

Linee multiconduttore

Alberto Tibaldi

3 luglio 2011

1 Modello circuitale delle linee multiconduttore

Nell'ambito dell'elettromagnetismo può capitare in diverse occasioni di avere diverse linee di trasmissione che "parlano" tra loro: pur non avendo alcun tipo di collegamento fisico tra le due linee, se due linee sono per esempio vicine, esse sono comunque accoppiate: il segnale introdotto in una linea va a eccitare anche l'altra. L'obiettivo di questa trattazione è quello di partire da un modello generale delle linee multiconduttore (anche talvolta dette multifilari), introdotto a partire da alcune idee intuitive, per poi ricavarne un altro a partire da esso, più facile da gestire.

1.1 Introduzione al modello circuitale

Come noto, una tradizionale linea di trasmissione è indicato in Figura 1.

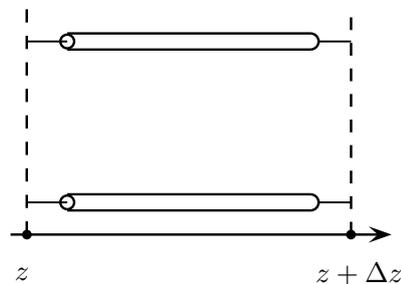


Figura 1: Rappresentazione di un tratto di linea di trasmissione lungo Δz

Questa è la maniera con cui usualmente, nell'ambito dei campi elettromagnetici, si indica una linea di trasmissione; i segmenti in uscita dai "tubi" sono corto circuiti, ossia semplici terminali simbolici di contatto, che non modificano in alcun modo tensione e corrente totale della linea. Supponendo che Δz sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda del segnale, per ipotesi monocromatico, che scorre sulla linea, si può supporre che la linea sia modellabile mediante i circuiti indicati in Figura 2:

dove

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathcal{R} + j\omega\mathcal{L}, \\ \mathcal{Y} &= \mathcal{G} + j\omega\mathcal{C} \end{aligned} \tag{1}$$

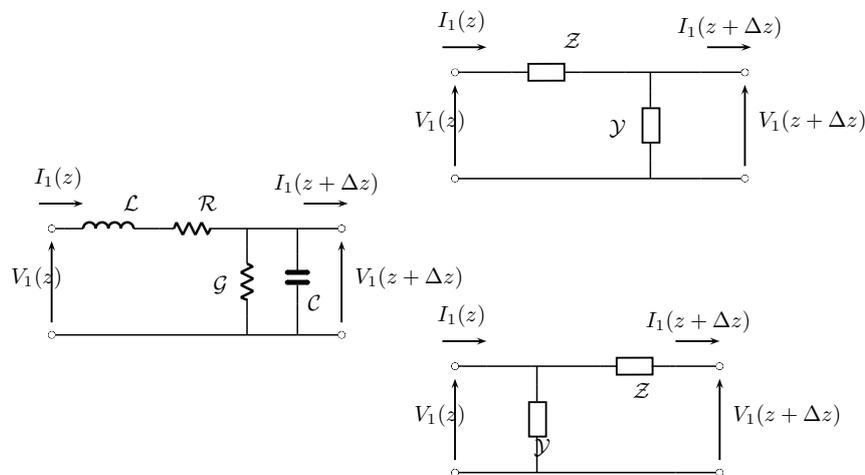


Figura 2: Modelli circuitali a parametri concentrati per una linea di trasmissione

questi sono due circuiti equivalenti di un singolo tratto di linea di trasmissione lungo Δz , le cui equazioni sono direttamente espresse nel dominio dei fasori; come si può vedere, in questo modello, la dipendenza dalla coordinata spaziale z è semplicemente presente in ciascuna porta: il modello è a tutti gli effetti a parametri concentrati, ma si tiene conto della variazione di posizione lungo z semplicemente nelle porte di ingresso/uscita del circuito. Come si indica usualmente¹, quando si indicano con lettere in formato “calligrafico”² grandezze, in questo ambito, esse sono grandezze p.u.l., ossia “per unità di lunghezza”: al fine di avere per esempio l’impedenza totale, sarà necessario moltiplicare Z per la distanza su cui si estende la linea (in questo caso, Δz):

$$Z = \mathcal{Z} \Delta z$$

Il circuito da cui si parte, dunque, è un circuito a parametri concentrati; a partire da questo, dunque, l’obiettivo è trovare un modello in grado di determinare il comportamento per esempio di due linee descritte in questo modo, una accoppiata all’altra. Dal momento che il modello utilizzato è un classico circuito a parametri concentrati, al fine di accoppiare due circuiti uguali, a parametri concentrati, è possibile usare due tipi di componenti: mutue induttanze o capacità. Questo tipo di discorso in realtà è già proiettato sulla fisica del sistema (che non verrà descritta in questa trattazione): come già accennato l’accoppiamento tra due linee può avvenire per esempio dal momento che esse sono molto vicine (come il doppino telefonico: sono due linee molto vicine tra loro), dunque per accoppiamento elettromagnetico; l’accoppiamento elettromagnetico può avvenire o per il campo elettrico, o per il campo magnetico:

¹quantomeno, nell’ambito del Politecnico di Torino

²una nota riguardo ciò: solitamente il calligrafico si utilizza per indicare degli operatori, non espressi in nessuna base particolare; in questo caso non si ha assolutamente a che fare con qualcosa del genere, dal momento che in questo caso si parla di applicazioni lineari definite in una base ben precisa: quella delle tensioni e delle correnti; questa è una rappresentazione in una base ben definita dello stato elettrico dei sistemi in considerazione

questi fenomeni sono considerabili, utilizzando elementi di tipo capacitivo e induttivo (tensioni indotte dalla presenza di un campo elettrico o correnti indotte dalla concatenazione di linee di campo magnetico). Al fine di ricordare il modello circuitale degli induttori accoppiati, si ricordi che le sue equazioni sono, nel dominio dei fasori:

$$\begin{cases} V_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2 \\ V_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2 \end{cases} \quad (2)$$

dove, nel nostro caso, $L_{11} = L_{22} = 0$ (dal momento che gli elementi non introducono induttanze o impedenze proprie, ma solo mutue), e $L_{12} = L_{21} = Z_m$. Le varie grandezze verranno poi rappresentate, in generale, per unità di lunghezza.

Quello che si ottiene dunque, a partire da due circuiti distinti accoppiati, è rappresentato in Figura 3.

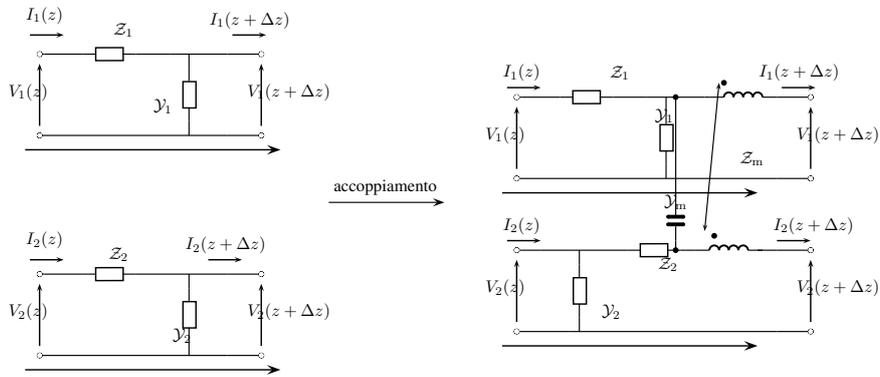


Figura 3: Modelli circuitali a parametri concentrati per una coppia di linee di trasmissione, accoppiate tra loro

Questo è un primo modello circuitale in grado di descrivere la fenomenologia: a partire dai due circuiti distinti, introducendo gli accorgimenti secondo il ragionamento prima fatto, si ottiene un unico circuito in cui, considerando le porte di ingresso 1 e 2 dei due circuiti inizialmente separati, si hanno anche dei termini di accoppiamento (come si dimostrerà tra breve). A questo punto, sono presenti due parametri supplementari rispetto alla situazione "senza accoppiamento": Z_{12} e Y_{12} : essi sono rispettivamente la mutua induttanza tra le induttanze accoppiate, e la capacità di collegamento tra le due linee. Si noti che l'accoppiamento elettromagnetico solitamente avviene "in aria" o comunque non attraverso mezzi in alcun modo magnetici o attivi (il campo elettromagnetico tra le due linee usualmente non passa per una ferrite o su di un amplificatore: i fili sono immersi nell'aria o in un qualche dielettrico), dunque si può dire che il parametro di accoppiamento dal circuito 2 al circuito 1 sia uguale a quello dal circuito 1 al circuito 2: $Z_{12} = Z_{21} \triangleq Z_m$, $Y_{12} = Y_{21} = Y_m$, dove il pedice "m" indica il fatto che sono parametri "mutui" tra i due circuiti.

1.2 Analisi del modello circuitale: caso con 2 linee

Come si fa usualmente nell'ambito delle linee di trasmissioni non accoppiate, si vuole a questo punto effettuare l'analisi che ci permetterà di trovare le equazioni delle linee di trasmissione, che in questo caso però terranno conto della presenza di accoppiamenti. L'esempio di calcolo verrà fatto sulla situazione precedentemente presentata: quella di due linee, di cui si scriveranno le equazioni ai nodi e alle maglie. Ovviamente, il caso generale non aggiunge nulla rispetto a ciò.

1.2.1 Equazioni ai nodi

Si parta dalle equazioni ai nodi (ovviamente, essendo equazioni di Kirchhoff, esse valgono sulle grandezze totali, non su quelle p.u.l.).

$$\begin{cases} I_1(z) = I_1(z + \Delta z) + \mathcal{Y}_m(V_1 - V_2)\Delta z + I_x \\ I_2(z) = I_2(z + \Delta z) + \mathcal{Y}_m(V_2 - V_1)\Delta z + I_y \end{cases} \quad (3)$$

Si consideri a questo punto l'equazione alla maglia passante per il parametro "non mutuo", rappresentata in Figura 4.

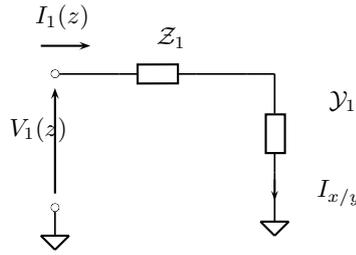


Figura 4: Disegno della maglia di cui si calcola l'equazione

in questa, si ha:

$$\begin{cases} V_1(z) = I_x (\mathcal{Y}_1 \Delta z)^{-1} + \mathcal{Z}_1 I_1(z) \Delta z \\ V_2(z) = I_y (\mathcal{Y}_2 \Delta z)^{-1} + \mathcal{Z}_2 I_2(z) \Delta z \end{cases}$$

che, invertite, permettono di ricavare I_x e I_y :

$$\begin{cases} I_x = V_1(z) \mathcal{Y}_1 \Delta z - \mathcal{Z}_1 \Delta z I_1(z) \mathcal{Y}_1 \Delta z \\ I_y = V_2(z) \mathcal{Y}_2 \Delta z - \mathcal{Z}_2 \Delta z I_2(z) \mathcal{Y}_2 \Delta z \end{cases} \quad (4)$$

A questo punto, sostituendo le espressioni di (4) in (3), si ottiene:

$$\begin{cases} I_1(z) = I_1(z + \Delta z) + \mathcal{Y}_m(V_1 - V_2)\Delta z + V_1(z) \mathcal{Y}_1 \Delta z - I_1(z) (\Delta z)^2 \mathcal{Z}_1 \mathcal{Y}_1 \\ I_2(z) = I_2(z + \Delta z) + \mathcal{Y}_m(V_2 - V_1)\Delta z + V_2(z) \mathcal{Y}_2 \Delta z - I_2(z) (\Delta z)^2 \mathcal{Z}_2 \mathcal{Y}_2 \end{cases}$$

A questo punto si utilizza lo stesso trucco utilizzato nell'ambito delle linee di trasmissione: si porta a membro sinistro il termine $I_1(z + \Delta z)$ (e idem per

la seconda equazione con I_2), quindi si fa in modo da ottenere un'espressione nella forma:

$$\begin{aligned} -\frac{I_1(z + \Delta z) - I_1(z)}{\Delta z} &= \mathcal{Y}_m(V_1 - V_2) + V_1(z)\mathcal{Y}_1 - I_1(z)(\Delta z)\mathcal{Z}_1\mathcal{Y}_1 \\ -\frac{I_2(z + \Delta z) - I_2(z)}{\Delta z} &= \mathcal{Y}_m(V_2 - V_1) + V_2(z)\mathcal{Y}_2 - I_2(z)(\Delta z)\mathcal{Z}_2\mathcal{Y}_2 \end{aligned}$$

si consideri a questo punto il limite per $\Delta z \rightarrow 0$ di ciascuna di queste espressioni:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(-\frac{I_1(z + \Delta z) - I_1(z)}{\Delta z} \right) = \frac{dI_1(z)}{dz} = \mathcal{Y}_m(V_1(z) - V_2(z)) + V_1(z)\mathcal{Y}_1$$

Il termine che precedentemente era dipendente da $(\Delta z)^2$ viene annullato, dal momento che è un infinitesimo di ordine superiore: in questo caso si è fatta una derivazione, dunque sostanzialmente un'approssimazione dell'espressione a $\mathcal{O}(\Delta z)$, ignorando infinitesimi di ordine superiore³. V_1 e V_2 , che prima non erano stati specificati, possono essere confusi con $V_1(z)$ e $V_2(z)$, dal momento che ora non si distinguono più le tensioni alle due porte: se $\Delta z \rightarrow 0$, si passa dal mondo dei circuiti a parametri concentrati a quello dei circuiti a parametri distribuiti, riconoscendo il fatto che ciascuna sezione z di una linea di trasmissione è un circuito a parametri concentrati, di cui è possibile determinare tensioni e correnti. Si è dunque ottenuto il seguente sistema:

$$\begin{cases} -\frac{dI_1(z)}{dz} = \mathcal{Y}_m(V_1(z) - V_2(z)) + V_1(z)\mathcal{Y}_1 \\ -\frac{dI_2(z)}{dz} = \mathcal{Y}_m(V_2(z) - V_1(z)) + V_2(z)\mathcal{Y}_2 \end{cases} \quad (5)$$

1.2.2 Equazioni alle maglie

È possibile scrivere a questo punto le equazioni alle maglie:

$$\begin{cases} V_1(z) = I_1(z)\mathcal{Z}_1\Delta z + \mathcal{Z}_m I_2(z + \Delta z) + V_1(z + \Delta z) \\ V_2(z) = I_2(z)\mathcal{Z}_2\Delta z + \mathcal{Z}_m I_1(z + \Delta z) + V_2(z + \Delta z) \end{cases} \quad (6)$$

A questo punto, è possibile riscrivere in questo modo ciò:

$$\begin{cases} -\frac{V_1(z + \Delta z) - V_1(z)}{\Delta z} = \mathcal{Z}_1 I_1(z) + \mathcal{Z}_m I_2(z + \Delta z) \\ -\frac{V_2(z + \Delta z) - V_2(z)}{\Delta z} = \mathcal{Z}_2 I_2(z) + \mathcal{Z}_m I_1(z + \Delta z) \end{cases}$$

facendo il limite per $\Delta z \rightarrow 0$, si ottiene:

$$\begin{cases} -\frac{dV_1(z)}{dz} = \mathcal{Z}_1 I_1(z) + \mathcal{Z}_m I_2(z) \\ -\frac{dV_2(z)}{dz} = \mathcal{Z}_2 I_2(z) + \mathcal{Z}_m I_1(z) \end{cases} \quad (7)$$

³ossia, si sta sostanzialmente considerando il solo sviluppo di Taylor troncato al termine lineare

1.2.3 Nota su un circuito alternativo per il modello

Quello finora presentato è il modello circuitale rappresentato in Figura 5.

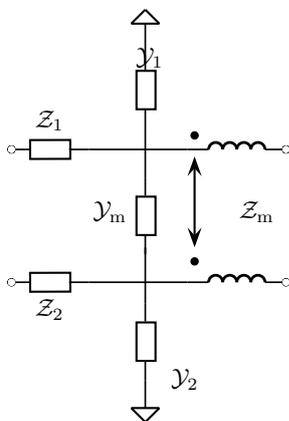


Figura 5: Modello circuitale utilizzato per l'analisi

Questa non è l'unica possibilità: è infatti possibile avere accoppiamento elettromagnetico in un circuito come quello in Figura 6

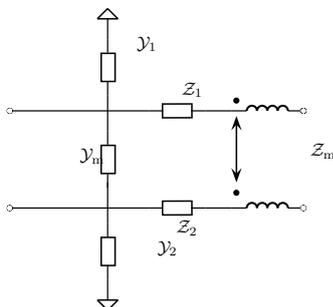


Figura 6: Modello circuitale alternativo, che può essere analizzato

Non si vuole analizzare il secondo circuito, poiché sostanzialmente nei risultati finali non porta informazioni aggiuntive utili al problema. Quello che si vuol far notare, tuttavia, è che essi non sono esattamente identici: le equazioni alle maglie sono assolutamente le stesse, ma quelle ai nodi no: per $\mathcal{O}((\Delta z)^2)$ infatti le due sono diverse. Dal momento che quelli che si considerano tuttavia sono solo gli sviluppi di Taylor troncati al primo ordine, questa differenza è del tutto ininfluyente.

1.3 Equazioni delle linee accoppiate in forma matriciale

È stata condotta un'analisi su di un sistema composto da due linee di trasmissione tra loro accoppiate. A questo punto è opportuno esprimere in maniera differente il sistema appena trovato, in modo da poterlo estendere con naturalezza al caso di N linee tra loro accoppiate.

Il formalismo che si intende applicare è basato sulla seguente supposizione: definire vettori di tensioni e correnti (in forma fasoriale) in cui si abbia su ciascuna riga la tensione/corrente alla i -esima porta, ossia sulla i -esima linea. Nel caso di $N = 2$, dunque, si avrà:

$$\underline{V}(z) = \begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \end{bmatrix} \quad \underline{I}(z) = \begin{bmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \end{bmatrix}$$

ovviamente, la cosa è estensibile naturalmente al caso di N linee, semplicemente avendo N righe in ciascun vettore. Il fatto di introdurre questa notazione, permette di prendere i sistemi (5) e (7) e di esprimerli mediante un singolo sistema⁴:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz} \underline{V}(z) = \underline{\underline{Z}} \underline{I}(z) \\ -\frac{d}{dz} \underline{I}(z) = \underline{\underline{Y}} \underline{V}(z) \end{cases} \quad (8)$$

dove

$$\underline{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_m \\ Z_m & Z_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\underline{\underline{Y}} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_m & -Y_m \\ Y_m & Y_2 + Y_m \end{bmatrix} \quad (10)$$

Si osservi che le (8) sono equazioni **vettoriali**, dal momento che si ha a che fare con un sistema di due equazioni per l'appunto vettoriali. Come nel caso delle equazioni dei telegrafisti che si possono ricavare analizzando una singola linea di trasmissione, si può vedere che le due sono un sistema, essendo accoppiate tra loro: esse sono una sorta di generalizzazione delle equazioni dei telegrafisti scalari. La generalizzazione sta nel fatto che, a causa del fatto che $\underline{\underline{Z}}$ e $\underline{\underline{Y}}$ sono in generale matrici piene, si ha accoppiamento tra le varie linee: lo stato elettrico di una linea (tensione o corrente) influenza lo stato elettrico anche delle altre; interessante è tuttavia il fatto che, come si farà notare anche in seguito, generalmente $\underline{\underline{Z}}$ e $\underline{\underline{Y}}$ è indipendente dalla sezione z considerata: in ciascuna sezione l'accoppiamento avviene alla stessa maniera, essendo le matrici non funzione dello spazio.

1.3.1 Generalizzazione

Questa cosa può essere ovviamente generalizzata con estrema semplicità: nel caso generale a N linee, si ha sempre a che fare con l'equazione (8), dove però:

- $\underline{V}, \underline{I}$ sono vettori di dimensione N :

$$\underline{V}(z) = \begin{bmatrix} V_1(z) \\ V_2(z) \\ V_3(z) \\ \vdots \\ V_N(z) \end{bmatrix} \quad \underline{I}(z) = \begin{bmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \\ I_3(z) \\ \vdots \\ I_N(z) \end{bmatrix}$$

⁴è sufficiente prendere i suddetti sistemi di equazioni e raccogliere $V_1(z), V_2(z), I_1(z), I_2(z)$ e raggruppare in matrici

- $\underline{\underline{Z}}, \underline{\underline{Y}}$ sono matrici $N \times N$, dove gli elementi sulla diagonale principale sono le impedenze/ammettenze relative alle singole linee, ossia i parametri delle linee nel caso non ci fossero accoppiamenti, mentre gli elementi fuori dalla diagonale principale sono i termini che quantificano l'accoppiamento tra le varie linee: Z_{12} per esempio indica:

$$Z_{34} = \frac{V_3}{I_4}$$

Si ha a che fare, finora, con matrici generalmente piene: non c'è ragione di credere che le varie matrici con cui si ha a che fare siano diagonali (a meno che le linee non siano molto distanti tra loro, in modo che l'accoppiamento elettromagnetico sia molto ridotto); questo è vero dal momento che, finora, si ha a che fare con grandezze osservabili: tutto ciò che si sta utilizzando fino a questo punto è collegato a un forte significato fisico, dal momento che, se si misurassero alle porte le grandezze di cui si sta parlando, si troverebbe un riscontro immediato con la teoria.

Una nota conclusiva: in questa trattazione si stanno considerando come note le matrici; esse contengono i vari parametri delle linee. Si può, per esempio, supporre che i vari parametri propri (quelli della diagonale) e mutui (quelli fuori dalla diagonale) siano ricavabili a partire dall'analisi del problema quasi-statico, o mediante una qualche simulazione elettromagnetica del comportamento fisico del sistema.

1.4 Equazioni d'onda

Nel sistema (8) si è arrivati a determinare qualcosa che ricorda le equazioni "scalari" delle linee di trasmissione; ciò è stato fatto al fine da poter aver a che fare con qualcosa di familiare rispetto a quanto già noto dalla teoria delle linee di trasmissione. Al fine di continuare su questa strada, dunque, è possibile ricavare, in maniera analoga a quanto fatto nell'ambito delle equazioni dei telegrafisti: partendo dalla prima equazione di (8), ricavando la corrente, si ha:

$$I(z) = \underline{\underline{Z}}^{-1} \frac{d}{dz} V(z)$$

dove si suppone $\underline{\underline{Z}}$ costante rispetto a z (come già anticipato), e invertibile; sostituendo nella seconda equazione, si ottiene:

$$-\frac{d}{dz} I(z) = -\frac{d}{dz} \left\{ \underline{\underline{Z}}^{-1} \left(-\frac{d}{dz} V(z) \right) \right\} = \underline{\underline{Y}} V(z)$$

a questo punto, premoltiplicando per $\underline{\underline{Z}}$ ambo i membri, si ottiene:

$$\frac{d^2}{dz^2} V(z) - \underline{\underline{Z}} \underline{\underline{Y}} V(z) = 0 \quad (11)$$

Procedendo nella stessa maniera ma ricavando la tensione dalla seconda delle (8), sostituendo nella prima, si ottiene:

$$\frac{d^2}{dz^2} I(z) - \underline{\underline{Y}} \underline{\underline{Z}} I(z) = 0 \quad (12)$$

Una particolarità: le due equazioni d'onda sono diverse tra loro, in generale, dal momento che non sono state (ancora) introdotte ipotesi che ci dicano che le due matrici commutino (ossia che il prodotto $\underline{\underline{Z}}\underline{\underline{Y}}$ sia uguale a $\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{Z}}$). In realtà, c'è ancora una carta da giocare: i "mezzi di accoppiamento" sono reciproci, come già sfruttato per dire che $\underline{\underline{Z}}_{12} = \underline{\underline{Z}}_{21}$ eccetera. Essendovi dunque la reciprocità, visto come sono state definite le matrici, valgono le seguenti relazioni (riprendendo le espressioni (9) e (10))

$$\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}}^T \quad \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{Y}}^T$$

Questo risultato è molto interessante: esso infatti può essere applicato per dimostrare che:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Z}}\underline{\underline{Y}} &= (\underline{\underline{Y}}^T \underline{\underline{Z}}^T)^T \\ &= (\underline{\underline{Y}}\underline{\underline{Z}})^T \end{aligned} \quad (13)$$

L'equazione (13) è fondamentale per raggiungere molti dei risultati che si vorranno ottenere nel seguito della trattazione.

2 Soluzione del problema nella base modale

Fino ad ora sono stati ottenuti due risultati importanti: le *equazioni dei telegrafisti generalizzate*, e le relative *equazioni d'onda*. Nelle osservazioni finali si è fatto cenno al fatto che, fino ad ora, il sistema è stato espresso nella base delle tensioni e delle correnti *fisiche* del sistema: siamo nella cosiddetta **base naturale** in cui si rappresenta il comportamento del sistema. Questa ha sostanzialmente un pregio, ma anche un enorme difetto:

- il pregio della base naturale è il fatto che essa è quella strettamente collegata alla fisica del sistema, al mondo fisico, dunque tutto ciò che viene presentato in questa base è ciò che si può **osservare**, **misurare**, in seguito alla determinazione di un banco di misure appropriato;
- il difetto della base naturale è il fatto che è difficile da usare: il problema, da risolvere, è estremamente complicato, dal momento che ogni volta che nell'ipotetico banco di misura che si è allestito si introduce un'eccitazione a una porta, si hanno eccitazioni multiple in ogni porta; quando dunque il sistema va studiato nell'ambito di situazioni realistiche di funzionamento, determinare le caratteristiche della linea direttamente nella base naturale è assolutamente complicato.

L'ideale, per la soluzione di un problema coinvolgente un sistema di N equazioni, è quello di avere N equazioni tra loro disaccoppiate: un sistema diagonale. Ricordando la teoria dell'algebra lineare, si può dunque capire immediatamente che la base in cui un sistema viene trasformato in un sistema diagonale, è la **base degli autovettori**: effettuando un cambio di base dalla base naturale alla base degli autovettori, ossia alla base che noi chiameremo

base modale, il sistema attualmente sparso diventerà un sistema diagonale, semplice da risolvere (come si spiegherà meglio in seguito).

L'idea, dunque, è quella di introdurre il seguente cambio di base:

$$\begin{cases} \underline{V}(z) = \sum_{i=1}^N V_i^m(z) \underline{u}_{V_i} \\ \underline{I}(z) = \sum_{i=1}^N I_i^m(z) \underline{u}_{I_i} \end{cases} \quad (14)$$

Il sistema (14) esprime il fatto che le tensioni totali, della base naturale, $\underline{V}(z)$ e $\underline{I}(z)$ devono essere espresse in termini di una combinazione lineare di N vettori, linearmente indipendenti e indipendenti dalla sezione z , moltiplicati per una certa funzione di z (una per le tensioni, una per le correnti).

2.1 Applicazione alle equazioni dei telegrafisti generalizzate

Una volta definita la base (14), la si applichi a (8), nella fattispecie alla prima:

$$-\frac{d}{dz} \underline{V}(z) = \underline{\mathcal{Z}} \underline{I}(z)$$

sostituendo:

$$-\frac{d}{dz} \sum_{i=1}^N V_i^m(z) \underline{u}_{V_i} = \underline{\mathcal{Z}} \sum_{i=1}^N I_i^m(z) \underline{u}_{I_i} \quad (15)$$

Precedentemente è stato accennato l'obiettivo della rappresentazione nella base modale: trovare una base tale per cui il sistema sia diagonale. Di quale sistema si è parlato? Finora lo stato elettrico è stato espresso in termini di tensioni e correnti totali; supponendo per ora di voler proseguire sulla strada della rappresentazione in tensioni e correnti, la base modale è quella base tale per cui la tensione modale relativa alla i -esima linea è **funzione della sola corrente modale alla i -esima linea**: la base modale è quella base tale per cui le tensioni/correnti (che in questo caso non saranno più osservabili) delle varie linee sono tra loro disaccoppiate. In altre parole, in questa base, invece di risolvere una sola linea di trasmissione in cui si hanno accoppiamenti, se ne risolvono N semplici, disaccoppiate tra loro.

In altre parole, quando si applica $\underline{\mathcal{Z}}$ a un vettore \underline{u}_{I_i} , la matrice deve produrre in uscita \underline{u}_{V_i} , a meno di una costante, mentre per $j \neq i$ non si avranno altri contributi di vettori di tensione: **questa** è la condizione che si richiede alla base. In altre parole, si richiede che:

$$\underline{\mathcal{Z}} \underline{u}_{I_i} = \zeta_i \underline{u}_{V_i} \quad (16)$$

dove ζ_i è una generica costante. Questo ricorda la definizione di problema agli autovalori, ma non è esattamente così: in questo caso il vettore di corrente e il vettore di tensione sono due vettori diversi: ciò che si sta richiedendo non è, come usualmente fatto in algebra lineare, il fatto che applicando una matrice a un vettore si ottenga un vettore sulla stessa direzione (un **autovettore**), bensì si sta imponendo il fatto che applicando la matrice a un vettore, il vettore risultante sia parallelo a un **altro** vettore, che ora come ora non presenta particolari legami con quello di partenza.

sostituendo (16) dentro la (15), si ottiene:

$$-\sum_{i=1}^N \underline{u}_{V_i} \frac{d}{dz} V_i^m(z) = \sum_{j=1}^N \zeta_j \underline{u}_{V_j} I_j^m(z)$$

Si è detto che la successione $\{\underline{u}_{V_i}\}$ deve costituire una **base**: vettori linearmente indipendenti che generano un certo spazio. Questo impone che per $i \neq j$, l'eguaglianza non è verificabile se non per vettori nulli: nel caso $i \neq j$, infatti, i vettori non sono tra loro paralleli, dunque l'eguaglianza non potrà sicuramente essere verificata. Si scartano dunque a questo caso tutti i valori per $i \neq j$, e si riscrive l'equazione precedente con gli stessi indici (essendo le uniche soluzioni esistenti quelle per $i = j$):

$$-\sum_{i=1}^N \underline{u}_{V_i} \frac{d}{dz} V_i^m(z) = \sum_{i=1}^N \zeta_i \underline{u}_{V_i} I_i^m(z)$$

a questo punto è lecito raccogliere i termini, ottenendo la seguente equazione

$$\sum_{i=1}^N \underline{u}_{V_i} \left\{ -\frac{d}{dz} V_i^m(z) - \zeta_i I_i^m(z) \right\} = 0 \quad (17)$$

A partire da questa equazione, finalmente, è possibile imporre il fatto che la successione $\{\underline{u}_{V_i}\}$ costituisca una base: come noto dalla teoria dell'algebra lineare, una successione di vettori è una base se e solo se vale la relazione:

$$\sum_{i=1}^N c_i \underline{u}_{V_i} = 0$$

ossia, se l'unico modo per annullare una generica combinazione lineare degli elementi della base sia quello di avere tutti i coefficienti nulli. Se infatti l'unico modo per annullare la generica combinazione lineare è questo, significa che i vettori sono per imposizione tra loro indipendenti, quindi le equazioni dipendenti dai suddetti vettori tra loro disaccoppiate: ciascun vettore non può sommarsi con gli altri fino ad annullarsi. Dal momento che nell'equazione (17) il coefficiente è quello nella parentesi graffa, la condizione per cui la successione sia una base, è:

$$-\frac{d}{dz} V_i^m(z) - \zeta_i I_i^m(z) = 0$$

Allo stesso modo, si può lavorare sulla seconda equazione delle (8), imporre una condizione del tipo:

$$\underline{y} \underline{u}_{V_i} = y_i \underline{u}_{I_i} \quad (18)$$

e ottenere una condizione equivalente. Le due condizioni sono così riassunte:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz} V_i^m(z) = \zeta_i I_i^m(z) \\ -\frac{d}{dz} I_i^m(z) = y_i V_i^m(z) \end{cases} \quad (19)$$

Le (19), ricavate come imposizione di una proprietà matematica dei vettori in questione, in realtà sono anche le equazioni che descrivono l'evoluzione delle correnti e tensioni modali su ciascuna i -esima linea: di fatto, si tratta di N equazioni dei telegrafisti, tra loro disaccoppiate, dal momento che in ciascuna equazione appare solo dipendenza dall'indice i e non da altri indici.

2.1.1 Osservazioni aggiuntive sull'evoluzione delle tensioni/correnti modali

Si vuole a questo punto ricollegare il problema appena analizzato a un vero e proprio problema agli autovalori: un problema in cui, applicata una matrice a un vettore, si ottiene in uscita un vettore parallelo a quello di partenza. Le due condizioni (16) e (18) possono essere ricondotte ad altre due condizioni, che in questo caso rappresentano un effettivo problema agli autovalori. Ricavando \underline{u}_{V_i} dalla (16) e sostituendola in (18) si ottiene:

$$\underline{\mathcal{Y}} \underline{\mathcal{Z}} \underline{u}_{I_i} = \lambda_i \underline{u}_{I_i} \quad (20)$$

dove

$$\lambda_i \triangleq \zeta_i y_i \quad (21)$$

Alla stessa maniera è possibile ricavare, ricavando \underline{u}_{I_i} dalla (18) e sostituendo in (16):

$$\underline{\mathcal{Z}} \underline{\mathcal{Y}} \underline{u}_{V_i} = \lambda_i \underline{u}_{V_i} \quad (22)$$

dove i λ_i sono sempre gli stessi di prima.

Ciò è molto interessante, dal momento che introduce un legame tra i vettori di base della tensione e della corrente: dalla (22) appare evidente che i \underline{u}_{V_i} sono infatti gli autovettori della matrice $\underline{\mathcal{Z}} \underline{\mathcal{Y}}$, e che i \underline{u}_{I_i} sono gli autovettori della matrice $\underline{\mathcal{Y}} \underline{\mathcal{Z}}$; tra le due matrici tuttavia, come noto dalla (13), esiste un legame: una matrice è la trasposta dell'altra; questo giustifica immediatamente il fatto che gli autovalori siano gli stessi, dal momento che gli autovalori di una matrice e della sua trasposta sono coincidenti.

2.2 Applicazione alle equazioni d'onda

2.2.1 Caso della equazione d'onda di tensione

Si vuole a questo punto applicare il formalismo della base modale sulle equazioni d'onda precedentemente ricavate a partire dalle equazioni dei telegrafisti generalizzate. Il procedimento dunque è quello di sostituire le (14) nelle (11) e (12).

Applicando il ragionamento nell'equazione d'onda di tensione, si ottiene (raggruppando direttamente tutto sotto il segno di sommatoria):

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{d^2}{dz^2} V_i^m(z) \underline{u}_{V_i} - \underline{\mathcal{Z}} \underline{\mathcal{Y}} V_i^m(z) \underline{u}_{V_i} \right] = 0 \quad (23)$$

Dal momento che la base in cui si sceglie di andare è quella tale per cui il sistema risultante sia diagonale, si può dire che vale il problema agli autovettori definito dalla (22); questo permette dunque di “sostituire” alla complicata matrice $\underline{\underline{Z}}\underline{\underline{Y}}$ semplicemente l’equivalente scalare, semplificando notevolmente il problema (la matrice infatti opera sul vettore esattamente come una moltiplicazione per un certo scalare: l’autovalore relativo all’autovettore); effettuando ciò, si ottiene:

$$\sum_{i=1}^N \left[\frac{d^2}{dz^2} V_i^m(z) \underline{u}_{V_i} - \lambda_i V_i^m(z) \underline{u}_{V_i} \right] = 0 \quad (24)$$

In questo caso, si applica la stessa idea applicata precedentemente: questa è perfettamente riconducibile alla definizione di vettori linearmente indipendenti; se dunque si richiede che siano i **coefficienti** ad annullarsi e non i vettori, si ottiene:

$$\frac{d^2}{dz^2} V_i^m(z) - \lambda_i V_i^m(z) = 0 \quad (25)$$

Si noti che questa espressione è anche ricavabile dalle (19), applicando il solito procedimento: si tratta di due metodi identici, a tutti gli effetti, per imporre la diagonalizzazione. (25) permette di avere N equazioni del secondo ordine, tra loro disaccoppiate: N equazioni, ciascuna relativa a una linea di trasmissione indipendente dalle altre.

2.2.2 Cenni al caso della equazione d’onda di corrente

Lo stesso risultato si può ancora una volta ottenere, partendo dalla (12), imponendo la validità del problema agli autovalori (20), quindi utilizzando la condizione (13).

2.3 Proprietà della base modale

In qualsiasi modo sia stata ricavata la base modale, si è giunti a un’espressione sostanzialmente equivalente a quella delle tradizionali linee di trasmissione (si consideri per esempio la (25)); se a questa si effettua la seguente condizione:

$$k_i^2 = -\lambda_i^2 = -\zeta_i \gamma_i \quad (26)$$

si ottiene, come soluzione dell’equazione d’onda, la ben nota combinazione lineare di modi progressivi e regressivi:

$$\begin{cases} V_i^m(z) = V_i^{m+}(z) + V_i^{m-}(z) = v_{0i}^+ e^{-jk_i z} + v_{0i}^- e^{+jk_i z} \\ I_i^m(z) = I_i^{m+}(z) + I_i^{m-}(z) = i_{0i}^+ e^{-jk_i z} + i_{0i}^- e^{+jk_i z} \end{cases} \quad (27)$$

Ciò rappresenta un secondo cambio di base (il primo è il passaggio alla base delle tensioni e correnti modali): invece che considerare le tensioni e le correnti modali, si considerano le componenti progressive e regressive di esse; chiamiamo **modi della linea multifilare** le N coppie di soluzioni

$$\begin{cases} v_{0i}^\pm e^{\mp jk_i z} \underline{u}_{V_i} \\ i_{0i}^\pm e^{\mp jk_i z} \underline{u}_{I_i} \end{cases} \quad (28)$$

A questo punto è possibile finalmente definire la base modale: per *base modale* si intendono gli N autovettori $\underline{u}_{V_i}, \underline{u}_{I_i}$. Si noti che, dal momento che i modi derivano dalla soluzione di un'equazione d'onda, essi sono equazioni che sostanzialmente derivano dalla soluzione di un sistema di equazioni omogeneo; in altre parole, sotto un punto di vista più legato all'automatica, essi sono **soluzioni libere** del sistema, **non forzate**. Il risultato di tutta questa formulazione è stato dunque l'ottenere, a partire da un sistema sparso, N linee di trasmissione disaccoppiate, con N modi progressivi e N modi regressivi; queste N linee di trasmissione sono le **linee modali**, V_i^m le **tensioni modali**, I_i^m le **correnti modali**.

Per introdurre questa rappresentazione è stato usato il formalismo degli autovettori ma, come noto, gli autovettori sono vettori definiti a meno del modulo: dalla soluzione del problema agli autovalori è nota la direzione, ma non il loro modulo. Non solo: a seconda di come si definisce il modulo, si può definire in modo diverso anche l'unità di misura di queste funzioni: $[V_i^m]$ può o meno essere in volt (V), a seconda della normalizzazione utilizzata (ossia a seconda del metodo utilizzato per assegnare un certo modulo agli autovettori)⁵.

2.4 Definizione della base reciproca

A questo punto è stata fornita una base su cui lavorare: la base modale. C'è tuttavia un problema: queste linee devono essere studiate una volta caricate su un generatore e su un carico; generatore e carico, tuttavia, sono descritti nella base naturale: quella delle tensioni e correnti osservabili. In realtà, volendo usare il formalismo modale, è necessario dunque convertire queste tensioni e correnti naturali in quelle modali.

Se la base di cui si disponesse fosse ortogonale (non si è ancora parlato di normalizzazione quindi non si parla di ortonormalità), sarebbe possibile proiettare ciascuna tensione/corrente su ciascun vettore \underline{u}_{V_i} , in modo tale da avere, come risultato della proiezione, esclusivamente il contributo dell' i -esimo vettore di base. Questo non è possibile, dal momento che **non** è in generale vero, per come è stata definita la base di autovettori relativi a $\underline{\underline{Z}} \underline{\underline{Y}}$ (o alla sua trasposta) che:

$$\langle \underline{u}_{V_i}, \underline{u}_{V_j} \rangle = C_{ij} \delta_{ij}$$

in altre parole, i vari autovettori sono indipendenti, ma geometricamente sono **non ortogonali**; questo significa che, proiettando per esempio una tensione naturale su due vettori modali, si avrebbero termini "incrociati": la proiezione non sarebbe funzione del solo vettore. Questo fatto è dovuto al fatto che la base di autovettori è sicuramente ortogonale solo nel caso in cui la matrice $\underline{\underline{Z}} \underline{\underline{Y}}$ sia hermitiana (in maniera da applicare il teorema spettrale); non c'è nulla, tuttavia, che garantisca qualcosa del genere nella teoria.

È dunque necessario costruire una base reciproca rispetto a quella dei vettori già esistenti (sia per gli autovettori di tensione sia per quelli di corrente). Per quanto riguarda i vettori di tensione è necessario introdurre una base di vettori **riga** biortogonali a quelli di tensione, ossia tali per cui:

⁵in realtà l'unità di misura degli autovettori non è di eccessivo interesse, dal momento che comunque si parla di quantità non osservabili, ma utilizzate esclusivamente per semplificare i calcoli rispetto a quelli che andrebbero fatti nella base naturale

$$\underline{u}_{V_j}^\dagger \underline{u}_{V_i} = C_{V_i} \delta_{ij} \quad (29)$$

I vettori $\underline{u}_{V_j}^\dagger$ vengono detti **vettori sinistri**, perché essi vanno applicati “a sinistra” della matrice. Fino ad ora tutti i vettori sono stati applicati “a destra” delle matrici mentre questi, come si dimostrerà tra breve, vengono applicati “a sinistra”; la cosa è giustificata dal fatto che questi ultimi sono **vettori riga**, quindi vettori che hanno significato se considerati “letti per righe” (il prodotto righe per colonne della matrice opera agendo sul vettore letto per colonne se esso è a sinistra della matrice, sul vettore letto per righe se esso è a destra della matrice); fino ad adesso, lo spazio che ha avuto significato fisico/matematico per la trattazione è sempre stato il solo spazio generato dalle colonne delle matrici, mentre quello delle righe è stato ignorato; di fatto, invece, questi sono vettori in cui lo spazio interessante è quello generato dalle righe delle matrici, e non dalle colonne. I soliti vettori \underline{u}_{V_i} verranno quindi da ora identificati come “vettori destri”.

2.5 Forma matriciale del cambio di base

A questo punto è possibile definire, a partire dai vettori, matrici che permettano di realizzare il cambio di base (da base naturale a base modale) mediante un semplice prodotto matriciale. Vengono dunque definite le seguenti matrici:

$$\begin{aligned} \underline{M}_V &\triangleq [\underline{u}_{V_1} \ \underline{u}_{V_2} \ \dots \ \underline{u}_{V_N}] \\ \underline{M}_I &\triangleq [\underline{u}_{I_1} \ \underline{u}_{I_2} \ \dots \ \underline{u}_{I_N}] \end{aligned} \quad (30)$$

Vengono inoltre definiti vettori (colonna) di tensioni e correnti modali:

$$\underline{V}^m(z) = \begin{bmatrix} V_1^m(z) \\ V_2^m(z) \\ V_3^m(z) \\ \vdots \\ V_N^m(z) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\underline{I}^m(z) = \begin{bmatrix} I_1^m(z) \\ I_2^m(z) \\ I_3^m(z) \\ \vdots \\ I_N^m(z) \end{bmatrix} \quad (32)$$

Queste definizioni permettono di scrivere (14) in forma matriciale come:

$$\begin{aligned} \underline{V}(z) &= \underline{M}_V \underline{V}^m(z) \\ \underline{I}(z) &= \underline{M}_I \underline{I}^m(z) \end{aligned} \quad (33)$$

Ciò permette, supponendo che le matrici \underline{M}_V e \underline{M}_I degli autovettori di corrente e di tensione *destri* siano invertibili, di effettuare la trasformazione inversa: ricavare il vettore di tensioni e correnti modali a partire da quelli nella base naturale. Ciò è fondamentale per esempio per la definizione delle condizioni

al contorno (carico e generatore) della linea: in questo modo, essendo in grado di trovare i contributi di tensione e corrente modale introdotti da un generici vettori di tensione e corrente nella base naturale, è possibile esprimere anche le condizioni al contorno nella base modale e quindi risolvere l'intero problema in tale base. Invertendo dunque (33), si ottiene:

$$\begin{aligned}\underline{V}^m(z) &= \underline{M}_V^{-1} \underline{V}(z) \\ \underline{I}^m(z) &= \underline{M}_I^{-1} \underline{I}(z)\end{aligned}\tag{34}$$

È inoltre possibile generalizzare il problema agli autovalori definito a partire dalle equazioni d'onda: (22) (o anche, volendo, (20) applicando il ragionamento duale) diventa:

$$\mathcal{ZY} \underline{M}_V = \underline{M}_V \text{diag} \{ \lambda \}\tag{35}$$

Tutti questi ragionamenti e queste matrici sono state applicate agli autovettori destri, della base modale; questo formalismo in realtà può essere anche applicato anche agli autovettori sinistri; ciò è importante dal momento che in questo modo è possibile ricavare informazioni aggiuntive sulla loro natura. Si definisce dunque \underline{M}_V^\dagger come la matrice le cui righe sono composte dagli autovettori sinistri:

$$\underline{M}_V^\dagger \triangleq \begin{bmatrix} \underline{u}_{V_1}^\dagger \\ \underline{u}_{V_2}^\dagger \\ \vdots \\ \underline{u}_{V_N}^\dagger \end{bmatrix}\tag{36}$$

Dal momento che tra vettori sinistri e vettori destri vale una relazione di ortogonalità (essendo valida la (29)), è possibile generalizzarla dicendo che:

$$\underline{M}_V^\dagger \underline{M}_V = \text{diag} \{ C_V \}\tag{37}$$

A questo punto è possibile utilizzare questa definizione al fine di calcolare gli elementi della base modale a partire da un vettore noto: nella (34), che utilizza l'inversione di una matrice per il calcolo degli elementi della base modale, è possibile sostituire la appena ricavata (37), ottenendo:

$$\begin{aligned}\underline{V}^m(z) &= [\text{diag} \{ C_V \}]^{-1} \underline{M}_V^\dagger \underline{V}(z) \\ &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_V} \right\} \underline{M}_V^\dagger \underline{V}(z)\end{aligned}\tag{38}$$

il passaggio è possibile dal momento che la matrice $\text{diag} \{ C_V \}$ è ovviamente diagonale, dunque il suo inverso coincide con la matrice degli elementi reciproci. L'equazione (37) può anche essere invertita, ottenendo banalmente:

$$\underline{M}_V^{-1} = \underline{M}_V^\dagger \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_V} \right\}\tag{39}$$

Chiamata \underline{u}_{V_j} la j -esima riga della matrice \underline{M}_V^{-1} , $\underline{u}_{V_j}^\dagger$ la j -esima componente dell'autovettore sinistro, è possibile asserire che $\forall j \in 1 \div N$,

$$\underline{\tilde{u}}_{V_j} = \frac{1}{C_{V_j}} \underline{u}_{V_j}^\dagger \quad (40)$$

Questa è la relazione imposta dalla biortogonalità, ipotesi introdotta al momento di definire gli autovettori sinistri; dal momento che tuttavia vale anche la relazione $\underline{M}_V^{-1} \underline{M}_V = \underline{I}$, esiste anche una relazione di ortogonalità tra i vettori-riga $\underline{\tilde{u}}_{V_j}$ e i vettori \underline{u}_{V_j} :

$$\underline{\tilde{u}}_{V_j} \underline{u}_{V_i} = \delta_{ij}$$

nella quale, sostituendo la (40), si ottiene:

$$\underline{u}_{V_j} \underline{u}_{V_i} = C_{V_i} \delta_{ij} \quad (41)$$

Dati tutti questi risultati, si applica a questo punto una manipolazione dell'equazione matriciale (35):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \mathcal{Y} \underline{M}_V &= \text{diag} \{ \lambda \} \underline{M}_V \\ \underline{M}_V^{-1} \mathcal{Z} \mathcal{Y} \underline{M}_V &= \underline{M}_V^{-1} \text{diag} \{ \lambda \} \underline{M}_V \\ \underline{M}_V^{-1} \mathcal{Z} \mathcal{Y} &= \text{diag} \{ \lambda \} \\ \underline{M}_V^{-1} \mathcal{Z} \mathcal{Y} &= \text{diag} \{ \lambda \} \underline{M}_V^{-1} \end{aligned}$$

ricordando infine la validità di (39), si ottiene:

$$\begin{aligned} \underline{M}_V^\dagger \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_V} \right\} \mathcal{Z} \mathcal{Y} &= \text{diag} \{ \lambda \} \underline{M}_V^\dagger \text{diag} \left\{ \frac{1}{C_V} \right\} \\ \underline{M}_V^\dagger \mathcal{Z} \mathcal{Y} &= \text{diag} \{ \lambda \} \underline{M}_V^\dagger \end{aligned} \quad (42)$$

Alcuni passaggi sono stati effettuati non evidenziando il fatto che il prodotto matriciale per matrici diagonali è commutativo; si tenga conto che questa proprietà è in generale valida. Questa nuova formulazione del problema agli autovalori è molto interessante dal momento che, considerando ciascuna componente j -esima (ciascuna componente è un vettore riga), è possibile ottenere:

$$\underline{u}_{V_j}^\dagger \mathcal{Z} \mathcal{Y} = \lambda_j \underline{u}_{V_j}^\dagger \quad (43)$$

Questo problema è particolarmente interessante, alla luce di un altro problema agli autovalori; si consideri l'equazione (20): se si considera il trasposto di entrambi i membri della suddetta equazione, si ottiene, ricordando (13):

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} \mathcal{Z} \underline{u}_{I_j} &= \lambda_i \underline{u}_{I_i} \\ \left[(\mathcal{Y} \mathcal{Z}) \underline{u}_{I_j} \right]^\top &= \left(\lambda_i \underline{u}_{I_i} \right)^\top \\ &= \underline{u}_{I_j}^\top (\mathcal{Y} \mathcal{Z})^\top = \\ &= \underline{u}_{I_j}^\top \mathcal{Z} \mathcal{Y} \end{aligned} \quad (44)$$

Confrontando l'espressione (44) con il problema agli autovalori (43), è possibile trovare un risultato estremamente interessante:

$$\underline{v}_j^\dagger = \text{costante} \underline{u}_j^T \quad (45)$$

Questo significa che i gli autovettori sinistri di cui si parlava precedente sono sostanzialmente coincidenti con gli autovettori di corrente, trasposti. Vale ovviamente un risultato duale, con una costante di proporzionalità diversa:

$$\underline{u}_j^\dagger = \text{costante} \underline{v}_j^T \quad (46)$$

Questo significa che la base di vettori biortogonali a quelli di tensione sono semplicemente i vettori di corrente: il procedimento per proiettare un vettore generico sulla base di vettori di tensione è semplicemente basato sull'uso dei vettori di corrente come vettori biortogonali di proiezione, e viceversa.

2.5.1 Definizione dell'impedenza caratteristica modale

Una volta iniziato a lavorare sulle tensioni e correnti modali, è possibile fare un secondo step: dividere queste grandezze in componenti progressive e regressive, come già fatto nelle equazioni (27). In questa base, quindi, il ruolo dell'autovettore (della direzione dell'autovettore) è la cosiddetta *impedenza caratteristica modale*: essa definisce il rapporto tra le componenti progressive e/o regressive delle tensioni e correnti modali (rapporto tra tensione e corrente progressiva, rapporto tra tensione e corrente regressiva⁶). L'obiettivo di questa sottosezione è quello di determinare, a partire dalla teoria finora introdotta, espressioni in grado di quantificare queste impedenze caratteristiche modali. Sostituendo quindi la (27) dentro le (19), si ottiene:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dz} V_i^m(z) &= -\frac{d}{dz} \left[v_{0i}^+ e^{-jk_i z} + v_{0i}^- e^{+jk_i z} \right] = \zeta_i I_i^m(z) \\ -\frac{d}{dz} I_i^m(z) &= -\frac{d}{dz} \left[i_{0i}^+ e^{-jk_i z} + i_{0i}^- e^{+jk_i z} \right] = y_i V_i^m(z) \end{aligned}$$

I modi progressivi e regressivi, che qua sono stati scritti insieme, sono in realtà due soluzioni indipendenti delle equazioni d'onda; derivando e semplificando gli esponenziali, si ottiene:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dz} \left[v_{0i}^+ e^{-jk_i z} \right] &= -jk_i \left[v_{0i}^+ e^{-jk_i z} \right] = \\ &= \zeta_i i_{0i}^+ e^{-jk_i z} \\ -\frac{d}{dz} \left[v_{0i}^- e^{+jk_i z} \right] &= +jk_i \left[v_{0i}^- e^{+jk_i z} \right] = \\ &= \zeta_i i_{0i}^- e^{+jk_i z} \end{aligned}$$

da cui discendono le espressioni delle due impedenze caratteristiche modali (progressiva e regressiva, distinte): per un generico punto, non essendoci dipendenza delle impedenze caratteristiche da z , si ha:

⁶si noti che non è assolutamente detto che le impedenze caratteristiche relative a grandezze progressive e regressive coincidano

$$Z_{\infty,i}^{\pm} = \frac{v_{0i}^{\pm}}{i_{0i}^{\pm}} = \pm \frac{\zeta_i}{jk_i} \quad (47)$$

Questo è un risultato utile, ma non immediatamente vicino all'applicazione: l'applicazione suggerisce di risolvere in qualche modo un problema agli autovalori, la cui soluzione sono dunque i λ_i ; essi sono peraltro collegati ai problemi agli autovalori precedentemente definiti da (20) e (22), ma anche a ζ_i (e alla corrispondente y_i) dalla (21). Ciò che si può fare al fine di ricavare espressioni più vicine alle applicazioni è sfruttare la base biortogonale precedentemente utilizzata, proiettando su di essa l'espressione (16): ciò permette di ottenere

$$\underline{u}_{V_i}^{\dagger} \mathcal{Z} \underline{u}_{V_i} = \zeta_i \underline{u}_{V_i}^{\dagger} \underline{u}_{V_i}$$

il termine destro dell'espressione appena scritta è uno scalare: è dato dal prodotto scalare di due vettori; si può dunque portare al membro sinistro, ottenendo:

$$\zeta_i = \frac{\underline{u}_{V_i}^{\dagger} \mathcal{Z} \underline{u}_{V_i}}{\underline{u}_{V_i}^{\dagger} \underline{u}_{V_i}} \quad (48)$$

sostituendo ciò in (47), si ottiene:

$$\begin{aligned} Z_{\infty,i} &= \frac{1}{jk_i} \frac{\underline{u}_{V_i}^{\dagger} \mathcal{Z} \underline{u}_{V_i}}{\underline{u}_{V_i}^{\dagger} \underline{u}_{V_i}} \\ &= \frac{\underline{u}_{I_i}^{\top} \mathcal{Z} \underline{u}_{I_i}}{\underline{u}_{I_i}^{\top} \underline{u}_{V_i}} \end{aligned} \quad (49)$$

Se allo stesso modo si ragiona sulla seconda equazione delle (19), è possibile ricavare alla stessa maniera:

$$\begin{aligned} Y_{\infty,i} &\triangleq \frac{y_i}{jk_i} = \frac{1}{jk_i} \frac{\underline{u}_{I_i}^{\dagger} \mathcal{Y} \underline{u}_{V_i}}{\underline{u}_{I_i}^{\dagger} \underline{u}_{I_i}} \\ &= \frac{1}{jk_i} \frac{\underline{u}_{V_i}^{\top} \mathcal{Y} \underline{u}_{V_i}}{\underline{u}_{V_i}^{\top} \underline{u}_{I_i}} \end{aligned} \quad (50)$$

Ricordando (21), essendo $\zeta_i y_i = \lambda_i = -k_i^2$, si ha che:

$$Z_{\infty,i} Y_{\infty,i} = 1 \quad (51)$$

2.6 Normalizzazione degli autovettori

Gli autovalori sono degli invarianti per una matrice; la stessa cosa non si può dire per il modulo degli autovettori, dal momento che esso è arbitrario, almeno in seguito alla soluzione di un problema agli autovalori: un problema agli

autovalori fornisce informazioni sulla direzione degli autovettori, non sul loro modulo; a seconda delle routine utilizzate dai vari software possono essere prodotte normalizzazioni diverse.

Per quanto riguarda i ragionamenti teorici introdotti in questa trattazione, si vuole proporre un'idea: introdurre una normalizzazione tale da avere, dimensionalmente, impedenze caratteristiche modali in ohm:

$$[Z_{\infty,i}] = \Omega$$

Un modo per imporre ciò è fare in modo che si che gli autovalori di tensione e di corrente abbiano lo stesso *pseudomodulo*⁷:

$$\underline{u}_{V_i}^T \cdot \underline{u}_{V_i} = \underline{u}_{I_i}^T \cdot \underline{u}_{I_i} \quad \forall i \in 1 \div N \quad (52)$$

Questo tipo di condizione è detta **normalizzazione di equimodulo**.

A questo punto si studino le implicazioni di questa condizione: riprendendo le definizioni delle impedenze caratteristiche modali (47) e (49), si ottiene, ricavando \underline{u}_{V_i} dalla (16) e sostituendo:

$$\underline{u}_{V_i} = \underline{\mathcal{Z}} \frac{1}{\zeta_i} \underline{u}_{I_i} = \underline{\mathcal{Z}} \underline{u}_{I_i} \frac{1}{jk_1 Z_{\infty,i}} \quad (53)$$

Si moltiplichino a sinistra di \underline{u}_{V_i} il suo trasposto; si ottiene:

$$\underline{u}_{V_i}^T \underline{u}_{V_i} = \frac{1}{-k_i^2 Z_{\infty,i}^2} \underline{u}_{I_i}^T \underline{\mathcal{Z}}^T \underline{\mathcal{Z}} \underline{u}_{I_i}$$

si ricorda che la matrice $\underline{\mathcal{Z}}$ è nei casi considerati simmetrica; $\underline{\mathcal{Z}} = \underline{\mathcal{Z}}^T$; quindi, sostituendo nella (52) e tenendo conto che ciascuno dei termini è uno scalare (prodotto riga-vettore di un vettore e del suo trasposto certamente danno uno scalare), si può dividere per $\underline{u}_{I_i}^T \underline{u}_{I_i}$ e ottenere $Z_{\infty,i}$, come:

$$Z_{\infty,i} = \frac{1}{jk_i} \sqrt{\frac{\underline{u}_{I_i}^T \underline{\mathcal{Z}}^2 \underline{u}_{I_i}}{\underline{u}_{I_i}^T \underline{u}_{I_i}}} \quad (54)$$

Indipendentemente dalla normalizzazione degli autovettori, si sa che k_i è, dimensionalmente, il reciproco di una lunghezza; $\underline{\mathcal{Z}}$ è una impedenza per unità di lunghezza; moltiplicando una lunghezza per una grandezza p.u.l. si ottiene la grandezza assoluta: in questo caso quindi, tenendo conto che gli autovettori si “semplificano tra loro”, si può dire che la normalizzazione è tale da garantire che le impedenze di riferimento modale siano dimensionalmente delle impedenze (unità di misura “ohm”).

⁷ modulo e pseudomodulo differiscono nel fatto che, nel modulo, il secondo termine del prodotto scalare, se complesso, viene coniugato prima di effettuare il prodotto scalare: il prodotto interno comunemente definito (il quale produce un modulo) è infatti $\langle f(x), g(x) \rangle \triangleq \int f(x) g^*(x) dx$, in campo continuo; in campo discreto l'integrale è sostituito ovviamente da una sommatoria: $\langle f, g \rangle \triangleq \sum f_i \cdot g_i^*$

2.6.1 Normalizzazione di autovettori prodotti mediante routine software e ortonormalizzazione degli autovettori

In questa sottosezione, ridondante rispetto alla precedente, si vuole fissare il concetto introdotto nella precedente sezione principale: l'obiettivo della "normalizzazione di equimodulo".

Si supponga che una routine di un qualche software abbia prodotto \underline{U}_V e \underline{U}_I , autovettori di tensione e di corrente, con una normalizzazione imposta dalla routine: ciascuno di essi sicuramente ha la stessa direzione degli autovettori normalizzati secondo la normalizzazione di equimodulo, ma il modulo per l'appunto diverso:

$$\begin{aligned} \underline{u}_{V_i} &= n_{V_i} \underline{U}_{V_i} \\ \underline{u}_{I_i} &= n_{I_i} \underline{U}_{I_i} \end{aligned} \quad (55)$$

n_{V_i} e n_{I_i} sono degli scalari: sono sostanzialmente il coefficiente moltiplicativo che andrebbe applicato ai vettori *grezzi*, prodotti dalla routine, per essere normalizzati secondo la normalizzazione di equimodulo. Imponendo dunque la validità dell'equazione (52), si ha:

$$n_{V_i} \underline{U}_{V_i}^T n_{V_i} \underline{U}_{V_i} = n_{I_i} \underline{U}_{I_i}^T n_{I_i} \underline{U}_{I_i}$$

dal momento che al solito in questi casi il risultato del prodotto riga per colonna è un numero, è possibile definire un α_i come:

$$n_{I_i}^2 = n_{V_i}^2 \frac{\underline{U}_{V_i}^T \underline{U}_{V_i}}{\underline{U}_{I_i}^T \underline{U}_{I_i}} \quad (56)$$

$$\triangleq \alpha_i^2 n_{V_i}^2 \quad (57)$$

questo α_i è semplicemente un coefficiente che tiene conto del rapporto di n_{V_i} e n_{I_i} ; in questo modo, è possibile riscrivere le (55) come:

$$\begin{aligned} \underline{u}_{V_i} &= n_{V_i} \underline{U}_{V_i} \\ \underline{u}_{I_i} &= \alpha_i n_{V_i} \underline{U}_{I_i} \end{aligned} \quad (58)$$

Si hanno due costanti (α_i e n_{V_i}), tuttavia l'unica equazione imposta è la condizione di equimodulo; essendo due i gradi di libertà, è possibile introdurre ancora una condizione; quella che di solito si sceglie è la condizione di **biortonormalità**: come già dimostrato in precedenza, i gli autovettori di corrente e quelli di tensione sono biortogonali; questo significa che:

$$\underline{u}_{I_j}^T \underline{u}_{V_i} = C_{ij} \delta_{ij}$$

Richiedere la biortogonalità significa richiedere che:

$$\underline{u}_{I_j}^T \underline{u}_{V_i} = \delta_{ij}$$

oppure, in espressione matriciale:

$$\underline{\underline{M}}_I^T \underline{\underline{M}}_V = \underline{\underline{I}} \quad (59)$$

Si ottiene:

$$n_{I_i} \underline{U}_{I_i}^T n_{V_i} \underline{U}_{V_i} = \alpha_i n_{V_i}^2 \underline{U}_{I_i}^T \underline{U}_{V_i} = \underline{I}$$

da cui:

$$n_{V_i}^2 = \frac{1}{\alpha_i \underline{U}_{I_i}^T \underline{U}_{V_i}} \quad (60)$$

3 Utilizzo della base modale

In questa sezione sarà ultimato il discorso della sezione precedente riguardo all'utilizzo della base modale, in modo da fissare i concetti e riepilgarli, per poi passare allo studio di circuiti più pratici.

In accordo con le notazioni precedentemente utilizzate, si è detto che è possibile utilizzare una notazione matriciale del tipo:

$$\begin{cases} \underline{V}(z) = \underline{M}_V \underline{V}^m(z) \\ \underline{I}(z) = \underline{M}_I \underline{I}^m(z) \end{cases} \quad (61)$$

A partire da queste espressioni è possibile ricavare in forma matriciale le espressioni delle linee modali: sostituendo queste nelle (8), si può ottenere:

$$\begin{cases} -\underline{M}_V \frac{d\underline{V}^m(z)}{dz} = \underline{Z} \underline{M}_I \underline{I}^m(z) \\ -\underline{M}_I \frac{d\underline{I}^m(z)}{dz} = \underline{Y} \underline{M}_V \underline{V}^m(z) \end{cases} \quad (62)$$

A questo punto si premoltiplichi la prima equazione per \underline{M}_I^T , la seconda per \underline{M}_V^T , e si sfrutti l'ortonormalità imposta dalla condizione (59), ottenendo:

$$\begin{cases} -\frac{d\underline{V}^m(z)}{dz} = \underline{M}_I^T \underline{Z} \underline{M}_I \underline{I}^m(z) \\ -\frac{d\underline{I}^m(z)}{dz} = \underline{M}_V^T \underline{Y} \underline{M}_V \underline{V}^m(z) \end{cases} \quad (63)$$

Ricordando a questo punto la (53), la si generalizzi (e si generalizzi anche la sua duale); definita dunque $\underline{\Lambda}$ come:

$$\underline{\Lambda} \triangleq \text{diag} \{k_i^2\}$$

come la matrice diagonale avente come elementi gli autovalori del problema (non le lunghezze d'onda), si può scrivere la (53) e la sua duale come:

$$\underline{M}_V = \underline{\Lambda}^{-1} \underline{Z}_{\infty}^{-1} \underline{Z} \underline{M}_I \quad (64)$$

$$\underline{M}_I = \underline{Y} \underline{M}_V \underline{\Lambda}^{-1} \underline{Y}_{\infty}^{-1} \quad (65)$$

dove \underline{Z}_{∞} è la matrice diagonale con le varie $Z_{\infty,i}$ come elementi della diagonale.

A questo punto, date queste equazioni, è possibile scrivere i termini nelle equazioni delle linee (63) come:

$$\begin{aligned}
\underline{M}_I^T \underline{Z} \underline{M}_I &= \underline{M}_I^T \underline{Z} \underline{Y} \underline{M}_V \underline{\Lambda}^{-1} \underline{Y}_\infty^{-1} = \underline{M}_I^T \underline{M}_V \underline{\Lambda}^2 \underline{\Lambda}^{-1} = \\
&= \underline{\Lambda} \underline{Y}_\infty^{-1} = \underline{\Lambda} \underline{Z}_\infty \underline{M}_V^T \underline{Y} \underline{M}_I = \underline{M}_V^T \underline{M}_I \underline{\Lambda} \underline{Y}_\infty = \\
&= \underline{\Lambda} \underline{Y}_\infty
\end{aligned} \tag{66}$$

dove si è usata la relazione $\underline{Z} \underline{Y} \underline{M}_V = \underline{M}_V \underline{\Lambda}^{-1}$, generalizzazione del problema agli autovalori (22).

A questo punto, al fine di apprezzare il lavoro finora fatto, si riscrivano le (63) nelle seguenti:

$$\begin{cases} -\frac{dV^m(z)}{dz} = \underline{\Lambda} \underline{Z}_\infty I^m(z) \\ -\frac{dI^m(z)}{dz} = \underline{\Lambda} \underline{Y}_\infty V^m(z) \end{cases} \tag{67}$$

Da queste espressioni è evidente l'interessantissimo risultato ottenuto mediante la rappresentazione modale: si ha un sistema matriciale in cui le matrici in gioco sono **diagonali**; questo significa che nella base modale le equazioni delle linee di trasmissione, precedentemente accoppiate, sono ora disaccoppiate in varie linee singole che *non parlano tra loro*: una linea a N fili può essere studiata con N linee tra loro disaccoppiate; questa è l'enorme semplificazione introdotta dal formalismo modale.

A questo punto, si intende utilizzare il formalismo modale al fine di modellare mediante esso una intera rete: generatore, linea e carico. Questo tipo di modello verrà introdotto per due casi principali: generatore e carico espressi secondo equivalente Thévenin e secondo equivalente Norton, ossia secondo i due casi rispetto a cui usualmente sono espressi generatore e carico; una volta fatto ciò, studiare le varie linee è un tradizionale esercizio di linee di trasmissione.

Generatore e carico in un circuito rappresentano, volendo analizzare il circuito in termini di equazioni differenziali, le sue condizioni al contorno; l'operazione che sta per essere fatta di conseguenza significa sostanzialmente prendere queste condizioni al contorno e rappresentarle nella base modale.

3.1 Circuito equivalente Thévenin

Il circuito di una rete con generatori accoppiati espressa in termini di equivalente Thévenin è in Figura 7.

Verranno studiati ora separatamente generatore e carico.

3.1.1 Rete di generatore

Il problema in questione è la rappresentazione nella base modale del circuito in Figura 8.

L'equazione alle maglie per il circuito equivalente presentato è:

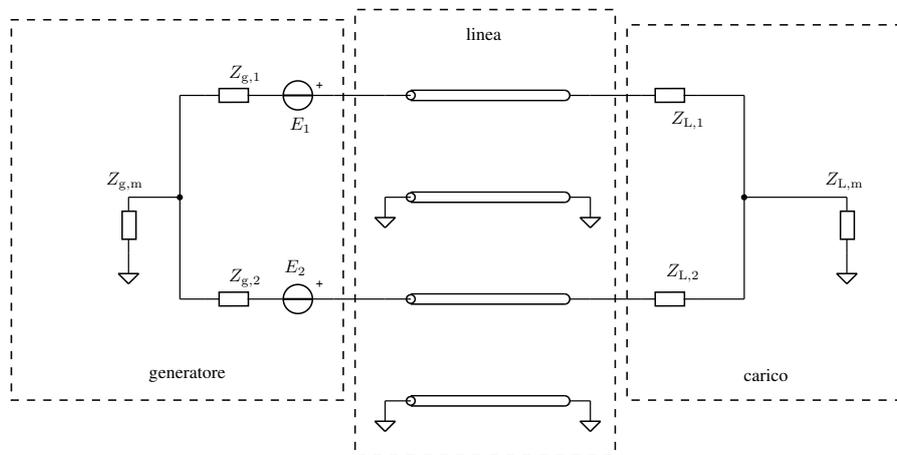


Figura 7: Equivalente Thévenin di una intera rete di linee di trasmissione accoppiate

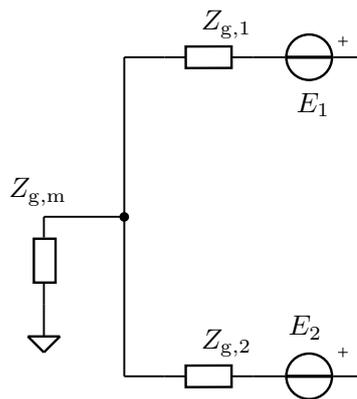


Figura 8: Rappresentazione Thévenin del solo generatore

$$\begin{cases} V_1(0) = E_1 - Z_{g,1}I_1(0) - Z_{g,m}I_2(0) - Z_{g,m}I_1(0) \\ V_2(0) = E_2 - Z_{g,2}I_2(0) - Z_{g,m}I_1(0) - Z_{g,m}I_2(0) \end{cases} \quad (68)$$

in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} V_1(0) \\ V_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_{g,1} + Z_{g,m} & Z_{g,m} \\ Z_{g,m} & Z_{g,2} + Z_{g,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{bmatrix} \quad (69)$$

anche scrivibile in forma breve come:

$$\underline{V}(0) = \underline{E} - \underline{Z}_g \underline{I}(0) \quad (70)$$

3.1.2 Rete di carico

A questo punto si ripete lo stesso ragionamento per la rete di carico.

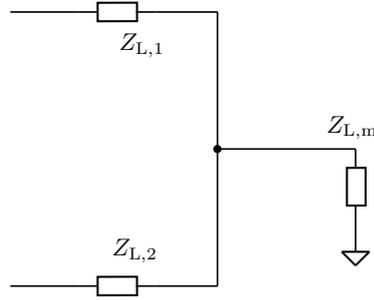


Figura 9: Rappresentazione Thévenin del solo carico

In questo caso, si ottiene:

$$\begin{cases} V_1(l) = Z_{L,1}I_1(l) + Z_{L,m}(I_1(l) + I_2(l)) \\ V_2(l) = Z_{L,2}I_2(l) + Z_{L,m}(I_1(l) + I_2(l)) \end{cases} \quad (71)$$

la quale diventa, in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} V_1(l) \\ V_2(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{L,1} + Z_{L,m} & Z_{L,m} \\ Z_{L,m} & Z_{L,2} + Z_{L,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(l) \\ I_2(l) \end{bmatrix} \quad (72)$$

o, in forma breve:

$$\underline{V}(l) = \underline{Z}_L \underline{I}(l) \quad (73)$$

A questo punto, ottenuto il circuito e ottenuta una rappresentazione matriciale, è possibile passare nella base modale semplicemente moltiplicando per le ben note matrici di cambio di base:

$$\begin{aligned} \underline{V}(z) &= \underline{M}_V \underline{V}^m(z) \\ \underline{I}(z) &= \underline{M}_I \underline{I}^m(z) \end{aligned}$$

quindi:

$$\underline{M}_V \underline{V}^m(0) = \underline{E} - \underline{Z}_g \underline{M}_I \underline{I}^m(0)$$

A questo punto si sfrutta l'idea della base biortonormale, costituita dai vettori della matrice dei vettori di corrente (trasposta), premoltiplicando e usando il fatto che $\underline{M}_I^T \underline{M}_V = \underline{I}$; quindi:

$$\begin{aligned} \underline{M}_I^T \underline{M}_V \underline{V}^m(0) &= \underline{V}^m(0) = \underline{M}_I^T \underline{E} - \underline{M}_I^T \underline{Z}_g \underline{M}_I \underline{I}^m(0) = \\ &= \underline{E}^m \underline{Z}_g^m \underline{I}^m(0) \end{aligned} \quad (74)$$

Come si può vedere, ricordando le nozioni di algebra lineare, \underline{Z}_g^m è data dalla matrice, premoltiplicata per la matrice di cambio di base e la trasposta (invece che l'inversa); questo ricorda molto le formule del cambio di base. Facendo gli stessi conti è possibile dimostrare:

$$\underline{V}^m(l) = \underline{Z}_L^m \underline{I}^m(l) \quad (75)$$

con

$$\underline{Z}_L^m = \underline{M}_I^T \underline{Z}_L \underline{M}_I$$

3.2 Circuito equivalente Norton

A questo punto vengono riproposti i conti per quanto riguarda l'equivalente Norton, sia per generatore sia per carico, a partire dunque dal circuito riportato in Figura 10.

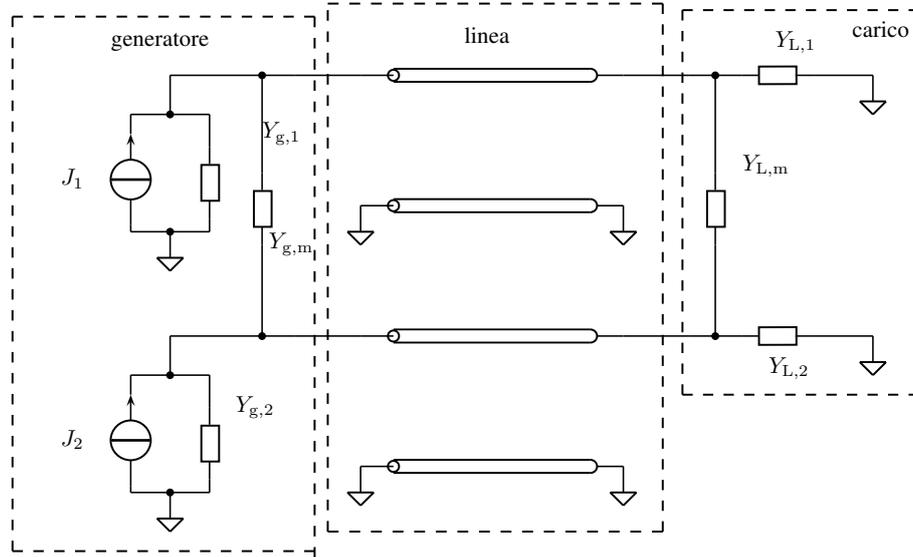


Figura 10: Equivalente Norton di una intera rete di linee di trasmissione accoppiate

3.2.1 Rete di generatore

Si consideri a questo punto il circuito equivalente in Figura 11

È possibile ricavare per ispezione le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} I_1(0) = J_1 - Y_{g,1} (V_1(0) - V_2(0)) - V_1(0)Y_{g,1} \\ I_2(0) = J_2 - Y_{g,2}V_2(0) + Y_{g,m} (V_1(0) - V_2(0)) \end{cases} \quad (76)$$

in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} I_1(0) \\ I_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_{g,1} + Y_{g,m} & -Y_{g,m} \\ -Y_{g,m} & Y_{g,2} + Y_{g,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(0) \\ V_2(0) \end{bmatrix} \quad (77)$$

anche scrivibile in forma breve come:

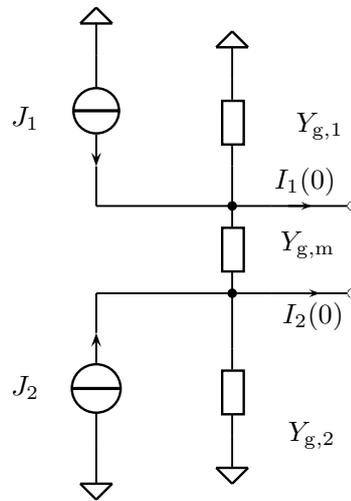


Figura 11: Equivalente Norton del solo generatore

$$\underline{I}(0) = \underline{J} - \underline{Y}_{\underline{g}} \underline{V}(0) \quad (78)$$

La scelta di adottare il segno “-” tra il vettore di sorgente e il secondo termine deriva dalla coerenza con la convenzione di utilizzatore: introdotta una corrente, essa provoca una caduta di tensione sulle impedenze/ammettenze che attraversa.

3.2.2 Rete di carico

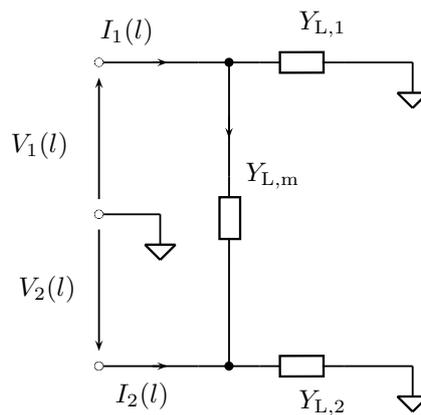


Figura 12: Equivalente Norton del solo carico

Si ricava per ispezione:

$$\begin{cases} I_1(l) = Y_{L,1}V_1(l) + Y_{L,m}(V_1(l) - V_2(l)) \\ I_2(l) = Y_{L,2}V_2(l) - Y_{L,m}(V_1(l) - V_2(l)) \end{cases} \quad (79)$$

la quale diventa, in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} I_1(l) \\ I_2(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{L,1} + Y_{L,m} & -Y_{L,m} \\ -Y_{L,m} & Y_{L,2} + Y_{L,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(l) \\ V_2(l) \end{bmatrix} \quad (80)$$

o, in forma breve:

$$\underline{I}(l) = \underline{I} - \underline{Y}_L \underline{V}(0) \quad (81)$$

A questo punto, premoltiplicando per \underline{M}_V^T e sfruttando la relazione $\underline{M}_V^T \underline{M}_I = \underline{I}$ si ottiene, per il generatore:

$$\underline{I}^m(0) = \underline{I}^m - \underline{Y}_g^m \underline{V}^m(0) \quad (82)$$

dove:

$$\begin{aligned} \underline{I}^m &= \underline{M}_V^T \underline{I} \\ \underline{Y}_g^m &= \underline{M}_V^T \underline{Y}_g \underline{M}_V \underline{M}^m(0) \end{aligned}$$

e, per quanto riguarda il carico:

$$\underline{I}^m(l) = \underline{Y}_L^m \underline{V}^m(l) \quad (83)$$

dove

$$\underline{Y}_L^m = \underline{M}_V^T \underline{Y}_L \underline{M}_V$$

3.3 Definizione della matrice scattering

Le N linee accoppiate possono essere sostanzialmente trattate come un N -porte; questo, rappresentato nel formalismo modale, diventa sostanzialmente un insieme di N linee non accoppiate e con costanti secondarie ($Z_{\infty,i}$ e k_i) tra loro diverse (se gli autovalori del problema sono tra loro distinti, ipotesi comunque ragionevole da assumere). Supposta lunghezza della linea costante (dal momento che per esempio le linee, di lunghezza fisica diversa, sono tra loro accoppiate solo per una certa lunghezza l , ottenendo solo in questa lunghezza le interazioni mutue), utilizzando una descrizione mediante matrice scattering, il grosso vantaggio è la facilità nello studio della propagazione dello stato elettrico: *muoversi* da carico a generatore è banale, dal momento che sarebbe soltanto una semplice traslazione dei piani di riferimento. La matrice scattering andrà dunque definita a partire dalle tensioni e correnti **modali**.

Date generiche tensioni e correnti modali \underline{V}^m e \underline{I}^m (in una generica sezione z non specificata), è noto che.

$$\underline{V}^m = \underline{Z}^m \underline{I}^m$$

Si consideri la seguente definizione vettoriale di onde di potenza:

$$\begin{cases} \underline{V}^m = \underline{Z}_0^{-1/2} (\underline{a} + \underline{b}) \\ \underline{I}^m = \underline{Z}_0^{-1/2} (\underline{a} - \underline{b}) \end{cases} \quad (84)$$

dove

$$\underline{Z}_0 \triangleq \text{diag} \{Z_{\infty,i}\}$$

si può dunque scrivere, considerando le impedenze di riferimento coincidenti con le impedenze caratteristiche **modali** (sottointesi gli apici "m"):

$$\underline{Z}_{\infty}^{-1/2} (\underline{a} + \underline{b}) = \underline{Z}_{\underline{L}}^m \underline{Z}_{\infty}^{-1/2} (\underline{a} - \underline{b})$$

da qui:

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{Z}_{\infty}^{1/2} \underline{Z}_{\underline{L}}^m \underline{Z}_{\infty}^{-1/2} (\underline{a} - \underline{b})$$

quindi, raccogliendo \underline{b} e \underline{a} ,

$$\left(\underline{I} + \underline{Z}_{\infty}^{1/2} \underline{Z}_{\underline{L}}^m \underline{Z}_{\infty}^{-1/2} \right) \underline{b} = \left(\underline{Z}_{\infty}^{1/2} \underline{Z}_{\underline{L}}^m \underline{Z}_{\infty}^{-1/2} - \underline{I} \right) \underline{a}$$

quindi, ricordando che $\underline{b} = \underline{S} \underline{a}$, si ha:

$$\underline{b} = \left(\underline{I} + \underline{Z}_{\infty}^{1/2} \underline{Z}_{\underline{L}}^m \underline{Z}_{\infty}^{-1/2} \right)^{-1} \left(\underline{Z}_{\infty}^{1/2} \underline{Z}_{\underline{L}}^m \underline{Z}_{\infty}^{-1/2} - \underline{I} \right) \underline{a} \quad (85)$$

Questa formula, se scalarizzata, si riconduce alla tradizionale formula di calcolo del coefficiente di riflessione Γ . A questo punto, definendo $\underline{\zeta}_{\underline{L}}^m$ la matrice di impedenza di carico espressa nel dominio modale e normalizzata,

$$\underline{\zeta}_{\underline{L}}^m \triangleq \underline{Z}_{\infty}^{-1/2} \underline{Z}_{\underline{L}}^m \underline{Z}_{\infty}^{-1/2}$$

si può dire che la matrice scattering rappresentante nella base modale il carico (una sorta di coefficiente di riflessione vettoriale) sia:

$$\underline{S}_{\underline{L}} = \left[\underline{\zeta}_{\underline{L}}^m - \underline{I} \right] \left[\underline{\zeta}_{\underline{L}}^m + \underline{I} \right]^{-1} \quad (86)$$

A questo punto, da questa, effettuando la traslazione di piani di riferimento, è possibile trovare $\underline{S}(0) \triangleq \underline{S}_{\underline{g}}$: il coefficiente di riflessione vettoriale di generatore, risolvendo il problema della linea. L'idea è quella di utilizzare una trasformazione del tipo:

$$\underline{S}(0) = \text{diag} \left\{ e^{-jkl} \right\} \underline{S}_{\underline{L}} \text{diag} \left\{ e^{-jkl} \right\} \quad (87)$$

dove $\text{diag} \left\{ e^{-jkl} \right\}$ è la matrice diagonale costituita dai termini di fase (le varie costanti di propagazione modali di ciascuna linea). Una volta trovata $\underline{S}_{\underline{g}}$, utilizzando passaggi analoghi a quelli precedentemente visti, è possibile determinare la matrice delle ammettenze nel suddetto punto: come si fa con un tradizionale esercizio di linee di trasmissione, una volta propagato lo stato elettrico mediante il formalismo delle onde di potenza (o delle tensioni progressive/regressive a seconda del tipo di approccio che si preferisce),

$$\underline{y}^m(0) = \left[\underline{I} - \underline{S}(0) \right] \left[\underline{I} + \underline{S}(0) \right]^{-1} \quad (88)$$

da qui quindi si può denormalizzare:

$$\underline{Y}^m(0) = \underline{Y}_{\infty}^{1/2} \underline{y}^m(0) \underline{Y}_{\infty}^m(0) = \underline{Y}_{\infty}^{1/2}$$

e quindi, sapendo dalla (74) o (82) la relazione tra impedenze, tensioni/correnti modali e generatori, avendo dei dati, è possibile risolvere vari tipi di problemi.