρ è la distanza di un punto P dall'origine; abbiamo, in questo caso, due coordinate angolari: φ e θ . Il primo, φ , è l'angolo che la proiezione del punto P sul piano xy forma con l'asse x . L'angolo θ invece è quello che il segmento che unisce P e O forma con l'asse z . La trasformazione che in questo ambito studieremo, sarà del tipo:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

Si dimostra che lo Jacobiano della funzione è: $|J| = \rho^2 \cdot (\sin \theta)^2$

Consideriamo, però, che ρ varia da 0 a $+\infty$; ϕ varia da 0 a 2π ; θ varia da 0 a π .

Vediamo, al variare delle tre variabili, cosa otteniamo.

- Con ρ costante, e θ e φ variabili, otteniamo una sfera di raggio ρ .
- Con φ costante, otteniamo un semipiano; infatti, poichè θ varia solo da 0 a π , si può solo ottenere metà piano.
- Con θ costante, otteniamo un piano.