

Comunicazioni Elettriche

Alberto Tibaldi

25 luglio 2008

Indice

1	Introduzione	4
1.1	Sistemi di trasmissione analogici	4
1.2	Sistemi di trasmissione digitali	5
1.3	I decibel (<i>dB</i>)	5
2	Nozioni Introduttive alle Telecomunicazioni	7
2.1	Rumore Termico	7
2.2	Alcune note/ripassi	9
2.3	Caratterizzazione dei Doppi Bipoli	11
2.3.1	Esempio Pratico	13
2.4	Interconnessione di doppi bipoli	14
2.4.1	Esempio Pratico	15
3	Cenni alle Equazioni di Propagazione	17
3.1	Sistemi via cavo	17
3.2	Sistemi via Etere	18
4	Introduzione alla trasmissione analogica	20
4.1	Il Segnale Analitico	20
4.2	Proprietà del segnale analitico	21
4.2.1	Spettro del Segnale Analitico	21
4.2.2	Densità Spettrale di Potenza del Segnale Analitico	22
4.3	Caratterizzazione del rumore mediante il segnale analitico	23
5	Modulazioni di Ampiezza (AM)	24
5.1	Potenza del segnale $s(t)$	27
5.2	Percentuali di Modulazione	28
5.3	Efficienze di Modulazione	30
5.3.1	Esempio Pratico	31
5.4	Demodulazione Coerente	31
5.5	Calcolo delle prestazioni di sistemi AM	33

5.5.1	Ricevitore Coerente	35
5.5.2	Ricezione Incoerente	39
6	Pulse Amplitude Modulation	42
6.1	Campionamento	42
6.2	Quantizzazione	43
6.3	Canale binario simmetrico	46
7	Introduzione alla Trasmissione Digitale	53
7.1	Simboli e Costellazioni	53
7.2	Classificazioni dei sistemi di trasmissione digitali	55
7.3	Analisi generica di un sistema di trasmissione	56
7.3.1	Variabili aleatorie a_n e a_{n+k} scorrelate per $n \neq k$	61
7.3.2	Variabili aleatorie a_n e a_{n+k} correlate	62
7.4	Classificazioni di segnali in banda base	63
7.4.1	Classificazione per simboli	63
7.4.2	Classificazione per variabili casuali a_n	63
7.5	Cenni alle Codifiche	64
7.5.1	Esempio Pratico 1 : il codice AMI	64
7.5.2	Esempio pratico 2	64
7.6	Sistemi di trasmissione digitali	66
7.6.1	Esempio Pratico	67
7.7	Interferenza Intersimbolica	68
7.7.1	Diagramma ad occhio	69
7.8	Criterio di Nyquist	70
7.8.1	Esempio Pratico 1	72
7.8.2	Alcune problematiche	73
7.9	Spettri a coseno rialzato	74
7.10	Equalizzatori	75
8	Sistemi Binari in Banda Base	77
8.0.1	Esempio Pratico	82
8.1	Filtro Adattato	84
8.1.1	Esempio Pratico	86
9	Calcolo di prestazioni di segnalazioni numeriche	88
9.1	Criterio di massima probabilità a posteriori	92
9.1.1	Regioni di Decisione	94
9.1.2	Criterio di minima distanza / Filtro Adattato	95
9.2	Primo Esempio di Trasmissione Multilivello	102
9.2.1	Probabilità di errore sui simboli	102

9.2.2	Probabilità di Errore sui bit	104
10	Modulazioni in Banda Traslata	106
10.1	ON-OFF Keying	107
10.1.1	Ricevitori ON-OFF Keying	108
10.1.2	ASK: Amplitude Shift Keying	109
10.2	PSK: Phase Shift Keying	110
10.2.1	PSK Binario: BPSK	110
10.2.2	MPSK: PSK Multilivello	112
10.3	FSK: Frequency Shift Keying	113
10.4	QAM: Quadrature Amplitude Modulation	114
11	Analisi delle Prestazioni delle Modulazioni Digitali	116
11.1	PSK (Phase Shift Keying)	116
11.2	QAM (Quadrature Amplitude Modulation	119
11.3	BPSK: Binary Phase Shift Keying	120
11.4	QPSK (Quadrature PSK)	121
11.4.1	Probabilità esatta sul bit	124
11.5	Union Bound	127
11.6	Cenni a Possibili Applicazioni	131
12	Multiplicazione	132
12.1	FDM: Frequency Division Multiplicity	133
12.2	TDM: Time Division Multiplicity	135
12.3	Applicazioni Pratiche: I Telefoni Cellulari	136
13	Codifica di Sorgente	137
13.1	Teoria dell'Informazione	139
13.1.1	Quantità di informazione	140
13.1.2	Entropia	141
13.1.3	Lunghezza media di codifica	142
13.1.4	Risultato fondamentale della teoria dell'informazione .	143
13.2	Codifica di Huffman	144
13.2.1	Esempio Pratico	145

Capitolo 1

Introduzione

Questa trattazione sarà incentrata sullo studio dei sistemi di trasmissione, sotto un punto di vista prettamente fisico (privilegiando lo studio dei mezzi, e dei sistemi di trasmissione, sugli aspetti prettamente retistici; ciò che studieremo saranno dunque semplicemente i veicoli per l'informazione, ossia i mezzi sui quali viaggeranno i vari segnali).

Studieremo sostanzialmente due tipi di sistemi di trasmissione, classificabili in base a ciò che trasmettono: sistemi di trasmissione analogici, e digitali.

1.1 Sistemi di trasmissione analogici

I sistemi di trasmissione analogici sono quelli in cui i segnali trasmessi hanno, nel dominio del tempo, un andamento continuo. Un esempio pratico di segnali di questo tipo è la voce umana: per quanto sia complesso come segnale, e quindi complicato il suo studio, essa di fatto è un segnale analogico.

Come è fatto un sistema analogico? Proponiamo il seguente schema:

A partire da una sorgente di segnale analogico (quale per esempio la voce umana) essa si può modellizzare come un segnale $v(t)$. Questo entra nel nostro sistema di trasmissione, incontrando per primo il trasmettitore analogico (Tx Analog), ossia un dispositivo in grado di adattare il segnale $v(t)$ al canale. A seconda del canale utilizzato (che esso sia doppino telefonico, piuttosto che un cavo coassiale, piuttosto che un cavo in fibra ottica), si avrà un trasmettitore Tx differente (in grado di trasformare il segnale $v(t)$ in un segnale elettrico piuttosto che luminoso piuttosto che altro...). Il canale è il mezzo attraverso cui scorrono le informazioni: esso è soggetto ad un fenomeno di disturbo, che degrada le comunicazioni: il rumore. Un esempio un po' banale di rumore è ad esempio, in un'aula, il vociare degli studenti:

considerando l'aria il canale trasmissivo, la voce di un docente la sorgente analogica, gli studenti parlando introducono rumore sulla voce del docente, che verso le ultime file si sentirà sempre peggio.

Fuori dal canale, vi sarà un ricevitore (Rx Analog): esso è un dispositivo duale al Tx, poichè traduce il segnale ricevuto dal canale in un formato interpretabile al ricevente della comunicazione, fornendo un segnale $v'(t)$. La qualità del canale si determina studiando quando $v(t)$ e $v'(t)$ siano simili, vicini; se capita che:

$$v(t) \simeq v'(t)$$

Possiamo dire che il sistema di trasmissione sia di buona qualità, poichè l'informazione arriva senza essere eccessivamente dispersa.

1.2 Sistemi di trasmissione digitali

Un sistema digitale è in grado di trasmettere segnali sia di tipo analogico che di tipo digitale (con un piccolo accorgimento): per i segnali digitali, il passaggio è banale: una sorgente di '0' e '1' entra nel trasmettitore Tx, e avverrà un processo simile a quello precedentemente descritto per i sistemi analogici; per quanto riguarda i segnali analogici, a monte del Tx servirà un convertitore analogico/digitale (A/D), ossia un dispositivo in grado di trasformare un segnale analogico in una sequenza di zeri ed uni. Vedremo diverse tecniche alla base delle quali si può realizzare un convertitore di questo tipo (per esempio mediante la Pulse Code Modulation PCM).

Il canale ha caratteristiche del tutto identiche a prima: dal momento che esso rappresenta solo una strada per l'informazione trasmessa dai segnali, possiamo immaginare intuitivamente che il fatto che vi passino dentro pacchetti discreti o un segnale continuo non modificherà le sue caratteristiche.

A seconda del prodotto che intendiamo ottenere, l'uscita potrà essere numerica (digitale), o analogica, mediante un convertitore digitale/analogico (D/A), ossia un duale del convertitore (A/D), in uscita dal ricevitore digitale Rx.

1.3 I decibel (dB)

In ambito di telecomunicazioni vengono usati molto sovente i dB . Il decibel (dB) viene definito come la minima variazione percepibile dall'orecchio umano. Vennero introdotti proprio in ambito di telecomunicazioni, da Bell, in ambito di studi di potenze: nella fatispecie, una misura in dB rappresenta

un rapporto di potenze. Il dB è dunque un'unità di misura relativa, adimensionata, dal momento che sta ad indicare semplicemente un guadagno. Un rapporto di potenze P_r , in dB , si rappresenta come:

$$P_r|_{dB} = 10 \log_{10} \frac{P_1}{P_2}$$

Si parla dunque di rapporto adimensionato, come abbiamo già detto.

Esiste un'alternativa non relativa ai dB , ossia i dB_m : si tratta di una potenza assoluta, rapportata alla potenza di riferimento di 1 mW:

$$P|_{dB_m} = 10 \log_{10} \frac{P}{1 \text{ mW}}$$

Possiamo dunque rappresentare qualsiasi grandezza in dB relativi, sia essa di potenza, o anche di tensione e corrente (piccola nota: la potenza è una grandezza quadratica; essendo la tensione o la corrente grandezze lineari, possiamo dire che il termine moltiplicativo non sarà più 10, ma 20; calcolare i decibel di una tensione in realtà sarebbe da fare sui decibel al quadrato, V^2 ; per le proprietà dei logaritmi, capita che:

$$10 \log_{10} V^2 = 2 \cdot 10 \log_{10} V = 20 \log_{10} V$$

quindi dovremo procedere con un termine moltiplicativo doppio).

Ultima nota: esistono conti più facili da fare degli altri, che permettono di stimare i dB a mente:

$$\frac{P_2}{P_1} = 10^n \xrightarrow{dB} n \cdot 10 \text{ dB}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = 2^n \xrightarrow{dB} n \cdot 3 \text{ dB}$$

A questo punto, una domanda esistenziale: perchè utilizzare unità logaritmiche? Le motivazioni dietro a queste scelte sono diverse:

- Sono facili da usare, nei sistemi: trasformano, di fatto, i prodotti in somme.
- Si eliminano le diatribe, le differenze, tra unità di misura lineari, quadratiche, rapporti, unità assolute: dB e dB_m si possono sommare o sottrarre tranquillamente, nei conti, qualsiasi sia la loro provenienza.

Capitolo 2

Nozioni Introduttive alle Telecomunicazioni

2.1 Rumore Termico

Come già accennato, il maggior degradatore di qualità delle comunicazioni in un sistema trasmissivo è il rumore. Nella fattispecie, il modello di rumore che utilizzeremo maggiormente è il rumore termico.

Cerchiamo di capire che cosa sia: dato un resistore, R , vediamo ciò:

$v(t)$ non è identicamente nulla, anche se il resistore non è alimentato da un generatore: questo perchè il moto termico degli elettroni genera una tensione di rumore variabile nel tempo, $v(t)$, a valor medio nullo. Alla base di questo tipo di rumore si fondano tutte le telecomunicazioni.

Esiste una condizione (termica) tale per cui il rumore termico è nullo: la temperatura di zero assoluto (0 K , -273.16 C); un modo di ridurre il rumore termico sarebbe dunque proprio quello di far lavorare i sistemi di trasmissione a temperature basse.

Si può dimostrare che la densità spettrale di potenza del processo $v(t)$, $\mathcal{P}_v \{f\}$, valga:

$$\mathcal{P}_v \{f\} = 2R \left[\frac{\hbar |\omega|}{2} + \frac{\hbar |\omega|}{e^{\frac{\hbar |\omega|}{kT}} - 1} \right]$$

In questo ambito, \hbar è la costante di Planck normalizzata per fattore 2π , k è la costante di Boltzmann, T la temperatura assoluta in kelvin del sistema.

Il primo termine è dovuto semplicemente al principio di indeterminazione di Heisenberg, e di solito sarà da considerarsi trascurabile, tranne che in ambito di comunicazioni ottiche.

Per temperatura standard, nel range di $0 \div 50$ C, e frequenze inferiori al terahertz (THz), potremo dire che:

$$\frac{\hbar |\omega|}{kT} \ll 1$$

In questo modo, potremo sviluppare l'espressione mediante polinomi di Taylor, ed ottenere dunque:

$$e^{\frac{\hbar |\omega|}{kT}} - 1 \sim \frac{\hbar |\omega|}{kT}$$

In questo modo, la densità spettrale di potenza diventerà semplicemente:

$$\mathcal{P}_v \{f\} \sim 2RkT$$

Il rumore termico è distribuito secondo una statistica gaussiana, a valore medio nullo. Quale sarà il suo valore efficace? Ricordiamo che la tensione ha valore efficace definito come la media quadratica delle tensioni (Root Mean Square, RMS):

$$V_{RMS} = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$$

RMS indica per l'appunto il valore efficace di una grandezza. Vediamo che:

$$V_{RMS} = \sqrt{\langle V^2 \rangle} = \sqrt{\int_{-B}^{+B} \mathcal{P}_v \{f\} df} = \sqrt{2RkT \int_{-B}^{+B} df} = \sqrt{4RkTB}$$

Si noti che, poichè la densità spettrale di potenza $\mathcal{P}_v \{f\}$ è in realtà indipendente dalla frequenza f , possiamo definire bianco questo rumore, questo tipo di processo casuale, poichè esso di fatto è uguale per qualsiasi frequenza (la trasformata di Fourier è una costante).

Possiamo dunque modellizzare questo fatto in questa maniera:

Supponendo che R sia un resistore ideale, totalmente privo di rumore termico, potremmo supporlo come alimentato da un segnale il cui valore efficace è quello appena misurato.

Analogamente, è possibile fare lo stesso discorso studiando una corrente $i(t)$: si arriverebbe a determinare un'espressione $\mathcal{P}_i \{f\}$, pari a:

$$\mathcal{P}_i \{f\} = \frac{2kT}{R}$$

2.2 Alcune note/ripassi

In ambito di telecomunicazioni, quella che si usa è sempre la densità spettrale di potenza; a meno che non venga detto l'opposto, inoltre, la potenza che viene sempre e comunque calcolata è la potenza disponibile, ossia su circuiti adattati (impedenza di carico equivalente al complesso coniugato dell'impedenza del generatore).

Consideriamo brevemente un esempio circuitale:

Vediamo, dall'elettrotecnica, che:

$$v_L(t) = \frac{v(t)}{2}$$

Da ciò, vediamo che la potenza sul carico sarà:

$$p_L(t) = \frac{v_L^2(t)}{R} = \frac{\left(\frac{v(t)}{2}\right)^2}{R} = \frac{V_{eff}^2}{4R} = \mathcal{P}_d\{f\}$$

Dove $\mathcal{P}_d\{f\}$ è la potenza disponibile.

Usando le relazioni prima individuate, vediamo che:

$$\mathcal{P}_d\{f\} = \frac{\mathcal{P}_L\{f\}}{4R} = \frac{2RkT}{4R} = \frac{kT}{2}$$

Questo è un risultato fondamentale, che ci permette di fare alcune osservazioni:

1. La potenza disponibile non dipende nè dalla resistenza, nè dalla frequenza.
2. Si tratta di una densità di potenza assoluta, poichè si misura in W/Hz : possiamo dunque dire che essa abbia un forte significato fisico.
3. Il risultato non dipende dal valore della resistenza in questione!
4. Se considerassimo un filtro passa basso con frequenza di cut-off B , l'uscita sarà semplicemente data da:

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_g\{f\} df = \mathcal{P}_v\{f\} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)| df = \frac{kT}{2} = 2B = kTB$$

Questo perchè $\mathcal{P}_v\{f\} = \mathcal{P}_v$: essa in realtà non dipende dalla frequenza f !

Questa è la potenza di rumore disponibile; come vediamo, è molto semplice da calcolare.

Mediante la definizione di potenza disponibile, e le conoscenze sui sistemi lineari e tempo-invarianti, è stato dunque possibile caratterizzare il rumore termico dei mezzi di comunicazione, o meglio di una semplice resistenza. Il passaggio 'generalizzante' verrà affrontato in seguito.

Abbiamo finora caratterizzato rumori termici, studiando una resistenza non alimentata. Naturalmente, è possibile studiare anche resistenze unite a sorgenti di segnale, alimentanti il nostro canale, ossia la nostra resistenza.

La sorgente S potrà apportare un contributo di rumore anche di natura non termica al sistema. Dal punto di vista sistemistico, dunque si introduce la temperatura equivalente di rumore, T_{eq} , come:

$$T_{eq} \triangleq \frac{\mathcal{P}_d(f_0)}{kB}$$

Dove f_0 è una certa frequenza di funzionamento, o un certo range di frequenze (indicato di solito con B).

La temperatura T_{eq} rappresenta, semplicemente, la temperatura della resistenza, non alimentata. Se avremo, oltre alla resistenza R modellizzante il canale, una sorgente S , T_{eq} sarà senza dubbio superiore alla sola T_R : di fatto la temperatura in senso fisico del sistema non cambia, però T_{eq} non ha un forte significato fisico: se si tratta di parlare di una resistenza non alimentata, $T_R = T_{eq}$, poichè l'unico elemento introducete rumore termico è proprio la temperatura del sistema; in caso di presenza di una sorgente, capita che anche essa introduce ulteriore rumore, ulteriore deterioramento del segnale, dell'informazione, quindi pur rimanendo uguale la temperatura del sistema, aumenterà T_{eq} .

T_{eq} è un parametro fittizio da noi introdotto al fine di quantificare il rumore del sistema: non è infatti generalmente possibile misurarla, poichè essa è priva di significato fisico, come appena detto.

T_{eq} permette di modellizzare un qualunque sistema di trasmissione come influenzato da solo rumore termico: se infatti consideriamo la relazione:

$$\mathcal{P}_d\{f\} = \frac{kT_{eq}}{2}$$

Vediamo che siamo in grado di caratterizzare anche una sorgente, oltre ad una resistenza sotto il punto di vista del rumore termico, mediante l'introduzione di questa temperatura equivalente.

2.3 Caratterizzazione dei Doppi Bipoli

Estendiamo ciò che abbiamo appena introdotto, parlando di doppi bipoli: un sistema di trasmissione è costituito da un certo numero di dispositivi, diblocchi, rappresentabili mediante doppi bipoli. Un doppio bipolo, dal punto di vista sistemistico, viene identificato mediante il suo guadagno, $\mathcal{G}_d \{f\}$:

$$\mathcal{G}_d \{f\} \triangleq \frac{\mathcal{P}_{out} \{f\}}{\mathcal{P}_{in} \{f\}}$$

Il tutto, ovviamente, considerando tutto adattato in impedenza.

Di fatto, $\mathcal{G}_d \{f\}$ rappresenta semplicemente il modulo quadro della funzione di trasferimento del blocco:

$$\mathcal{G}_d \{f\} = |H(f)|^2$$

Come si sa dalla Teoria dei Segnali, è possibile caratterizzare dunque un doppio bipolo sotto il punto di vista spettrale, come:

$$\mathcal{P}_{out} \{f\} = \mathcal{G}_d \{f\} \mathcal{P}_{in} \{f\}$$

Vogliamo dunque ora capire come si può caratterizzare un doppio bipolo sotto il punto di vista del rumore da esso prodotto; per fare ciò, utilizzeremo un piccolo stratagemma: consideriamo di trovarci in una certa banda, tale per cui il guadagno è costante, pari a $\mathcal{G}_d \{f\}$. Consideriamo dunque il doppio bipolo, chiuso al suo ingresso con una resistenza nota, R , a temperatura T_0 . Questo è di fatto un doppio bipolo reale, ossia guadagna $\mathcal{G}_d \{f\}$ rispetto all'ingresso, e produce al suo interno un certo rumore termico. Vediamo che:

$$\mathcal{P}_{out}^{(R)}(f) = \frac{kT_0}{2} \cdot \mathcal{G}_d \{f\} + \mathcal{P}_{int} \{f\}$$

In questo caso, $\mathcal{P}_{int} \{f\}$ rappresenta semplicemente la densità spettrale di potenza del rumore interno.

Abbiamo quindi un'amplificazione di $\mathcal{G}_d \{f\} = \mathcal{G}_d$ volte del rumore termico del solo resistore R , caratterizzato dalla temperatura T_0 , più un rumore interno, generato indipendentemente dall'ingresso.

Consideriamo poi un doppio bipolo ideale, chiuso (sulla stessa frequenza) sulla stessa resistenza alla stessa temperatura; la differenza fondamentale tra ideale e reale è il fatto che questo doppio bipolo al suo interno non produrrà rumore termico:

$$\mathcal{P}_{out}^{(I)}(f) = \frac{kT_0}{2} \cdot \mathcal{G}_d \{f\}$$

L'uscita di questo blocco avrà dunque solo l'amplificazione del rumore termico del resistore R , ma non rumori interni. Si definisce dunque a partire da queste due definizioni la cifra di rumore, $F(f)$, come:

$$F(f) = \frac{\mathcal{P}_{out}^{(R)}(f)}{\mathcal{P}_{out}^{(I)}(f)} = \frac{\frac{kT_0}{2} \cdot \mathcal{G}_d \{f\} + \mathcal{P}_{int} \{f\}}{\frac{kT_0}{2} \cdot \mathcal{G}_d \{f\}}$$

Notiamo che $F(f) \geq 1$; inoltre, spesso, la cifra di rumore $F(f)$ non varia con la frequenza; spesso e volentieri, dunque potremo permetterci di indicarla semplicemente come F , ossia come un semplice numero.

Si noti che tutto ciò è vero, date come verificate due ipotesi, che vogliamo ricordare:

1. Sistema adattato in impedenza (per poter utilizzare l'intera potenza disponibile, $\mathcal{P}_d \{f\}$);
2. $T_0 \simeq 290K$ (per poter utilizzare l'espressione approssimata mediante Taylor di $\mathcal{P}_v \{f\}$).

Tutti i conti che abbiamo fatto, e che faremo, sono facili solo a queste condizioni.

Esiste un altro modo, già visto, per caratterizzare i doppi bipoli sotto il punto di vista del rumore: il calcolo della temperatura equivalente di rumore, T_{eq} . Vediamo, banalmente, che:

$$\mathcal{P}_{out}^{(R)}(f) = \mathcal{G}_d \{f\} \frac{k}{2} [T_0 + T_{eq}(f)]$$

La T_{eq} al solito è una temperatura fittizia, rappresentante il solo contributo di rumore introdotto dal doppio bipolo. Considerando il guadagno $\mathcal{G}_d \{f\}$ invariante con la frequenza, quindi $\mathcal{G}_d \{f\} = \mathcal{G}_d$, vediamo che:

$$\mathcal{P}_{out}^{(R)}(f) = \frac{kT_0}{2} \mathcal{G}_d + \frac{kT_{eq}}{2} \mathcal{G}_d$$

Dove il primo termine è dovuto al solo rumore termico prodotto dal resistore, ed il secondo al rumore interno del doppio bipolo, generato dunque dal doppio bipolo reale.

Anche per quanto riguarda la temperatura equivalente di rumore, spesso si ha invarianza al variare della frequenza, e dunque anche in questo caso $T_{eq}(f) = T_{eq}$

Abbiamo introdotto dunque, per quanto riguarda la caratterizzazione dei doppi bipoli, due metodi, due parametri; essi sono compatibili tra di loro, ed

esistono formule di conversione in grado di permetterci di passare da cifra di rumore a temperatura; vediamo come ricavarle; abbiamo visto che:

$$\mathcal{P}_{out}^{(R)}(f) = \mathcal{G}_d \{f\} \frac{k}{2} (T_0 + T_{eq}(f))$$

oppure

$$\mathcal{P}_{out}^{(R)}(f) = \mathcal{G}_d \{f\} \frac{kT_0}{2} F(f)$$

Consideriamo la prima relazione, portiamo fuori dalla parentesi il termine T_0 , e vediamo che:

$$\mathcal{P}_{out}^{(R)}(f) = \mathcal{G}_d \{f\} \frac{k}{2} (T_0 + T_{eq}(f)) = \mathcal{G}_d \{f\} \frac{kT_0}{2} \left(1 + \frac{T_{eq}(f)}{T_0} \right)$$

Ora, poniamo uguali le due equazioni, e vediamo che:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_d \{f\} \frac{kT_0}{2} \left(1 + \frac{T_{eq}(f)}{T_0} \right) &= \mathcal{G}_d \{f\} \frac{kT_0}{2} F(f) \\ \implies F(f) &= 1 + \frac{T_{eq}}{T_0} \iff T_{eq} = T_0(F(f) - 1) \end{aligned}$$

Utilizzando queste definizioni, è dunque possibile caratterizzare un doppio bipolo.

Introduciamo un'ulteriore grandezza, al fine di caratterizzare i doppi bipoli, grandezza che utilizzeremo moltissimo per tutta la trattazione: il SNR (Signal to Noise Ratio): ossia una grandezza esprime il rapporto segnale/rumore, il rapporto tra potenza disponibile, p_s , e potenza di rumore, $p_n = kTB$ (come già calcolato in precedenza).

2.3.1 Esempio Pratico

Consideriamo un esempio pratico molto significativo, al fine di legare, almeno per quanto riguarda (per ora) un caso particolare, il rapporto segnale/rumore con la cifra di rumore (e quindi la temperatura equivalente).

Consideriamo il seguente sistema:

Per calcolare $\frac{S}{N}|_{in}$, dovremo considerare solo ciò che si trova 'a sinistra' dei morsetti 1 e 1', chiudendo in un resistore R adattante il carico:

Per calcolare $\frac{S}{N}|_{out}$ dovremo invece calcolare la potenza in uscita, rapportata con il rumore, anch'esso amplificato da \mathcal{G}_d :

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{out} = \frac{p_s \mathcal{G}_d}{kTB \cdot F \cdot \mathcal{G}_d} = \frac{p_s}{kTB \cdot F}$$

Osserviamo una cosa: effettuando il rapporto tra il rapporto segnale/rumore in ingresso, ed il rapporto segnale/rumore in uscita, otterremo:

$$\frac{\left. \frac{S}{N} \right|_{in}}{\left. \frac{S}{N} \right|_{out}} = F$$

Ciò si verifica semplicemente, dal momento che tutti i termini si vanno a semplificare tra di loro.

2.4 Interconnessione di doppi bipoli

Estendiamo ulteriormente le nostre conoscenze, partendo dalla definizione di rapporto segnale/rumore per un singolo doppio bipolo, ad una cascata di doppi bipoli.

Cerchiamo di studiare, a partire da un semplice esempio, una teoria generale sulle interconnessioni; vediamo:

Ragioniamo per gradi: calcoliamo $\mathcal{P}_{out}^{(1)}(f)$, semplicemente come:

$$\mathcal{P}_{out}^{(1)}(f) = \frac{k}{2} \mathcal{G}_{d,1} (T_0 + T_{eq,1})$$

Per quanto riguarda il secondo blocco, avremo due contributi: quello dell'ingresso $\mathcal{P}_{out}^{(1)}(f)$ appena calcolato, amplificato da $\mathcal{G}_{d,2}$, ed il contributo interno di rumore, quantificabile mediante la $T_{eq,2}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{out}^{(2)}(f) &= \mathcal{P}_{out}^{(1)}(f) \cdot \mathcal{G}_{d,2} + \frac{kT_{eq,2}}{2} \mathcal{G}_{d,2} = \\ &= \frac{k}{2} [\mathcal{G}_{d,1} \mathcal{G}_{d,2} T_0 + \mathcal{G}_{d,1} \mathcal{G}_{d,2} T_{eq,1} + \mathcal{G}_{d,2} T_{eq,2}] = \\ &= \frac{k}{2} \mathcal{G}_{d,1} \mathcal{G}_{d,2} \left[T_0 + T_{eq,1} + \frac{T_{eq,2}}{\mathcal{G}_{d,1}} \right] \end{aligned}$$

Da ciò si evince che, volendo modellare il blocco di due sistemi $\mathcal{G}_{d,1}$ e $\mathcal{G}_{d,2}$ come un unico, vediamo che esso avrebbe:

$$\mathcal{G}_{d,eq} = \mathcal{G}_{d,1} \cdot \mathcal{G}_{d,2}$$

$$T_{eq,TOT} = T_{eq,1} + \frac{T_{eq,2}}{\mathcal{G}_{d,1}}$$

Generalizziamo dunque ciò, per una generica cascata di M doppi bipoli:

$$G_{d,eq} = \prod_{i=1}^M \mathcal{G}_{d,i}$$

$$T_{eq,TOT} = \sum_{i=1}^M \frac{T_{eq,i}}{\prod_{j=1}^{i-1} \mathcal{G}_{d,j}}$$

Da queste formule, specialmente per quanto riguarda la seconda, possiamo evincere un fatto di notevole rilevanza: ai fini di avere buona qualità di trasmissione, la $T_{eq,TOT}$, rappresentante la temperatura equivalente di rumore del sistema, deve essere bassa (ovviamente, in modo da aumentare il rapporto segnale rumore); per questo motivo, sarà necessario che i primi blocchi del sistema, ossia i primi blocchi che il segnale incontrerà a partire dalla sorgente, abbiano una T_{eq} bassa, e cioè producano poco rumore interno, siano di buona qualità. Per questo motivo, un buon sistema di amplificazione deve avere un preamp molto fedele: i primi doppi bipoli sono i più influenti, poichè negli altri la T_{eq} viene divisa per il prodotto dei guadagni di tutti i blocchi precedenti, risultando essere meno importante.

Esiste una formula, facilmente ricavabile a partire dalla precedente, per la cifra di rumore equivalente:

$$F_{eq} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{\mathcal{G}_{d,1}} + \frac{F_3 - 1}{\mathcal{G}_{d,1}\mathcal{G}_{d,2}} + \dots$$

2.4.1 Esempio Pratico

Proponiamo a questo punto un esempio pratico molto importante, prima di passare alla trattazione del prossimo argomento. Consideriamo il calcolo della cifra di rumore di un attenuatore passivo.

Un tipico attenuatore passivo, è un pezzo di cavo coassiale. Spesso, parlando di attenuatori, al posto di parlare di guadagno \mathcal{G}_d , si parla di attenuazione L , definita come:

$$L \triangleq \frac{1}{\mathcal{G}_d} = \frac{\mathcal{P}_{in}}{\mathcal{P}_{out}}$$

Avremo dunque, nell'ambito di questo esempio, a che fare con un sistema di questo tipo:

Il coassiale ha un'impedenza R , quindi il sistema si può ritenere adattato, e supponiamo di trovarci a $T \simeq 290$ K.

Dalla teoria dei Campi Elettromagnetici, si vede che:

Possiamo dunque studiare tutto il sistema resistore + coassiale come un unico resistore, e quindi:

$$\mathcal{P}_{out} \{f\} = \frac{kT_0}{2}$$

Studiando il circuito intero, e non il semplice equivalente, vedremo che:

$$\mathcal{P}_{out} \{f\} = \frac{kT_0}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot F_{att}$$

Dove F_{att} è la cifra di rumore introdotta dall'attenuatore (coassiale); eguagliando le due espressioni della potenza in uscita, si vede che:

$$\begin{aligned} \frac{kT_0}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot F_{att} &= \frac{kT_0}{2} \\ \implies \frac{1}{L} \cdot F_{att} &= 1 \implies F_{att} = L \end{aligned}$$

Cosa abbiamo ricavato? Per quanto riguarda un attenuatore passivo (nella fattispecie in questo caso abbiamo studiato un cavo coassiale) la cifra di rumore dell'attenuatore è pari all'attenuazione: un attenuatore passivo non modifica la cifra di rumore che vi passa dentro; si noti che ovviamente il rapporto segnale/rumore diminuirà: se la cifra di rumore resta invariata, poichè l'attenuatore passivo introduce tanto rumore quanto ne toglie, ma il segnale viene attenuato, avremo una diminuzione del SNR.

Capitolo 3

Cenni alle Equazioni di Propagazione

I sistemi di trasmissione, sotto il punto di vista del canale trasmissivo utilizzato, si possono dividere in due categorie:

- Via cavo: l'attenuazione è data da un fattore $e^{-\gamma z}$, dove z è la lunghezza del cavo, e γ è un parametro variante con il tipo di cavo (coassiale piuttosto che ottico piuttosto che altro...);
- Via etere: l'attenuazione è data da una funzione del tipo $\frac{k}{z^2}$, dove z è la distanza tra trasmettitore e ricevitore.

3.1 Sistemi via cavo

Nei sistemi via cavo si avrà una certa potenza di uscita, rispetto ad una di ingresso, legate da una funzione esponenziale (come appena accennato):

$$\mathcal{P}_{out} = \mathcal{P}_{in} \cdot e^{-\gamma z}$$

γ dipende dal tipo di cavo, ma anche dalla frequenza di trasmissione (generalmente): considerando ciò in dB_m :

$$\mathcal{P}_{out}|_{dB_m} = \mathcal{P}_{in}|_{dB_m} + 10 \log_{10} e^{-\gamma z}$$

Effettuando un cambio di base, con le proprietà dei logaritmi, vediamo che:

$$10 \log_{10} e^{-\gamma z} = \frac{10 \ln e^{-\gamma z}}{\ln(10)} = 10 \cdot \frac{-\gamma z}{\ln(10)} = -\frac{10}{\ln(10)} \gamma z$$

Normalmente, i costruttori non dichiarano il parametro γ , bensì un parametro α , definito come:

$$\alpha = \frac{10}{\ln(10)} \cdot \gamma \Big|_{dB_m}$$

Da qua, possiamo vedere banalmente che:

$$\mathcal{P}_{out}|_{dB_m} = \mathcal{P}_{in}|_{dB_m} \cdot (-\alpha z)$$

Nota: l'attenuazione in dB, rispetto alla lunghezza del cavo, è una funzione lineare!

Nei datasheet il termine α spesso viene misurato in $\frac{dB}{100\ m}$, $\frac{dB}{m}$, $\frac{dB}{100\ km}$...

Ciò che si potrebbe evincere confrontando gli α dei vari mezzi trasmissivi, potremmo vedere che la fibra ottica, per quanto riguarda le alte distanza e le alte frequenze, è il mezzo trasmissivo più idoneo: $\alpha \simeq 0.2\ dB/km$ su frequenze fino ai THz. Le trasmissioni chilometriche, per questo motivo, vengono fatte sempre e comunque in fibra ottica (quantomeno senza parlare di ponti radio).

3.2 Sistemi via Etere

per quanto riguarda la trasmissione via etere, per trasmettere si utilizzano antenne:

La potenza al ricevitore, \mathcal{P}_{Rx} , dipende da alcuni fattori:

- Dalla potenza trasmessa, \mathcal{P}_{Tx} ;
- Dalla distanza tra le due antenne, R ;
- Dalle caratteristiche delle antenne tramettitrice e ricevitrice.

Viene creato, per studiare le antenne, un modello ideale, alla base del quale si studiano tutti gli altri tipi di antenne: le antenne isotropiche.

Si definiscono antenne isotropiche quelle che idealmente emettono in tutte le direzioni allo stesso modo; la densità spettrale di potenza dell'antenna isotropica sarà dunque uguale a:

$$\mathcal{P}_{out} = \frac{\mathcal{P}_{in}}{4\pi R^2}$$

Allo stesso modo si definisce il guadagno rispetto al radiatore isotropico, G : esso sarà un riferimento per ogni altra antenna, di qualsiasi tipo.

Per un'antenna qualunque, caratterizzata dunque da questo parametro G , la densità di potenza spaziale sarà data da:

$$\mathcal{P}_{out} = G \cdot \frac{\mathcal{P}_{in}}{4\pi R^2}$$

Altro parametro che può tornare utile definire è l'area ricevente: A_{Rx} . Essa dipende sostanzialmente dalla dimensione dell'antenna, dalla sua forma, e dall'allineamento delle antenne:

$$p_{Rx} = \frac{G_{Tx}}{4\pi R^2} A_{Rx}$$

Un'antenna si può utilizzare però in realtà sia come ricevitore che come trasmettitore; a tale proposito, esiste una condizione, detta 'di reciprocità', che afferma che:

$$\frac{A_{eq}}{G} = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Dove λ è la lunghezza, d'onda, definita come:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

Dove c è la velocità della luce.

Possiamo dunque scrivere l'equazione di propagazione come:

$$p_{Rx} = p_{Tx} \cdot \frac{G_{Tx} \cdot G_{Rx}}{\left[\frac{4\pi R}{\lambda}\right]^2}$$

$$p_{Rx} = p_{Tx} \cdot \frac{A_{Tx} \cdot A_{Rx}}{(\lambda R)^2}$$

Capitolo 4

Introduzione alla trasmissione analogica

Al fine di introdurre in maniera formale e corretta le tecniche di trasmissione analogica, introduciamo un mezzo matematico fondamentale, che ci accompagnerà per tutta la trattazione delle modulazioni analogiche: il segnale analitico.

4.1 Il Segnale Analitico

Ai fini di disporre di un buon formalismo matematico, in grado di studiare e modellizzare le modulazioni analogiche, come appena detto, introduciamo la notazione del segnale analitico: dato $v(t)$ un segnale reale che intendiamo studiare, esso si può di fatto scrivere come:

$$v(t) = \Re e [g(t)e^{j2\pi f_c t}] = x(t) \cos(2\pi f_c t) - y(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Noi trattiamo di fatto solo segnali reali; al fine di semplificare notevolmente i conti, conviene utilizzare i numeri complessi, come stiamo scegliendo di fare. Alcune nomenclature sono a questo punto d'obbligo, prima di addentrarci negli studi:

- $g(t)$ è detto 'involuppo complesso' del segnale $v(t)$: esso è un segnale in banda base, ossia il cui spettro in frequenza è centrato sulla frequenza nulla, $f = 0$. $g(t)$ è in genere una funzione complessa, che si può esprimere come:

$$g(t) = x(t) + jy(t)$$

- $x(t)$ è detta 'componente in fase', $y(t)$ è detta 'componente in quadratura';
- $g(t)e^{j2\pi f_c t}$ è il segnale analitico (di cui noi consideriamo esclusivamente la parte reale).
- $e^{j2\pi f_c t}$ è detta 'portante' del segnale analitico

4.2 Proprietà del segnale analitico

Studiamo, a questo punto, le proprietà legate a questo tipo di notazione.

4.2.1 Spettro del Segnale Analitico

Lo spettro in frequenza di $v(t)$, ossia $\mathcal{F}\{v(t)\} = V(f)$, ossia la trasformata di Fourier del segnale $v(t)$, sarà:

$$V(f) = \frac{1}{2} [G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)]$$

Dimostrazione

Avevamo detto che:

$$v(t) = \operatorname{Re} [g(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

Dalla teoria dei numeri complessi, sappiamo che:

$$\operatorname{Re} [z] = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^*$$

Da qua:

$$v(t) = \frac{1}{2}g(t)e^{j2\pi f_c t} + \frac{1}{2}g^*(t)e^{-j2\pi f_c t}$$

Come sappiamo ora dalla Teoria dei Segnali, la Trasformata di Fourier di questo termine vale:

$$\begin{aligned} V(f) &= \frac{1}{2}G(f) \otimes \delta(f - f_c) + \frac{1}{2}G^*(-f) \otimes \delta(f + f_c) \\ &= \frac{1}{2} [G(f - f_c) + G^*(-(f + f_c))] = \frac{1}{2} [G(f - f_c) + G^*(-f - f_c)] \end{aligned}$$

Dunque, la Trasformata di Fourier di $v(t)$ prende lo spettro dell'involuppo complesso $g(t)$, ossia $G(f)$, di esso ne produce due repliche di ampiezza dimezzata, le trasla alla frequenza f_c e $-f_c$, e quella nelle frequenze negative verrà ribaltata rispetto all'asse delle ordinate.

Si noti che l'ampiezza di banda occupata dalle repliche coincide esattamente con quella occupata dallo spettro in frequenza dell'involuppo complesso, $G(f)$.

4.2.2 Densità Spettrale di Potenza del Segnale Analitico

Questa proprietà, che utilizzeremo largamente, è una diretta conseguenza della prima proprietà: la densità spettrale di potenza del segnale $v(t)$, $\mathcal{P}_v\{f\}$, vale:

$$\mathcal{P}_v\{f\} = \frac{1}{4} [\mathcal{P}_g(f - f_c) + \mathcal{P}_g(-f - f_c)]$$

Dimostrazione

Sappiamo che la potenza di un segnale si può calcolare mediante un momento secondo:

$$p_v = \langle v^2(t) \rangle$$

Utilizzando l'eguaglianza di Parseval, possiamo vedere che:

$$\langle v^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_v\{f\} df = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_g(f - f_c) df + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_g(-f - f_c) df$$

La potenza totale del segnale sarà dunque:

$$p_v = \frac{1}{4} p_g + \frac{1}{4} p_g = \frac{1}{2} p_g$$

Questo risultato è una generalizzazione di un famoso teorema di Elettrotecnica, che afferma che:

$$p[A \cos(2\pi f_c t)] = \frac{A^2}{2}$$

I sistemi di trasmissione che studieremo saranno quasi esclusivamente analizzati a partire dalle potenze, e dalle densità spettrali di potenza; per questo motivo, questa proprietà è fondamentale.

Spessissimo dovremo studiare sistemi di trasmissione in banda traslata, ossia 'non in banda base': per questo motivo, dovremmo introdurre nozioni sui filtri passa banda, ed appesantire ulteriormente i conti da svolgere. Una cosa intelligente da fare, per ora, fino a quando non si affermerà il contrario, sarà considerare il solo inviluppo complesso, $g(t)$, facendo i conti su di esso, dal momento che è situato in banda base. Traslando il tutto in banda base, dunque, è possibile ignorare temporaneamente la portante, facilitando notevolmente i calcoli da eseguire.

4.3 Caratterizzazione del rumore mediante il segnale analitico

Finora, mediante il formalismo del segnale analitico, abbiamo caratterizzato solamente generici segnali reali; occupiamoci ora della caratterizzazione del rumore, in termini di segnale analitico.

Il rumore per noi sarà sempre e comunque un processo casuale gaussiano bianco. Consideriamo dunque il segnale di rumore $n(t)$ come:

$$n(t) = \Re e [\hat{n}(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

Dove $\hat{n}(t)$ è l'inviluppo complesso del segnale rumoroso. $\hat{n}(t)$ sarà un segnale in banda base, e sarà esprimibile come:

$$\hat{n}(t) = n_1(t) + jn_2(t)$$

Poichè $\hat{n}(t)$ è un processo casuale, anche $n_1(t)$ e $n_2(t)$ lo saranno; scrivere il rumore come segnale analitico ci permette di distinguere le componenti spettrali presenti nel filtro.

Possiamo dunque scrivere:

$$n(t) = \Re e [\hat{n}(t)e^{j2\pi f_c t}] = n_1(t) \cos(2\pi f_c t) - n_2(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Dove $n_1(t)$ ed $n_2(t)$ sono processi reali gaussiani bianchi scorrelati. Inoltre,

Capitolo 5

Modulazioni di Ampiezza (AM)

La modulazione di ampiezza è la più semplice da studiare delle modulazioni analogiche esistenti, e fu inventata da Guglielmo Marconi nel 1895. A partire da qua vi fu un susseguirsi di passi in avanti: nel 1901 si fece il primo messaggio transatlantico, nel 1906 le prime AM Broadcast vere e proprie, e nel 1920 venne prodotta la prima radio commerciale.

Dobbiamo parlare della modulazione AM ma... cosa si intende per 'modulazione'? Cerchiamo di spiegarlo: dato un segnale $m(t)$ in banda base, lo si modifica in modo da traslare lo spettro attorno ad una certa frequenza f_c , detta 'portante'; a questo punto si trasmetterà mediante sistemi di trasmissione il segnale così ricavato, e si farà in modo da riottenere, in fase di ricezione, un segnale simile al $m(t)$ di partenza. Si parla in sostanza dunque di studio di segnali in banda traslata: le nostre conoscenze sul segnale analitico ci verranno incontro, al fine di semplificarci i conti.

Parliamo ora più nel dettaglio di modulazione di ampiezza: il segnale $m(t)$ viene di solito chiamato 'segnale modulante', ed è il contenitore delle informazioni utili che intendiamo trasmettere. Spieghiamoci meglio: ciò che intendiamo trasmettere da un posto ad un altro mediante il sistema di trasmissione, come per esempio una voce, o un insieme di informazioni, è costituito e modellizzato da un segnale analogico (continuo) al variare del tempo t , che verrà traslato in frequenza (dal momento che se tutti trasmettessero sulla stessa frequenza ci sarebbero enormi problemi di compatibilità tra le trasmissioni).

L'involuppo complesso di un segnale AM sarà:

$$g(t) = A_C[1 + m(t)]$$

A_C è una costante regolante la potenza dell'involuppo complesso utiliz-

zato nella trasmissione. L'involuppo complesso permetterà la definizione del segnale analitico come:

$$g(t)e^{j2\pi f_c t} \implies A_C[1 + m(t)]e^{j2\pi f_c t}$$

Consideriamo ora alcune ipotesi fondamentali, che saranno sempre considerate verificate nei calcoli che faremo da ora in avanti:

- A_C è un numero reale, poichè regola esclusivamente il modulo della potenza del segnale da trasmettere;
- $m(t)$ è un segnale reale, a media nulla, ergodico (ossia in cui le media di insieme coincidono alle media nel tempo: $\mathbb{E}[\cdot] \equiv \langle \cdot \rangle$), stazionario;
- $m(t) \in [-1; 1]$: questa ipotesi è generalmente verificata in ambito di modulazioni AM, anche se più avanti cercheremo di modificarla mediante alcuni accorgimenti e varianti sulla modulazione).

Date le suddette ipotesi, il segnale modulato, $s(t)$, si definisce come la parte reale del segnale analitico prima introdotto; poichè il blocco $A_C[1 + m(t)]$ è reale, per ipotesi, avremo:

$$s(t) = \Re [A_C[1 + m(t)]e^{j2\pi f_c t}] = A_C[1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

Cerchiamo di interpretare, geometricamente, questo tipo di formula: dato il segnale modulante $m(t)$, lo si trasla di 1 verso l'alto, e si considera assieme ad esso il suo simmetrico rispetto all'asse delle ascisse; la figura geometrica così ottenuta sarà l'involuppo di un coseno di frequenza f_c .

Considerazione ovvia da farsi è la seguente: il segnale $m(t)$ deve variare molto più lentamente della portante; se non fosse così, infatti, sarebbe molto complicato distinguere l'involuppo, e quindi in seguito demodulare.

In base alle nostre attuali conoscenze, dunque, calcoliamo la densità spettrale di potenza del segnale modulato $s(t)$: partiamo dallo spettro del solo segnale $g(t)$:

$$\mathcal{P}_s\{f\} = \frac{1}{4}\mathcal{P}_g(f - f_c) + \frac{1}{4}\mathcal{P}_g(-f - f_c)$$

Sappiamo che però:

$$g(t) = A_C[1 + m(t)]$$

Sfruttando l'ipotesi di stazionarietà abbiamo la garanzia che le medie siano costanti; l'ergodicità inoltre ci permette di calcolare i valori attesi

come medie nel tempo. Utilizzando dunque la definizione di funzione di autocorrelazione per un segnale stazionario, vediamo che:

$$\mathcal{R}_g(\tau) = \mathbb{E} [g(t) \cdot g^*(t + \tau)]$$

Utilizzando dunque la linearità dell'operatore valore atteso, e l'ergodicità, otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_g(\tau) &= A_C^2 \mathbb{E} [(1 + m(t)) \cdot (1 + m(t + \tau))] = \\ &= A_C^2 \mathbb{E} [1 + m(t + \tau) + m(t) + m(t)m(t + \tau)] = \end{aligned}$$

Applicando la linearità:

$$= A_C^2 [\mathbb{E} [m(t + \tau)] + \mathbb{E} [m(t)] + \mathbb{E} [m(t + \tau) \cdot m(t)]]$$

Applicando l'ergodicità:

$$= A_C^2 [1 + \langle m(t + \tau) \rangle + \langle m(t) \rangle + \langle m(t + \tau) \cdot m(t) \rangle]$$

Poichè il processo $m(t)$ è a media nulla per ipotesi, e poichè un ritardo sul processo τ non influisce sulla media, potremo dire che $\langle m(t) \rangle = 0$, e $\langle m(t + \tau) \rangle = 0$.

Si noti, inoltre, che:

$$\langle m(t + \tau) \cdot m(t) \rangle = \mathcal{R}_m(\tau)$$

Concludiamo, dicendo:

$$\mathcal{R}_g(\tau) = A_C^2 [1 + \mathcal{R}_m(\tau)]$$

Trovata dunque la funzione di autocorrelazione, possiamo calcolare con molta semplicità la potenza dell'involuppo complesso, $g(t)$, come:

$$\mathcal{P}_g \{f\} = \mathcal{F} \{\mathcal{R}_g\} = A_C^2 [\delta(f) + \mathcal{P}_m \{f\}]$$

Essendo A_C e $m(t)$ reali, lo spettro di potenza sarà, come sappiamo dalla Teoria dei Segnali, una funzione pari.

Lo spettro di potenza sarà composto dallo spettro di $m(t)$, più una $\delta(f)$, rappresentante la portante del segnale analitico. L'occupazione in banda di questo segnale, di questo spettro, è pari alla banda B , ossia alla banda unilatera del segnale $m(t)$.

Possiamo a questo punto calcolare la densità di potenza del segnale modulato, $s(t)$, come:

$$\mathcal{P}_s \{f\} = \frac{1}{4} [A_C^2 [\delta(f - f_c) + \mathcal{P}_m(f - f_c)] + A_C^2 [\delta(-f - f_c) + \mathcal{P}_m(-f - f_c)]]$$

Dal momento che sia la $\delta(f)$ che la $\mathcal{P}_m(f)$ sono funzioni pari, possiamo riscrivere con più semplicità l'espressione della densità spettrale di potenza del segnale modulato, come:

$$\mathcal{P}_s \{f\} = \frac{1}{4} A_C^2 [\delta(f - f_c) + \mathcal{P}_m(f - f_c) + \delta(f + f_c) + \mathcal{P}_m(f + f_c)]$$

Avremo dunque, geometricamente parlando, una figura di questo genere:

Il segnale modulato avrà occupazione spettrale doppia rispetto al modulante (prima potevamo considerare esclusivamente la banda unilatera, ora non possiamo più farlo perchè abbiamo traslato gli spettri sulla portante f_c). Si noti che $\delta(f - f_c)$ e $\delta(f + f_c)$ non contengono informazioni: sono di fatto inutili sotto il punto di vista dell'informazione, ma sono derivanti dal risultato della traslazione del segnale di partenza, $m(t)$, di 1 (fatta al momento della definizione dell'involuppo complesso $g(t)$).

5.1 Potenza del segnale $s(t)$

Sappiamo, dalla teoria, che:

$$p_s = \frac{1}{2} p_g$$

Dove p_g si riferisce all'involuppo complesso $g(t)$, definito come:

$$g(t) = A_C [1 + m(t)]$$

La potenza di $g(t)$ si può facilmente calcolare come:

$$p_g = \langle g^2(t) \rangle = \langle A_C^2 [1 + m(t)]^2 \rangle = A_C^2 \langle 1 + m^2(t) + 2m(t) \rangle =$$

Usando la proprietà di linearità:

$$= A_C [1 + \langle m^2(t) \rangle + 2 \langle m(t) \rangle]$$

Ricordiamo che $m(t)$ è un processo casuale a media nulla, e quindi:

$$= A_C^2 [1 + \langle m^2(t) \rangle] = A_C^2 [1 + p_m]$$

Sarebbe ovviamente possibile arrivare allo stesso risultato senza utilizzare la generalizzazione del teorema di Elettrotecnica precedentemente introdotta, passando per la densità spettrale di potenza $\mathcal{P}_s\{f\}$; ciò sarebbe molto più complicato di ciò che abbiamo usato, e dunque è sconsigliato.

5.2 Percentuali di Modulazione

Per quanto riguarda le modulazioni analogiche AM, si introduce il concetto di percentuale di modulazione, legato a come (o, in un certo senso, a 'quanto') il segnale modulante è stato modulato; questa definizione viene sintetizzata in tre definizioni fondamentali:

1. Percentuale di modulazione totale: detti A_{MAX} il valore massimo dell'involuppo una volta che è stato traslato verso l'alto di '1', e A_{min} il valore minimo, ciascuno di essi legati ad un valore rispettivamente massimo e minimo del segnale $m(t)$, m_{MAX} e m_{min} , avremo:

$$A_{MAX} = A_C[1 + m_{MAX}]$$

$$A_{min} = A_C[1 + m_{min}]$$

Dove abbiamo che:

$$\begin{cases} m_{MAX} = \max \{m(t)\} \\ m_{min} = \min \{m(t)\} \end{cases}$$

Si definisce dunque la percentuale totale di modulazione come:

$$\%_{MOD} \triangleq \frac{A_{MAX} - A_{min}}{2A_C} \cdot 100$$

Svolgendo i calcoli:

$$\implies \frac{A_C[1 + m_{MAX}] - A_C[1 + m_{min}]}{2A_C} \cdot 100 = \frac{m_{MAX} - m_{min}}{2} \cdot 100$$

2. Percentuale di modulazione negativa: partendo dagli stessi valori A_{MAX} e A_{min} precedentemente introdotti, definiamo la percentuale di modulazione negativa come:

$$\%_{MOD,-} \triangleq \frac{A_C - A_{min}}{A_C} \cdot 100 = -\min \{m(t)\} \cdot 100$$

3. Percentuale di modulazione positiva: partendo dagli stessi valori appena utilizzati, si definisce la percentuale di modulazione positiva come:

$$\%_{MOD,+} \triangleq \frac{A_{MAX} - A_C}{A_C} \cdot 100 = \max \{m(t)\} \cdot 100$$

Alcune osservazioni su questa definizione appena introdotta: se il massimo di $m(t)$ fosse +1, ed il minimo -1, le percentuali di modulazione totale, negativa, e positiva, sarebbero tutte pari al 100 %, come si può vedere banalmente sostituendo i valori nelle espressioni.

Solitamente, nelle modulazioni AM standard, si vuole che $[1 + m(t)]$ sia maggiore o uguale di 1, per ogni t , e quindi:

$$[1 + m(t)] \geq 1 \implies m(t) \geq -1$$

Come mai siamo così interessati ad una condizione di questo genere? La risposta è semplice, e legata all'elettronica: il fatto che non si possano usare sovramodulazioni, ossia modulazioni in cui una o più delle percentuali di modulazione sono superiori al 100 %, è dovuta al tipo di circuito di demodulazione: se sono rispettate le condizioni che abbiamo richiesto, è possibile utilizzare come circuito di demodulazione il rivelatore di involuppo, ossia un banale circuito con un diodo in serie all'ingresso ed un filtro RC subito dopo.

Questo circuito cosa fa? Vediamo brevemente: il diodo seleziona esclusivamente le arcate positive del segnale modulato; questa parte selezionata dal filtro verrà dunque inviata in un filtro passa-basso, che produrrà un segnale in uscita simile al $m(t)$ di partenza (o quantomeno è ciò che desidereremmo).

Ci poniamo dunque un quesito sul quesito: perchè la sovramodulazione non ci piace: vediamolo da dei disegni:

Il segnale ricostruito è visibilmente diverso da quello di partenza, perchè la sovramodulazione ha provocato un effetto di distorsione, dal momento che è sì stata tagliata la parte negativa del segnale, ma quando è stata compiuta l'operazione di simmetrizzazione del segnale alto, una parte è finita nel semipiano positivo, creando dunque un effetto di distorsione. Se vogliamo dunque utilizzare il rivelatore di involuppo, le percentuali di modulazione dovranno essere sempre e comunque al più pari al 100 %.

5.3 Efficienze di Modulazione

Introduciamo un'ulteriore definizione, utile ai fini dello studio della modulazione AM: le efficienze di modulazione.

Mentre le percentuali di modulazione si riferivano esclusivamente allo studio delle ampiezze del segnale modulato, le efficienze studiano le energie (o meglio, le potenze) trasmesse.

Ricordiamo che:

$$p_s = \frac{1}{2}p_g = \frac{1}{2}A_C^2 + \frac{1}{2}A_C^2 \langle m^2(t) \rangle$$

Il primo termine è dovuto alla potenza sprecata nel trasmettere la portante, mentre il secondo è riferito alla potenza utilizzata al fine della trasmissione dell'informazione utile, quindi potremmo chiamarla 'potenza utile'. Definiamo dunque l'efficienza di modulazione come il rapporto tra la potenza utile p_u e la potenza totale del segnale modulato p_s :

$$E_{\%} = \frac{p_u}{p_s} = \frac{\frac{1}{2}A_C^2 \langle m^2(t) \rangle}{\frac{1}{2}A_C^2 + \frac{1}{2}A_C^2 \langle m^2(t) \rangle} \cdot 100$$

Possiamo intuitivamente dire che il segnale che trasmetterà più potenza utile sarà la costante, 1 (per non avere sovramodulazione): vediamo infatti che, se $m(t) = 1$, o meglio un'onda quadra di duty cycle 50%, avremo la massima efficienza di modulazione senza però avere sovramodulazione:

$$E_{\%} = \frac{1}{1+1} \cdot 100 = 50\%$$

La massima efficienza ottenibile da una modulazione AM standard è dunque pari al 50 %; poichè sicuramente però $m(t)$ nella realtà sarà minore di 1, possiamo immaginare che quello appena ricavato sia un limite ottimale, ideale, teorico. Ricordiamo che queste limitazioni che abbiamo appena incontrato sono semplicemente dovute alla trasmissione della portante, ed alla conseguente perdita di potenza che deriva da ciò. Il segnale $m(t)$ che intendiamo trasmettere sarà sicuramente diverso dall'onda quadra appena introdotta, poichè sarà un processo casuale: dal momento che dall'altra parte della comunicazione non sappiamo di fatto cosa sia stato trasmesso, ma vogliamo cercare di riprodurre in modo più simile possibile, ciò che avremo sarà un processo casuale, ossia un insieme di variabili casuali i cui valori aleatori variano col tempo; al solito dalla nostra parte avremo la stazionarietà del processo casuale, e l'ergodicità (nonchè il fatto che i segnali che si usa trasmettere sono di solito a media nulla).

5.3.1 Esempio Pratico

$$m(t) = \cos(2\pi f_m t)$$

$$\langle m^2(t) \rangle = \frac{1}{2}$$

Vediamo che:

$$E_{\%} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} \cdot 100 = 33.33\%$$

Premettendo che anche in questo caso $m(t)$ sarà un segnale deterministico, non trasportante informazione; dal momento che un coseno è un segnale perfettamente conosciuto, ciò che abbiamo trovato è un valore assolutamente tipico per quanto riguarda segnali modulanti.

Riassumiamo nel seguente schema a blocchi la situazione:

Un filtro passa banda permette di ridurre rumore e selezionare una certa frequenza, un 'canale' di trasmissione (spesso si è soliti suddividere la banda in diversi canali), mentre il rivelatore di inviluppo permette di demodulare il segnale. Utilizzando dunque blocchi semplici come questi, avremo un ricevitore semplice, ma con un rendimento piuttosto scarso, come quello appena calcolato nell'esempio pratico.

Utilizzando dispositivi e tecniche più complicate, come quelle che ora introdurremo, è possibile superare (anche di molto) il limite teorico del 50%, modificando però la tecnica di modulazione rispetto allo standard appena introdotto.

5.4 Demodulazione Coerente

Consideriamo di ricostruire un segnale modulante a partire dal modulato ricevuto dal ricevitore Rx, sinusoidale, moltiplicandolo per un ulteriore coseno con la stessa frequenza della portante, ricavata da un anello ad aggancio di fase (PLL: Phase Lock Loop). Avremo uno schema a blocchi di questo tipo:

Vediamo che:

$$x(t) = s_{Rx}(t) \cdot s_{PLL}(t) = K A_C [1 + m(t)] \cos^2(2\pi f_c t) =$$

Utilizzando le formule goniometriche di bisezione, otteniamo:

$$= K A_C [1 + m(t)] \frac{\cos(4\pi f_c t) + 1}{2}$$

Questo è il segnale in ingresso nel filtro passa basso; il passa basso a questo punto però dovrà tagliare il coseno a frequenza $2 f_c$, lasciando solo in uscita un segnale filtrato, $x_F(t)$:

$$x_F(t) = \frac{KA_C}{2}[1 + m(t)]$$

Si noti che in questo ambito non abbiamo utilizzato rilevatori di involuppo; per questo motivo, non abbiamo vincoli sull'ampiezza di $m(t)$, che potrebbe risultar toccare anche punti minori al vincolo precedente, -1. Questo tipo di sistema dunque permette la sovr modulazione.

A questo punto, aumentando $m(t)$, è possibile aumentarne il momento secondo, $\langle m^2(t) \rangle$, e quindi l'efficienza, che potrà tranquillamente superare il famoso limite del 50 %. Se $\langle m^2(t) \rangle \gg 1$, l'efficienza di modulazione potrà raggiungere anche il 100 %.

Ciò che non abbiamo però ancora detto è la cosa veramente interessante di questo tipo di modulazione: utilizzando questa variante della AM, è possibile scegliere di non trasmettere la portante, ossia è possibile, dal momento che non ci interessa il fatto di avere sovr modulazione, non elevare di 1 il segnale $m(t)$, e dunque risparmiare la trasmissione della portante; la frequenza di portante comunque verrà rilevata dall'anello ad aggancio di fase. Avremo dunque un segnale modulato con una forma del tipo:

$$s(t) = A_C m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

Eliminando le portanti dallo spettro, potremo trasmettere le stesse informazioni, con un consumo di potenza molto minore. Vediamo dunque che ora, senza l'introduzione del fatidico termine di traslazione, l'efficienza vale:

$$E_{\%} = \frac{\langle m^2(t) \rangle}{\langle m^2(t) \rangle} \cdot 100 = 100\%$$

In questo modo, tagliando le portanti, abbiamo drasticamente eliminato gli sprechi di potenza.

Il dispositivo alla base di questo tipo di modulazioni è il PLL: esso, dal segnale modulato $s(t)$, è in grado di rilevare la frequenza e la fase del coseno, senza dover utilizzare il rilevatore di involuppo. Si tratta di un dispositivo molto più complicato del semplicissimo rilevatore di involuppo (anche se con l'attuale tecnologia elettronica esistono integrati che lo contengono senza problemi e a basso costo). Ai tempi in cui si stavano definendo gli standard per le telecomunicazioni, il PLL era un dispositivo molto elaborato, quindi lo standard per quanto riguarda le modulazioni AM è rimasta la AM-DSB (Amplitude Modulation - Double SideBand). La variante appena introdotta

è la AM-DSB-SC, ossia Amplitude Modulation Double SideBand Suppressed Carrer, ossia a soppressione di portante.

Le broadcast AM si usano a frequenze di circa 1 MHz; oggi tuttavia la modulazione che va per la maggiore è la FM, ossia modulazione di frequenza (che noi non tratteremo).

Ultima introduzione, riguarda un dettaglio ancora da migliorare: abbiamo sinora parlato di modulazioni AM DSB, ossia a doppia occupazione di banda; dalla teoria delle Trasformate di Fourier, sappiamo però una cosa: lo spettro di segnali reali è una funzione pari.

L'idea è la seguente: potremmo cercare di trasmettere esclusivamente una parte dello spettro: in effetti, trasmettendo metà dello spettro, siamo comunque in grado di ricostruire l'intera informazione.

Le modulazioni che trasmettono solo una porzione di spettro sono dette Single SideBand, SSB; ve ne sono di due tipologie, ossia le USB (Upper Side-Band), ossia che scelgono di trasmettere la porzione di spettro a frequenza più elevata, e le LSB (Lower SideBand), che dualmente alle precedenti scelgono di trasmettere esclusivamente la porzione di spettro a frequenza inferiore.

L'occupazione spettrale, con le SSB, anzichè $2B$ sarà pari a B : in questo modo, a parità di banda disponibile, avremo più canali su cui trasmettere (supponendo per esempio di dover gestire una stazione radio).

Modulazioni di questo genere in realtà oggi giorno non si utilizzano più, se non in ambito di radioamatori (CB), o in alcuni sistemi radio per la navigazione. Al momento in cui han preso piede le modulazioni AM, la realizzazione di un PLL era troppo complicata e costosa per una produzione elevata, e dunque per questo motivo modulazioni di questo tipo non han mai avuto il successo che probabilmente avrebbero meritato.

Piccola nota: esiste una via di mezzo tra DSB e LSB: le AM-VSB (Vestigial SideBand): si tratta per l'appunto di una via di mezzo, che consiste nel trasmettere un'intera semi-porzione di spettro, più una piccola parte dell'altro spettro, e della portante. Pur occupando dunque più banda e consumando più energia, è possibile utilizzare il rivelatore di involuppo, e quindi ciò rende le AM-VSB molto più appetibili rispetto alle AM-SSB.

5.5 Calcolo delle prestazioni di sistemi AM

Abbiamo appena introdotto un certo numero di formati, di metodi per modulare segnali mediante modulazioni AM; vorremmo però ora determinare un modo di calcolare le prestazioni, al fine di poter confrontare tra di loro i diversi metodi di modulazione.

Consideriamo dunque, al fine di effettuare confronti, una strategia di

questo tipo: consideriamo un unico sistema di riferimento, che confronteremo con tutti gli altri. Come parametro per la caratterizzazione delle prestazioni di un sistema, utilizzeremo il già introdotto SNR, ossia il rapporto segnale rumore, sull'uscita del ricevitore Rx.

Definiamo dunque un sistema di riferimento semplice, per poter avere una base da cui partire per effettuare confronti. A tale scopo, consideriamo un sistema in banda base; come ricevitore, un filtro passa basso ideale, a banda unilatera B . Supponendo dunque di trasmettere un segnale modulato a partire da un modulante $m(t)$, e di avere un segnale di rumore $n(t)$ con densità spettrale di potenza pari a $\frac{N_0}{2}$, avremo un sistema di questo tipo:

Rx è, come già detto, costituito da un filtro passa basso, che noi chiameremo 'filtro di ricezione'.

Per calcolare le prestazioni di questo sistema, ci riferiremo all'uscita dal ricevitore, $v_{out}(t)$; essa si può infatti esplicitare come:

$$v_{out}(t) = [[v_s(t) + n(t)]|_{FILTRATI}] \simeq v_s(t) + n_F(t)$$

Perchè quest'ultima eguaglianza? Il segnale $s(t)$ è, come prima scritto, a banda unilatera B , come anche il filtro passa basso costituente il ricevitore Rx. Il $v_s(t)$, ossia la porzione di segnale in uscita da Rx contenente l'informazione utile, non verrà toccata dal filtro, dal momento che $v_s(t) \sim s(t)$ (ossia il segnale utile in uscita dal Rx, in un sistema di buona qualità, è simile al segnale modulato inviato). Possiamo dunque pensare che la potenza utile, p_{Rx} , coincida con la potenza p_s , ossia la potenza del segnale modulato.

Ai fini di definire correttamente il rapporto segnale/rumore, ci serve ancora la p_n , ossia la potenza di rumore in uscita dal filtro. Si tratta dunque della potenza del rumore $n(t)$, filtrata attraverso il passa basso ideale, con funzione di trasferimento:

$$H(f) = p_B(f)$$

Vedremo dunque che la potenza di rumore in uscita dal filtro, $p_{n,out}$, sarà pari a:

$$p_{n,out} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_{n,out} \{f\} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H(f)|^2 df = \int_{-B}^{+B} 1 \cdot \frac{N_0}{2} df = \frac{N_0}{2} 2B = N_0 B$$

Calcolare la potenza mediante il calcolo della varianza del processo casuale $n(t)$ è stato possibile utilizzando al solito la proprietà dell'ergodicità del processo, ipotesi che consideriamo (anche senza dirlo sempre in modo esplicito) verificata, esattamente come il fatto che $n(t)$ sia un processo a media nulla stazionario.

Il rapporto segnale/rumore del sistema in banda base sarà dunque esprimibile come:

$$\frac{S}{N} \Big|_{BB} = \frac{p_s}{p_n} = \frac{p_{Rx}}{N_0 B}$$

Questo risultato sarà il punto di riferimento a partire dal quale effettueremo le operazioni di confronto.

Passiamo al vivo dell'argomento: consideriamo lo schema delle modulazioni di ampiezza di un tipico sistema AM, ai fini di considerare delle varianti per studiare le prestazioni di diverse casistiche.

Consideriamo dunque un segnale $m(t)$, in ingresso ad un trasmettitore. Da esso ne uscirà il segnale modulato $s(t)$, dotato di potenza p_{Rx} ; nel canale, qua modellato mediante un nodo sommatore, si somma a questa potenza il contributo di rumore legato al processo casuale $n(t)$. Al fine di semplificare i nostri studi, calcoliamo due rapporti segnale/rumore: $\frac{S}{N} \Big|_{in}$, ossia quello all'ingresso del ricevitore Rx, e $\frac{S}{N} \Big|_{out}$, ossia il più significativo, in uscita al sistema di trasmissione, ossia in uscita dal ricevitore.

Il segnale $m(t)$ sta su di una banda B , mentre $s(t)$ su di una banda $B_T = 2B$, traslata su di una frequenza f_c (o $2f_c$ come vedremo); il ricevitore porta il segnale da banda traslata a banda base, e lo farà uscire dal sistema.

Come già detto, esistono sostanzialmente due filosofie per la realizzazione di un ricevitore (e demodulatore): ricevitori coerenti (mediante PLL) o incoerenti (mediante rivelatore di involuppo); a seconda della realizzazione del ricevitore, cambierà lo standard di modulazione AM; analizziamo dunque le prestazioni, studiando i casi principali.

5.5.1 Ricevitore Coerente

Come sappiamo già, un ricevitore coerente è strutturato in questo modo:

Dal trasmettitore arriva il segnale modulato $s_{Rx}(t)$, che si somma, nel canale (modellato mediante un nodo sommatore), al segnale di rumore $n(t)$. Da qui si entra nel ricevitore vero e proprio: il filtro IF è un filtro passa banda, che serve a selezionare il canale di trasmissione da cui vogliamo prendere il segnale da ricostruire al ricevitore: in una radio (ad esempio) infatti arriveranno i contributi di tutte le frequenze (o quantomeno di quelle che l'elettronica contenuta nella radio possono gestire); di tutte le frequenze possibili, di tutti i canali, se ne seleziona solo uno particolare, ben preciso. Dal filtro IF dunque uscirà un segnale $r(t)$, dotato di potenza p_{Rx} . Esso verrà moltiplicato per $K \cos(2\pi f_c t)$, ossia per il coseno a frequenza pari a quella della portante, ricavata dall'anello ad aggancio di fase; $r_m(t)$ entrerà dunque

nel blocco LPF (Low-Pass Filter), ossia un filtro passa basso ideale, a frequenza di banda unilatera pari a B , come il segnale modulante $m(t)$. In uscita, avremo $v_{out}(t)$.

Scriviamo in matematiche dunque tutto ciò che abbiamo appena spiegato a parole; il segnale modulato $s_{Rx}(t)$ sarà il solito segnale modulato AM:

$$s_{Rx}(t) = A_{C,RX}[1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t)$$

$n(t)$, ossia il segnale di rumore, si può esprimere, basandoci sul formalismo del segnale analitico, come:

$$n(t) = x_n(t) \cos(2\pi f_c t) - y_n(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Il filtro passa basso non modificherà il segnale $s_{Rx}(t)$; toccherà invece il rumore $n(t)$, e la sua densità spettrale di potenza in uscita:

$$n(t) \longrightarrow \mathcal{P}_n \{f\} = \frac{N_0}{2}$$

Dalla teoria del segnale analitico, sappiamo che, dal momento che $x_n(t)$ e $y_n(t)$ sono moltiplicati per un coseno ed un seno (rispettivamente), saranno segnali in banda base; la loro densità spettrale di potenza sarà inoltre doppia di quella di $n(t)$:

$$\mathcal{P}_{x_n} \{f\} = \mathcal{P}_{y_n} \{f\} = N_0$$

Calcoliamo dunque ora il rapporto segnale/rumore in ingresso al ricevitore, ossia in uscita dal filtro IF:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{in} = \frac{p_{Rx}}{\frac{N_0}{2} \cdot 2B_T} = \frac{p_{Rx}}{B_T N_0} = \frac{p_{Rx}}{2N_0 B}$$

Calcoliamo ora il rapporto segnale/rumore in uscita dal ricevitore, ossia in uscita dal filtro passa basso; prima di ciò, però, facciamo una breve discussione sul segnale $r_m(t)$, ossia il segnale in uscita dal nodo moltiplicatore, ed in ingresso al filtro passa basso:

$$\begin{aligned} r_m(t) &= r(t) \cdot K \cos(2\pi f_c t) = \\ &= [A_{C,RX}[1+m(t)] \cos(2\pi f_c t) + x_n(t) \cos(2\pi f_c t) - y_n \sin(2\pi f_c t)] \cdot K \cos(2\pi f_c t) = \\ &= K \{A_{C,RX}[1 + m(t)] + x_n(t)\} \cos^2(2\pi f_c t) - K y_n(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) = \end{aligned}$$

Utilizzando le relazioni goniometriche:

$$= \frac{K}{2} \{A_{C,Rx}[1 + m(t)] + x_n(t)(1 + \cos(4\pi f_c t)) - y_n \sin(4\pi f_c t)\}$$

A partire da qua, effettuiamo alcune osservazioni: il termine $A_{C,Rx}[1 + m(t)] + x_n(t)$ è in banda base, e quindi esso verrà moltiplicato, nella successiva parentesi, per 1 e per $\cos(4\pi f_c t)$. Dovremmo dunque svolgere i conti per intero, ma anche cercare di utilizzare l'astuzia: in uscita abbiamo infatti un filtro passa basso in grado di eliminare, con frequenza di taglio unilatera pari a B , il segnale. Possiamo dunque immaginare che il segnale utile da studiare, comprensivo di informazioni e parte rumorosa, sia:

$$r_m(t) = \frac{K}{2} [A_{C,Rx}[1 + m(t)] + x_n(t)]$$

Il filtro di ricezione ha dunque sortito i seguenti effetti:

- Rimozione delle componenti spettrali traslate presso la frequenza $2f_c$;
- Invarianza del segnale $m(t)$: il filtro non lo ha in alcun modo distorto;
- Limitazione del rumore x_n ad una banda equivalente di rumore pari a B .

Al solito, possiamo dividere il segnale in due componenti: la parte utile, contenente informazione, e la parte rumorosa. Calcoliamo dunque la potenza utile, e la potenza rumorosa, come:

$$p_{UTILE} = \frac{K^2}{4} A_{C,Rx}^2 \langle m^2(t) \rangle = \frac{K^2}{4} A_{C,Rx}^2 p_m$$

Per quanto riguarda la potenza rumorosa, ricordando che x_n ha densità spettrale pari a N_0 , vediamo che:

$$p_{x_n} = \frac{K^2}{4} \cdot N_0 \cdot 2B = \frac{K^2 N_0 B}{2}$$

Il rapporto segnale/rumore in uscita dal ricevitore coerente dunque sarà:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{out} = \frac{p_{UTILE}}{p_{x_n}} = \frac{\frac{K^2}{4} A_{C,Rx}^2 p_m}{\frac{K^2 N_0 B}{2}} = \frac{A_{C,Rx}^2 p_m}{2N_0 B}$$

Interpretiamo questo risultato, considerandolo in funzione della potenza del segnale modulato, della potenza ricevuta p_{Rx} ; essa, ricordiamo, si definisce come:

$$p_{Rx} = \frac{A_{C,Rx}}{2} [1 + \langle m^2(t) \rangle] \iff A_{C,Rx}^2 = \frac{2p_{Rx}}{1 + \langle m^2(t) \rangle}$$

Da qua, si evince che il rapporto segnale/rumore in uscita dal filtro sarà:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{out} = \frac{2p_{Rx}}{1 + \langle m^2(t) \rangle} \langle m^2(t) \rangle \frac{1}{2N_0B} = \frac{p_{Rx}}{N_0B} \cdot \frac{\langle m^2(t) \rangle}{1 + \langle m^2(t) \rangle}$$

Ricordiamo a questo punto che il primo fattore ricorda il rapporto segnale/rumore del sistema di riferimento, $\left. \frac{S}{N} \right|_{BB}$, ed il secondo valore l'efficienza di modulazione:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{out} = \left. \frac{S}{N} \right|_{BB} \cdot E$$

Abbiamo dunque così capito che la modulazione AM-DSB, con demodulatore coerente, ha prestazioni inferiori rispetto al nostro sistema di riferimento: l'efficienza E , infatti, è un numero compreso tra 0 e 1.

Facendo dunque gli stessi conti, per quanto riguarda il rapporto segnale/rumore in ingresso, vediamo che esso vale:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{in} = \left. \frac{S}{N} \right|_{BB} \cdot \frac{1}{2}$$

Stiamo usando demodulazione coerente, e quindi sappiamo che in realtà possiamo fare di meglio, utilizzando per esempio una modulazione tipo AM-DSB-SC: sopprimendo la portante, eliminando il fattore di traslazione di 1 dall'involuppo complesso, si ottiene come efficienza E 1, e quindi:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{out} = \left. \frac{S}{N} \right|_{BB}$$

In ingresso comunque le prestazioni non miglioreranno:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{in} = \left. \frac{S}{N} \right|_{BB} \cdot \frac{1}{2}$$

Consideriamo, per quanto riguarda la ricezione coerente, un'ultima variante: le AM-SSB. Si può verificare che, riducendo la banda, si può anche avere un incremento delle prestazioni per quanto riguarda l'ingresso al ricevitore:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{in} = \left. \frac{S}{N} \right|_{out} = \left. \frac{S}{N} \right|_{BB}$$

5.5.2 Ricezione Incoerente

Abbiamo sinora studiato le prestazioni utilizzando un ricevitore di tipo coerente (ossia mediante anello ad aggancio di fase, PLL; trattiamo ora la ricezione di tipo incoerente e le relative prestazioni.

Quando parliamo di ricezione incoerente, parliamo di rivelatore di involuppo; per questo motivo, non sarà possibile avere modulazioni a soppressione di portante.

Lo schema a blocchi di un sistema di ricezione incoerente dunque sarà:

Sostanzialmente molto simile al precedente, con però il rivelatore di involuppo al posto del PLL (e in posizioni diverse).

Scomponendo dunque al solito il segnale $n(t)$, processo casuale gaussiano bianco ergodico stazionario, vediamo:

$$n(t) = x_n(t) \cos(2\pi f_c t) - y_n(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Il segnale modulante $r(t)$ varrà, in uscita dal canale:

$$r(t) = A_{C,Rx}[1 + m(t)] \cos(2\pi f_c t) + x_n(t) \cos(2\pi f_c t) - y_n(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Consideriamo questo $r(t)$ in uscita dal filtro passa banda IF: prima di tutto, riscriviamo $r(t)$ come segnale analitico:

$$r(t) = \Re e [\hat{r}(t) e^{j2\pi f_c t}]$$

L'involuppo complesso $\hat{r}(t)$, in questo ambito, vale:

$$\hat{r}(t) = A_{C,Rx}[1 + m(t)] + x_n(t) + jy_n(t)$$

Consideriamo a questo punto due casi, considerando rispettivamente prestazioni elevate del sistema (rapporto segnale/rumore in ingresso al ricevitore elevato), o ridotte (rapporto segnale/rumore in ingresso al ricevitore basso).

Rapporto segnale/rumore elevato

Se il rapporto segnale/rumore in ingresso al sistema di ricezione è elevato, si può verificare che il termine in quadratura del rumore, $y_n(t)$, sia trascurabile: vediamo infatti geometricamente che, considerando il piano dei fasori, il vettore $r_R(t)$, ossia il segnale in uscita dal rivelatore di involuppo, sia pari a:

Vediamo graficamente che $x_n(t)$ provoca una variazione sensibile del vettore $r_R(t)$, mentre $y_n(t)$, ossia la componente in quadratura, ne fa semplicemente variare di pochi gradi l'angolo, e quindi l'ampiezza in modo del tutto trascurabile (ricordiamo infatti che, per angoli minori ai 5° , $\cos(\theta) \simeq \theta$).

Poichè il rapporto segnale/rumore in ingresso è molto elevato, $|s_{Rx}(t)| \gg |n(t)|$, e quindi si può completamente ignorare il termine in quadratura:

$$r_R(t) \simeq K[A_{C,Rx}[1 + m(t)] + x_n(t)]$$

Il fattore moltiplicativo K deriva dal rivelatore di inviluppo: esso nella realtà non fornisce infatti un segnale del tutto analogo a quello in ingresso, bensì ne introduce uno ad esso proporzionale di fattore moltiplicativo K . Poichè $r_R(t)$ è uguale al segnale in ingresso al ricevitore coerente, possiamo dire che, per prestazioni elevate, le prestazioni saranno identiche al caso di ricezione coerente.

Rapporto segnale/rumore basso

Se il rapporto segnale/rumore è basso, ossia se il rumore è dello stesso ordine di grandezza del segnale utile, capita ciò: possiamo scrivere $n(t)$ in coordinate polari, e dunque:

$$n(t) = \Re e [\hat{n}(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

Dove $n(t) = R_n e^{j\theta_n}$

In questo ambito, R_n e θ_n sono processi casuali.

Ciò che capita è dunque il seguente fatto: il segnale complessivo dipende fortemente dal rumore, che è un processo casuale, e nella fattispecie dalla sua fase θ_n . Per questo motivo, sarà difficile distinguere s_{Rx} da $n(t)$, e dunque impossibile ricostruirlo.

$$\hat{r}_R(t) = K[A_C[1 + m(t)] \cos(\theta_n) + R_n(t)]$$

Poichè, per i motivi sopra citati, non è possibile filtrare la parte dipendente da $\cos(\theta_n)$, e poichè essa dipende da un rumore, da un processo casuale, questo modifica in modo aleatorio la componente contenente informazioni ($m(t)$), e quindi non è possibile ricostruire niente.

La demodulazione incoerente ha dunque un comportamento di questo tipo:

Dato $\frac{S}{N}|_{in} > 1$, le demodulazioni coerente ed incoerente hanno le stesse prestazioni; al di sotto di 1, vi è un forte degrado delle prestazioni delle rilevazioni a inviluppo. Poichè il gomito della curva dell'andamento delle prestazioni è per:

$$\frac{S}{N}|_{in} \simeq 1$$

nel caso di trasmissioni di tipo broadcast, dove servono prestazioni elevate, si considera sempre un rapporto segnale/rumore in ingresso al sistema pari a 1.

Capitolo 6

Pulse Amplitude Modulation

Abbiamo sinora considerato sistemi prettamente analogici, ossia basati sulla trasmissione di segnali a tempo variabile con continuità. D'ora in avanti considereremo sistemi per la trasmissione digitale di segnali (anche se le sorgenti di partenza spesso saranno analogiche). Alla base di sistemi di questo tipo saranno proprio le conversioni A/D e D/A (Analog to Digital e Digital to Analog); il primo tipo di sistemi che studieremo sarà la PCM, ossia la Pulse Code Modulation.

Alla base di questo sistema vi è una particolare forma di conversione analogico/digitale così strutturata:

Le operazioni di base dunque sono:

1. Campionamento del segnale nel dominio del tempo;
2. Quantizzazione delle ampiezze;
3. Codifica su di un flusso seriale di bit.

Il flusso di bit in uscita dal codificatore sarà trasmesso per mezzo del trasmettitore; si avrà dunque un insieme di blocchi del tipo:

Il segnale trasmesso dal Tx entrerà nel canale, e verrà ricevuto dal Rx; di qui verrà decodificato e ricostruito.

Incominciamo dunque la trattazione dei blocchi del convertitore analogico/digitale A/D.

6.1 Campionamento

Consideriamo un segnale $w(t)$ con spettro $W(f)$ limitato in banda: $W(f) = 0$ per $|f| > B$.

In questo caso, B è la banda assoluta del segnale; dalla Teoria dei Segnali sappiamo che, al fine di campionare correttamente il segnale, ossia al fine di non avere effetti di aliasing, è necessario che la frequenza di campionamento f_c rispetti la condizione di Nyquist:

$$f_c \geq 2B$$

Data come ipotesi verificata questa condizione:

- Il segnale può sempre essere esattamente ricostruito, senza commettere errori, sulla base dei campioni:

$$T_c = \frac{1}{f_c}$$

- Per ricostruire questo segnale, si filtra il segnale $W_\delta(f)$ mediante un filtro passa basso, che elimina tutte le repliche ottenute periodicizzando il segnale:

$$W_\delta(f) = W(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} w(t)$$

6.2 Quantizzazione

Il quantizzatore, per ciascun istante di campionamento deve svolgere il seguente compito: poichè i segnali v_{in} in ingresso al quantizzatore, campionati in tempi discreti, possono appartenere a qualsiasi valore di \mathbb{R} , è necessario mapparli, riducendoli in ampiezza ad un numero finito di valori; l'uscita v_{out} dunque sarà potrà essere solo uno di un certo numero di valori finiti e discreti.

L'esempio più classico e semplice per comprendere il concetto di quantizzazione è la quantizzazione a 8 livelli: supponiamo che il segnale v_{in} sia compreso tra -8 V e 8 V; dividendo in 8 livelli, ossia 8 sottointervalli, potremo fare un ragionamento di questo genere: se v_{in} è compreso tra 0 e 2 V, potremo attribuire $v_{out} = 1$ V; se tra 2 V e 4 V attribuire 3 V, e così via: la scelta è quella di attribuire il valore medio di ogni intervallo. Lo stesso discorso ovviamente vale anche per le tensioni negative.

In questo ambito si parla di quantizzazione uniforme, dal momento che l'altezza dei gradini è sempre costante: ciascuno degli intervalli tra due gradini è il Δ , ossia l'intervallo di quantizzazione.

L'operazione di quantizzazione introduce degli errori, detti per l'appunto errori di quantizzazione: essi vengono calcolati e tenuti sotto controllo,

e devono essere ridotti al minimo, al fine di ottenere un buon sistema di trasmissione.

Definiamo e_q la distanza tra ciascun v_{in} ed il suo corrispondente v_{out} :

$$e_q = v_{in} - v_{out}$$

Nell'esempio che abbiamo utilizzato, il massimo errore di quantizzazione vale:

$$\max \{e_q\} = 2 V, \quad v_{out} = 1 V$$

Nella fattispecie, si può vedere che, in un generico caso,

$$\max \{e_q\} = \frac{\Delta}{2}$$

Studieremo in ambito di Pulse Code Modulation due possibili fonti di errore: una è l'incertezza di quantizzazione, che abbiamo appena introdotto, e l'altra sarà causata dal canale di trasmissione (come vedremo in seguito).

Introduciamo il rapporto segnale/rumore dovuto al solo errore di quantizzazione, per quantizzazione uniforme; a questo scopo, introduciamo alcune ipotesi preliminari:

- $v_{in} \in [-V; V]$, con distribuzione uniforme;
- La quantizzazione è uniforme, a M livelli; avremo dunque un intervallo di quantizzazione Δ pari a:

$$\Delta = \frac{2V_{MAX}}{M}$$

Da queste ipotesi si evince un dato fondamentale: $e_q = v_{in} - v_{out}$ è distribuito uniformemente: v_{in} è infatti un processo uniforme, v_{out} un numero, ed i vari gradini sono uniformi. La distribuzione espressa dalla densità di probabilità di f_{eq} sarà:

$$f_{eq} = \frac{1}{\Delta}; \quad f_{eq} \in \left[-\frac{\Delta}{2}; \frac{\Delta}{2}\right]$$

Essendo un processo, possiamo analizzarlo mediante la statistica, ossia mediante la media e la varianza, come possiamo vedere ora:

$$\mathbb{E}[e_q] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{eq}(x) dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} x \cdot \frac{1}{\Delta} dx = 0$$

La funzione integranda è una funzione dispari, ed è integrata su di un intervallo simmetrico rispetto all'origine degli assi; per questo motivo possiamo immediatamente dire ad occhio che l'integrale sia nullo.

Calcoliamo ora la varianza dalla media, come momento secondo:

$$\begin{aligned}\sigma^2 = \mathbb{E} [e_q^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{eq}(x) dx = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{+\frac{\Delta}{2}} x^2 \frac{1}{\Delta} dx = \\ &= \frac{2}{\Delta} \int_0^{\frac{\Delta}{2}} x^2 dx = \frac{2}{\Delta} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{\Delta^2}{12}\end{aligned}$$

Utilizzando l'ergodicità, possiamo ora calcolare la potenza del segnale v_{in} ; ricordiamo che anche esso è distribuito uniformemente, e dunque:

$$f_{v_{in}} = \frac{1}{2V}, \quad f_{v_{in}} \in [-V; V]$$

Abbiamo che:

$$\mathbb{E} [v_{in}^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{v_{in}}(x) dx = \int_{-V}^{+V} x^2 \cdot \frac{1}{2V} dx = \frac{2}{2V} \cdot \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^V = \frac{V^2}{3}$$

Il rapporto segnale/rumore dovuto alla sola quantizzazione sarà dunque il rapporto delle due potenze:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_Q = \frac{V^2}{\frac{\Delta^2}{12}}$$

Ricordiamo, tuttavia, che:

$$\Delta = \frac{2V}{M}$$

Da ciò possiamo ricavare che:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_Q = \frac{V^2}{3} \cdot \frac{M^2 \cdot 12}{4V^2} = M^2$$

Aumentando il numero di livelli di quantizzazione, quadraticamente aumenterà anche il rapporto segnale/rumore.

Ragionando in dB , dal momento che $M = 2^n$, abbiamo che:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_Q = M^2 = 2^{2n} \xrightarrow{dB} 10 \cdot \log_{10}(2^{2n}) = 10 \cdot 2n \cdot \log_{10}(2) \simeq 6n \text{ dB}$$

In dB , si ha una variazione lineare rispetto a n .

Perchè si trasmette in digitale anche flussi nati da sorgenti analogiche? La risposta è semplice: vedremo, andando avanti con la nostra trattazione, che trasmettere un flusso di bit (digitale) permette di sfruttare i nostri mezzi con prestazioni molto superiori, aumentando ossia di molto la ricezione a parità di potenza di trasmissione utilizzata.

6.3 Canale binario simmetrico

Ci siamo concentrati finora sul solo errore di quantizzazione; concentriamoci da ora sulla seconda fonte di errore in un sistema basato sulla PCM: la trasmissione, in un contesto digitale, permetterebbe di modellare il blocco Tx + CANALE + Rx in un unico blocco: il canale binario simmetrico.

Il canale binario simmetrico è un oggetto che in ingresso ha un certo flusso di bit, in uscita un altro flusso di bit. Esiste una probabilità, p_0 , detta 'probabilità di transizione', secondo cui è possibile ricevere '0' pur avendo trasmesso '1', o '1' pur avendo trasmesso '0'. Definiamo così la probabilità di transizione:

$$p_0 \triangleq \mathbb{P}\{R_x = 0|T_x = 1\} = \mathbb{P}\{R_x = 1|T_x = 0\}$$

Il canale è detto 'simmetrico', proprio perchè le due probabilità di transizione coincidono.

Possiamo ora farci una domanda: quanto vale la p_e , ossia la probabilità che avvenga un errore? Utilizziamo il teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned} p_e &= \mathbb{P}\{Tx = 1\} \mathbb{P}\{R_x = 0|T_x = 1\} + \mathbb{P}\{Tx = 0\} \mathbb{P}\{R_x = 1|T_x = 0\} = \\ &= p_0 (\mathbb{P}\{Tx = 1\} + \mathbb{P}\{Tx = 0\}) \end{aligned}$$

Supponiamo a questo punto che le sorgenti siano equiprobabili, ossia vengano trasmessi tanti uni quanti zeri:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Tx = 1\} &= \mathbb{P}\{Tx = 0\} = \frac{1}{2} \\ \implies p_e &= \frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}p_0 = p_0 \end{aligned}$$

Ciò significa che, ai fini dello studio del sistema PCM, è possibile modellare questo blocco con la sua sola probabilità di errore, pari alla probabilità di transizione. Essa viene anche detta 'BER', ossia Bit Error Rate.

Calcoliamo ora il rapporto segnale/rumore introdotto esclusivamente dal canale di trasmissione:

Consideriamo l'uscita dal quantizzatore $Q(x)$; ad ogni livello quantizzato in ingresso, il codificatore gli associa una n -pla di bit:

$$Q(x) \longrightarrow \vec{a} = [a_1; a_2; \dots; a_n]$$

Dove $a_i = \pm 1$: a_i è una variabile aleatoria discreta, e non un processo, poichè non varia nel tempo!

Che criterio usiamo per associare la n -pla al Q ? Vediamo:

$$Q(x) \longrightarrow V \cdot \sum_{j=1}^n a_j \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Esempio Pratico

Dato $m(t) \in [-V; V]$ su 3 bit, se $Q(x) = \frac{7}{8}V$, vediamo che esso può essere così ricavato: data in ingresso nel sistema la n -pla $[1; 1; 1]$:

$$Q(x) = V \left[1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right] = V \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right] = \frac{7}{8}V$$

Come possiamo immaginare, la n -pla con tutti '1' trasmessi è il valore massimo assumibile; si può dimostrare che:

$$Q_{max}(x) = V \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j = V \left[1 - \frac{1}{2^n} \right]$$

Ma $2^n = M$, ossia è il numero di livelli!

$$\implies Q_{max}(x) = V - \frac{V}{M}$$

Ma ricordiamo che:

$$\frac{V}{M} = \frac{\Delta}{2}$$

Quindi:

$$Q_{max}(x) = V - \frac{\Delta}{2}$$

In uscita dal canale binario avremo ancora una sequenza di bit, di questo tipo:

$$y = V \cdot \sum_{j=1}^n b_j \left(\frac{1}{2}\right)^j$$

Passiamo ad un'analisi quantitativa degli errori, considerando la differenza tra il segnale in uscita dal sistema, y , e quello in uscita dal quantizzatore, $Q(x)$:

$$e_b = y - Q(x)$$

e_b rappresenta l'errore introdotto dal solo canale binario, ed è una variabile casuale (dal momento che non si ha dipendenza dal tempo nè in y nè in $Q(x)$). Usiamo dunque l'analisi statistica di media e varianza, al fine del calcolo delle potenze e della determinazione del rapporto segnale/rumore:

$$\mathbb{E}[e_b] = \mathbb{E} \left[V \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) \left(\frac{1}{2}\right)^j \right] =$$

Utilizzando la linearità e la proprietà commutativa, vediamo:

$$= V \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j \mathbb{E}[b_j - a_j] = V \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^j \cdot \{\mathbb{E}[b_j] - \mathbb{E}[a_j]\}$$

Vediamo tuttavia che:

$$\mathbb{E}[b_j] = \mathbb{E}[a_j] = 0$$

Infatti:

$$\mathbb{E}[a_j] = +1 \cdot \mathbb{P}\{a_j = 1\} + (-1) \cdot \mathbb{P}\{a_j = -1\} = 1 \cdot 0,5 + (-1) \cdot 0,5 = 0$$

$$\implies \mathbb{E}[e_b] = 0$$

Per quanto riguarda la varianza, la situazione è più complicata:

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[e_b^2] = \mathbb{E}[[y - Q(x)]^2] = \mathbb{E} \left[\left[V \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) \left(\frac{1}{2}\right)^j \right]^2 \right] =$$

Possiamo portare fuori la costante V , e svolgere il quadrato, utilizzando due sommatorie distinte:

$$\begin{aligned}
&= V^2 \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) \cdot 2^{-i} \cdot \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \cdot 2^{-k} \right] = V^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [(b_i - a_i)(b_k - a_k)] = \\
&= V^2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n 2^{-i-k} [\mathbb{E} [b_i b_k] - \mathbb{E} [b_i a_k] - \mathbb{E} [a_i b_k] + \mathbb{E} [a_i a_k]]
\end{aligned}$$

Effettuiamo una notevole semplificazione: per $i \neq k$, gli eventi a_i e a_k , b_i e b_k , a_i e b_k , a_k e b_i , sono stocasticamente indipendenti, e quindi il loro valore medio può essere scritto come il prodotto dei valori medi, entrambi nulli come poco fa dimostrato:

$$\mathbb{E} [b_i b_k] = \mathbb{E} [b_i a_k] = \mathbb{E} [a_i b_k] = \mathbb{E} [a_i a_k] = 0, \quad i \neq k$$

Se invece $i = k$, vediamo:

$$\mathbb{E} [a_i a_i] = \mathbb{E} [b_i b_i] = 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,5 = 1$$

Da ciò, si vede che:

$$\implies \mathbb{E} [e_b^2] = V^2 \sum_{i=1}^n 2^{-2i} \{ \mathbb{E} [b_i^2] - \mathbb{E} [b_i a_i] - \mathbb{E} [a_i b_i] + \mathbb{E} [a_i^2] \}$$

Recuperando il risultato precedente, possiamo dire che:

$$\mathbb{E} [e_b^2] = V^2 \sum_{i=1}^n 2^{-2i} \{ 2 - 2\mathbb{E} [a_i b_i] \}$$

Abbiamo quasi finito: ci manca solo più l'ultima media di insieme, ossia $\mathbb{E} [a_i b_i]$. Possiamo capire che ci siano quattro possibili combinazioni tra a_i e b_i , poichè si tratta di due valori binari:

- $a_i = 1, b_i = 1 \longrightarrow a_i \cdot b_i = 1$

$$\mathbb{P} \{a_i = 1\} \mathbb{P} \{b_i = 1 | a_i = 1\} = \frac{1}{2}(1 - p_e)$$

- $a_i = 1, b_i = -1 \longrightarrow a_i \cdot b_i = -1$

$$\mathbb{P} \{a_i = 1\} \mathbb{P} \{b_i = -1 | a_i = 1\} = \frac{1}{2}p_e$$

- $a_i = -1, b_i = 1 \longrightarrow a_i \cdot b_i = -1$

$$\mathbb{P}\{a_i = -1\} \mathbb{P}\{b_i = 1|a_i = -1\} = \frac{1}{2}p_e$$

- $a_i = -1, b_i = -1 \longrightarrow a_i \cdot b_i = 1$

$$\mathbb{P}\{a_i = -1\} \mathbb{P}\{b_i = -1|a_i = -1\} = \frac{1}{2}(1 - p_e)$$

Come risultato finale, avremo che:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[a_i \cdot b_i] &= \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}\{a_i \cdot b_i\} = 1\frac{1}{2}(1 - p_e) + (-1)\frac{1}{2}p_e + (-1)\frac{1}{2}p_e + 1\frac{1}{2}(1 - p_e) = \\ &= (1 - p_e) - p_e = 1 - 2p_e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies \mathbb{E}[e_b^2] &= V^2 \sum_{i=1}^n 2^{-2i} \{2 - 2\mathbb{E}[a_i b_i]\} = 2V^2 \sum_{i=1}^n 2^{-2i} \{1 - (1 - 2p_e)\} = \\ &= 4V^2 p_e \sum_{i=1}^n 2^{-2i} = 4V^2 p_e \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^i \end{aligned}$$

Consideriamo ora un piccolo ripasso di Analisi Matematica, per quanto riguarda le serie geometriche; ricordiamo che:

$$\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} =$$

Poichè per $n = 0$ si ha che $x^n = 1$, possiamo considerare tutto partente da 1:

$$= 1 + \sum_{i=1}^n x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Da ciò, possiamo dire che:

$$\sum_{i=1}^n x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 1 = \frac{1 - x^{n+1} - 1 + x}{1 - x} = \frac{x(1 - x^n)}{1 - x}$$

Applichiamo ciò al caso che ci interessa, ossia $x = \frac{1}{4}$; otterremo:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}}$$

Sostituendo ciò nell'espressione di $\mathbb{E}[e_b^2]$:

$$\mathbb{E}[e_b^2] = \frac{4}{3}V^2p_e \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

Dal momento che però M , ossia il numero di livelli di quantizzazione, è pari a 2^n :

$$\longrightarrow \mathbb{E}[e_b^2] = \frac{4}{3}V^2p_e \left[1 - \frac{1}{M^2}\right] = \frac{4}{3}V^2p_e \frac{M^2 - 1}{M^2}$$

Siamo finalmente in grado di presentare il rapporto segnale/rumore introdotto dal solo canale binario, come:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{e_b} = \frac{\langle V_m^2 \rangle}{e_b^2} = \frac{\mathbb{E}[V_m^2]}{\mathbb{E}[e_b^2]} = \frac{\frac{V^2}{3}}{\frac{4}{3}V^2p_e \frac{M^2-1}{M^2}} = \frac{M^2}{4p_e(M^2 - 1)}$$

Leggendo queste espressioni, possiamo immediatamente notare una cosa: più p_e è elevata, e più il rapporto segnale rumore sarà basso, e quindi le prestazioni scadenti (intuitivamente si poteva immaginare: se la probabilità di errore è elevata, ci saranno molte transizioni indesiderate, e quindi deterioramento della qualità della trasmissione).

Accade un fatto di questo tipo:

Se p_e è bassa, l'errore predominante sarà quello dell'errore di quantizzazione (che abbiamo precedentemente visto come quantificare); al contrario, se la p_e è elevata, l'errore predominante sarà quello introdotto dal canale binario, e quindi ci sarà un errore asintotico pari a $\frac{1}{4}p_e$.

Abbiamo sinora trattato separatamente le due fonti di degrado; uniamoli, al fine di chiarire e vedere qual è l'errore globale.

$$\mathbb{E}[e_{out}^2] = \mathbb{E}[e_q^2] + \mathbb{E}[e_b^2] = \frac{4}{3}V^2p_e \frac{M^2 - 1}{M^2} + \frac{1}{3M^2} = \frac{V^2}{3M} [4p_e(M^2 - 1) + 1]$$

Il rapporto segnale/rumore complessivo sarà dunque:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{out} = \frac{\mathbb{E}[V_m^2]}{\mathbb{E}[e_{out}^2]} = \frac{\frac{V^2}{3}}{\frac{V^2}{3M} [4p_e(M^2 - 1) + 1]} = \frac{M^2}{4p_e(M^2 - 1) + 1}$$

Osserviamo ciò: il comportamento asintotico, al variare della probabilità di errore p_e , si riporta ai due singoli contributi di errore:

- Se $p_e \rightarrow 0$,

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{out} = \frac{M^2}{1} = M^2$$

Ossia ci si riporta al solo errore di quantizzazione

- Se $p_e \rightarrow \infty$

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{out} \rightarrow \frac{M^2}{4p_e}$$

Ossia ci si riporta al solo errore del canale binario

Il valore di p_e va dunque tenuto sotto controllo: i sistemi di telecomunicazione sono infatti spesso instabili, a causa delle condizioni in cui troveranno (temperatura, pressione...). Se p_e è elevata, in un intorno della zona in cui vi è il crollo del rapporto segnale/rumore, variazioni di p_e ridotte determineranno enormi variazioni delle prestazioni dei sistemi, e dunque un notevole degrado nella qualità delle comunicazioni.

Al fine di evitare problemi, si definisce una probabilità di errore critica p_e^* come la probabilità di errore del canale binario al di sotto della quale abbiamo un sistema funzionante in modo corretto. Essa si definisce come quella probabilità di errore p_e tale per cui si ha una penalizzazione di 3 dB sul rapporto segnale rumore:

$$\begin{aligned} \left. \frac{S}{N} \right|_{out} = \frac{\left. \frac{S}{N} \right|_Q}{2} = \frac{M^2}{2} &\implies \frac{M^2}{4p_e^*(M^2 - 1) * 1} = \frac{M^2}{2} \\ \implies 4p_e^*(M^2 - 1) + 1 = 2 &\implies p_e^* = \frac{1}{4(M^2 - 1)} \end{aligned}$$

Quando il sistema lavora con un rapporto segnale/rumore maggiore di $\frac{M^2}{2}$ il sistema lavora sovrasoglia, ossia in condizioni regolari di funzionamento. Se al contrario il rapporto segnale/rumore in uscita è in condizioni di fuori servizio, il sistema è in condizioni di fuori servizio, e di fatto non funziona: questo capita nel caso ad esempio del sistema digitale terrestre: o si vede con una certa qualità, o non si vede assolutamente niente; questo dipende dal fatto che il sistema è digitale, e dunque non si può vedere il segnale con bassa qualità come nel caso delle modulazioni analogiche: o si vede bene, o non si vede proprio.

Capitolo 7

Introduzione alla Trasmissione Digitale

Sostanzialmente, parlando di sistemi di trasmissione di tipo digitale, ci occuperemo di trattare questo insieme di blocchi:

Dalla sorgente digitale arriva una sequenza di bit in banda base; il trasmettitore digitale Tx dunque adatta questa sequenza di bit al canale trasmissivo che si sceglie utilizzare (come al solito, coassiale piuttosto che fibra ottica piuttosto che altro); il ricevitore riadatterà il segnale in arrivo dal canale in modo da poter essere utilizzabile ed interpretabile in uscita dal sistema di trasmissione.

D'ora in avanti studieremo dunque sistemi di trasmissione digitali, esaminandone le prestazioni, in termini di alcuni fattori fondamentali, quali:

- Occupazione di banda;
- Probabilità di errore;
- Complessità del sistema.

7.1 Simboli e Costellazioni

L'idea alla base delle trasmissioni digitali è la seguente: l'asse dei tempi viene suddiviso in un insieme di intervalli di durata T_S ; su ciascuno di questi sottointervalli temporali, si trasmette una determinata forma d'onda, che d'ora in avanti chiameremo 'simbolo'; ciascun simbolo dunque esiste solo in un intervallo di durata T_S .

A seconda della trasmissione, vi sarà un certo numero di forme d'onda trasmesse, ovviamente ciascuna in un intervallo di tempo differente dalle

altre. Supponendo di avere in totale M diverse forme d'onda che si possono trasmettere, ognuna di esse si potrà rappresentare mediante una codifica, con una sequenza $nbit$, di n bit (come il nome suggerisce).

Di solito, il numero delle forme d'onda disponibili nel nostro sistema di trasmissione, M , si può calcolare semplicemente come:

$$M = 2^{nbit}$$

L'insieme delle M forme d'onda trasmesse nel nostro sistema è comunemente detto 'costellazione'.

Introduciamo ora alcune definizioni, che ci torneranno utili al fine di comprendere alcuni concetti che verranno introdotti tra breve.

- Si definisce baudrate D il numero di simboli trasmessi per ogni intervallo di tempo T_S :

$$D = \frac{1}{T_S}$$

- Si definisce bitrate B_r , R_b , R il numero di bit trasmessi su di un'unità di tempo:

$$B_r = R_b = R = \frac{nbit}{T_S} = \frac{1}{T_b}$$

Dove l'appena introdotto T_b è il tempo di bit; generalmente il tempo di bit non ha significato fisico: il suo significato logico è semplicemente associato al numero di bit che vengono trasferiti in un'unità di tempo. Se stiamo tuttavia lavorando su di una trasmissione di tipo binario, $T_S = T_b$, quindi potremo immaginare che il tempo di bit coincida con il tempo di simbolo, poichè ogni simbolo di fatto è identificato da un singolo bit; in questo specifico caso, il tempo di bit assume un significato specifico.

Le trasmissioni ovviamente non sono tutte binarie: a seconda del numero di simboli che compongono la costellazione, vi saran trasmissioni binarie, o multilivello.

7.2 Classificazioni dei sistemi di trasmissione digitali

I sistemi di trasmissione digitali possono essere classificati in base alle peculiarità che li distinguono; nella fatispecie, possiamo pensare alle seguenti idee, a partire dalle quali si può classificarli:

- Per le diverse forme d'onda che si sceglie di adottare come simboli;
- Per le codifiche simboli/ n -ple di bit: esistono associazioni anche molto complicate tra simboli e bit, come vedremo in seguito.

Inserendo qualche dettaglio in più nella trattazione, possiamo introdurre nella fatispecie due classificazioni dei sistemi di trasmissione:

- In base al tipo di sistemi, per quanto concerne le costellazioni:
 - Binari: $M = 2 \longrightarrow nbit = 1$
 - Multilivello: $M > 2 \longrightarrow nbit > 1$
- In base al tipo di sistemi, per quanto concerne l'occupazione spettrale:
 - In banda base (il segnale trasmesso è dunque centrato attorno a $f_c = 0$);
 - In banda traslata (supponendo $f_c \gg D$, lo spettro del segnale è centrato attorno alla frequenza f_c , che per ipotesi sarà dunque maggiore di 0).

L'occupazione spettrale è importantissima: in base ad essa si può scegliere quali componenti utilizzare per la progettazione del sistema, e, se si riesce a limitare l'occupazione, è possibile trasmettere altri segnali su altre frequenze a nostra disposizione (moltiplicazione o divisione di frequenza).

Si tenga sempre conto di un limite teorico inferiore, per quanto riguarda l'occupazione spettrale; deve essere infatti sempre verificata la disegualianza:

$$B_{occupata} \geq \frac{D}{2}$$

7.3 Analisi generica di un sistema di trasmissione

Entriamo nel vivo dell'argomento, introducendo i primi formalismi che ci accompagneranno nello studio delle trasmissioni digitali. Supponiamo che il segnale in uscita dal trasmettitore digitale abbia una forma del tipo:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_S)$$

Dove a_n è una variabile casuale, in grado di assumere esclusivamente due valori: ± 1 (consideriamo dunque per ora soltanto una trasmissione binaria); come codifica, inoltre, consideriamo che la trasmissione del bit '1' implichi $a_n = +1$, e al contrario la trasmissione del bit '0' implichi $a_n = -1$.

Questo tipo di notazione ci fa capire una cosa molto importante: le forme d'onda non sono variabili, bensì sono sempre e comunque uguali a $f(t)$, assunta con valore positivo o negativo (a seconda del comportamento della variabile aleatoria a_n). La costellazione, dunque, sarà:

$$\{+f(t); -f(t)\}$$

$x(t)$ è un processo casuale: a_n introduce una componente aleatoria, ed inoltre si ha dipendenza dal tempo. Esso è tuttavia un processo quasi determinato, dal momento che la dipendenza dal tempo è interamente deterministica, e quindi a noi completamente nota. L'unica componente aleatoria modifica le ampiezze (nella fattispecie, in questo ambito, i segni) della forma d'onda da noi fissata.

Effettuiamo dunque un'analisi statistica del processo, studiandone media e funzione di autocorrelazione.

Calcolo della Media

Per quanto riguarda il calcolo della media:

$$\mathbb{E}[x(t)] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_S)\right] =$$

Poichè il valore atteso e la sommatoria sono operatori lineari, e poichè $f(t)$ è una funzione completamente determinata:

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[a_n f(t - nT_S)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT_S) \mathbb{E}[a_n]$$

Supponiamo a questo punto per ipotesi che il valore atteso delle variabili aleatorie non dipenda da n ; possiamo dire dunque che:

$$\mathbb{E}[x(t)] = \mathbb{E}[a_n] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - nT_S)$$

Abbiamo a che fare a questo punto con un notevole problema, che non ci era ancora capitato di affrontare: il processo $x(t)$ è non stazionario, poichè abbiamo una media variabile nel tempo; possiamo però notare una cosa:

Poichè il processo è formato da continue repliche di $f(t)$, con un periodo T_S , possiamo dire che la media si ripeterà ad ogni T_S . Si parla per questo di processo ciclostazionario per la media, quando, come in questo caso, capita che:

$$\mathbb{E}[x(t)] = \mathbb{E}[x(t + kT_S)]$$

Dove k è un numero appartenente a \mathbb{Z} .

Si può dunque sperare di trovare qualcosa di simile anche per quanto riguarda i momenti secondi, nella fatispicie la funzione di autocorrelazione.

Calcolo della funzione di autocorrelazione

Ricordiamo la definizione di funzione di autocorrelazione per quanto riguarda un segnale $x(t)$:

$$\mathcal{R}_x(t; \tau) \triangleq \mathbb{E}[x(t) \cdot x(t + \tau)]$$

Sostituendovi il nostro processo:

$$\mathcal{R}_x(t; \tau) = \mathbb{E} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_S) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m f(t + \tau - mT_S) \right]$$

Utilizzando la proprietà di linearità delle sommatorie, le raggruppiamo, e a partire da qua effettueremo alcune considerazioni:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_n a_m f(t - nT_S) f(t + \tau - mT_S) \right]$$

Questo processo non è stazionario poichè abbiamo di nuovo dipendenza, nella funzione di autocorrelazione, sia da t che da τ ; non sarà sufficiente dunque la sola dipendenza dal fattore di lag τ .

Dal momento che si ha però periodicità pari a T_S , possiamo dire che il processo $x(t)$ sia ciclostazionario anche per quanto riguarda l'autocorrelazione.

Il nostro fine ultimo, per la caratterizzazione del segnale, è il calcolo della sua densità spettrale di potenza, $\mathcal{P}_x \{f\}$; per procedere in questo senso, dovremo stazionarizzare il processo, in modo da utilizzare la relazione:

$$\mathcal{P}_x \{f\} = \mathcal{F} \{ \mathcal{R}_x(\tau) \}$$

Una strategia di lavoro (che non utilizzeremo) è la seguente: al posto della funzione di autocorrelazione, potremmo trasformare (mediante Fourier) la sua media nel tempo. Si può infatti dimostrare che:

$$\mathcal{P}_x \{f\} = \mathcal{F} \{ \langle \mathcal{R}_x(t; \tau) \rangle \}$$

Noi utilizzeremo un'altra strategia: il metodo della funzione troncata.

Consideriamo $x_T(t) = x(t)p_T(t)$, ossia il processo $x(t)$ troncato mediante una porta in un intervallo di tempo di ampiezza T centrato in $t = 0$. La trasformata di Fourier del segnale troncato sarà:

$$X_T(f) = \mathcal{F} \{ x_T(t) \} = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

Lo spettro di potenza si potrà definire come l'energia della funzione troncata, normalizzata per un certo T (ampiezza dell'intervallo), con $T \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{P}_x \{f\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} [|X_T(f)|^2]}{T}$$

Utilizzando implicitamente l'ergodicità, abbiamo direttamente espresso la media nel tempo come valore atteso.

Incominciamo i conti, a partire da $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_S)$$

Limitiamo $x(t)$ in $x_T(t)$, limitando gli estremi della sommatoria da $-N$ a N , ottenendo quindi N contributi da sommare con $n < 0$, un contributo per $n = 0$, e N contributi per $n > 0$, tali per cui:

$$T = (2N + 1)T_S$$

Avremo quindi che:

$$x_T(t) = \sum_{n=-N}^N a_n f(t - nT_S)$$

Supponiamo a questo punto di conoscere la trasformata della forma d'onda $f(t)$, ossia $F(f)$, e quindi calcoliamo la trasformata del segnale troncato $x_T(t)$ come:

$$\begin{aligned} X_T(f) &= \mathcal{F}\{x_T(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-N}^N a_n f(t - nT_S)\right\} = \sum_{n=-N}^N \mathcal{F}\{f(t - nT_S)\} = \\ &= \sum_{n=-N}^N a_n F(f) e^{-j2\pi nT_S f} \end{aligned}$$

Questo dal momento che $F(f) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

Calcoliamo a questo punto la densità spettrale di potenza, $\langle |X_T(f)|^2 \rangle$, utilizzando, per ergodicità, l'operatore valore atteso:

$$\begin{aligned} \langle |X_T(f)|^2 \rangle &= \mathbb{E}[|X_T(f)|^2] = \mathbb{E}[X_T(f)X_T^*(f)] = \\ &= \mathbb{E}\left[F(f) \sum_{n=-N}^N a_n e^{-j2\pi nT_S f} \cdot F^*(f) \sum_{m=-N}^N a_m e^{-j2\pi mT_S f}\right] \end{aligned}$$

Utilizzando al solito la proprietà di linearità del valore atteso e della sommatoria:

$$= |F(f)|^2 \cdot \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \mathbb{E}[a_n a_m] e^{j2\pi(m-n)T_S f}$$

Consideriamo ora un cambio di variabili: $k = m - n \longleftrightarrow m = n + k$:

$$\longrightarrow \mathbb{E}[|X_T(f)|^2] = |F(f)|^2 \cdot \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N-n}^{N-n} \mathbb{E}[a_n a_{n+k}] e^{j2\pi kT_S f}$$

Introduciamo a questo punto l'autocorrelazione dei dati:

$$\mathcal{R}(k) \triangleq \mathbb{E}[a_n a_{n+k}]$$

Si parla di autocorrelazione poichè ricorda, pur in campo numerico, discreto, la funzione di autocorrelazione di segnali analogici.

Generalmente, \mathcal{R} dipende solo da k e non da n : ci interessa dunque esclusivamente la statistica delle variabili casuali a_n , e la 'distanza' k . Sostituendo dunque nell'espressione precedentemente trovata, vediamo:

$$\mathbb{E} [|X_T(f)|^2] = |F(f)|^2 \cdot \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N \mathcal{R}(k) e^{j2\pi k T_S f} =$$

Quindi, vediamo:

$$= \sum_{k=-N-n}^{N-n} \sum_{n=-N}^N \mathcal{R}(k) e^{j2\pi k T_S f} \cdot |F(f)|^2$$

Poichè il termine all'interno della sommatoria non dipende da n , esso viene semplicemente sommato a sè stesso per $2N+1$ volte, e quindi possiamo eliminare una delle sommatorie, ottenendo:

$$\mathbb{E} [|X_T(f)|^2] = |F(f)|^2 \cdot (2N+1) \cdot \sum_{k=-N-n}^{N-n} \mathcal{R}(k) e^{j2\pi k T_S f}$$

Al fine di calcolare la $\mathcal{P}_x \{f\}$, dovremo calcolare:

$$\mathcal{P}_x \{f\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} [|X_T(f)|^2]}{T}$$

Dal momento che $T = (2N+1)T_S$, se $T \rightarrow +\infty$, allora $N \rightarrow +\infty$; otterremo dunque:

$$\mathcal{P}_x \{f\} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(2N+1) \cdot |F(f)|^2 \cdot \sum_{k=-N-n}^{N-n} \mathcal{R}(k) e^{j2\pi k T_S f}}{T_S(2N+1)}$$

Trasformando la somma in serie, il limite sparisce, ed otterremo dunque alla fine:

$$\mathcal{P}_x \{f\} = \frac{|F(f)|^2}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(k) e^{j2\pi k T_S f}$$

Questa formula è importantissima: essa infatti ci permette di calcolare la $\mathcal{P}_x \{f\}$ di una qualsiasi trasmissione digitale e quindi, grazie ad essa, determinare potenza ed occupazione spettrale per qualsiasi segnalazione numerica.

Alcune note:

1. $\mathcal{P}_x \{f\}$ dipende dal modulo quadro di $F(f) = \mathcal{F} \{f(t)\}$, e quindi dalla forma di ogni simbolo;

2. $\mathcal{P}_x \{f\}$, oltre che da $f(t)$, dipende da $\mathcal{R}(k)$, ossia dalle caratteristiche statistiche dei dati emessi. Agendo sulla statistica (mediante codifiche di diverso tipo) è possibile modificare lo spettro di potenza di un segnale, e quindi anche la sua occupazione spettrale.

Analizziamo, a partire da ciò, due casi particolari.

7.3.1 Variabili aleatorie a_n e a_{n+k} scorrelate per $n \neq k$

Se le variabili casuali sono tra loro scorrelate, vediamo che la funzione di autocorrelazione dei dati varrà:

- $\mathcal{R}(k) = \mathbb{E}[a_n a_{n+k}] =$
 - $\mathbb{E}[a_n^2] = \sigma_a^2 + m_a^2, k = 0;$
 - $\mathbb{E}[a_n] \mathbb{E}[a_{n+k}] = m_a \cdot m_a = m_a^2, k \neq 0.$

Sostituendo questo risultato nell'espressione generale, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x \{f\} &= \frac{|F(f)|^2}{T_S} \cdot \left[\mathcal{R}(0) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(k) e^{j2\pi k T_S f} \right], k \neq 0 \\ &= \frac{|F(f)|^2}{T_S} \cdot \left[\sigma_a^2 + m_a^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(k) e^{j2\pi k T_S f} \right], k \neq 0 \end{aligned}$$

Considerando una piccola astuzia, ossia il fatto che $m_a^2 = m_a^2 e^{j2\pi k T_S f} \Big|_{k=0}$, si può includere m_a nella sommatoria, ottenendo:

$$= \frac{|F(f)|^2}{T_S} \cdot \left[\sigma_a^2 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}(k) e^{j2\pi k T_S f} \right]$$

Riprendiamo a questo punto la formula di Poisson:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f T_S} = \frac{1}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{k}{T_S} \right)$$

Ricordando che $\frac{1}{T_S} = D$, ossia il reciproco del tempo di simbolo è pari al baudrate, possiamo sostituire nella funzione di densità di potenza spettrale, ottenendo:

$$\mathcal{P}_x \{f\} = |F(f)|^2 \cdot D \cdot \sigma_a^2 + m_a^2 \cdot D \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(nD)|^2 \delta(f - nD)$$

Utilizzando le proprietà della delta di Dirac, che permettono di campionare una funzione solo sui punti.

Come vediamo, il primo termine fornisce allo spettro una componente continua, ed il secondo una componente a righe. Notiamo che:

- Questo caso particolare (che però capita di studiare sovente) presenta comunque righe spettrali; se $m_a = 0$, la componente discreta si annulla.
- Se $m_a \neq 0$, è comunque possibile che nello spettro di potenza non appaiano righe: se $F(nD) = 0$ per qualsiasi n , le righe scompaiono.
- Se le righe sono presenti, esse sono dislocate esclusivamente in prossimità delle armoniche del baudrate D .

7.3.2 Variabili aleatorie a_n e a_{n+k} correlate

Se le variabili a_n e a_{n+k} sono correlate, dato un coefficiente di correlazione $\rho(k)$, definito così:

$$\rho(k) = \frac{\mathcal{R}(k) - m_a^2}{\sigma_a^2}$$

Possiamo a questo punto scrivere l'autocorrelazione dei dati, mediante alcuni passaggi, come:

$$\mathcal{R}(k) = \begin{cases} \mathbb{E}[a_n^2] = \sigma_a^2 + m_a^2, & k = 0 \\ \mathbb{E}[a_n a_{n+k}] = \sigma_a^2 \rho(k) + m_a^2, & k \neq 0 \end{cases}$$

A seconda del valore del coefficiente di correlazione $\rho(k)$, si sentirà il peso della varianza σ_a^2 ; sostituendo dunque nella formula della densità, si otterranno di nuovo due contributi:

$$\mathcal{P}_x\{f\} = \sigma_a^2 \cdot D \cdot |F(f)|^2 \cdot W_\rho(f) + (m_a \cdot D)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(nD)|^2 \delta(f - nD)$$

Anche in questo caso si ha dunque una parte continua ed una discreta; la parte continua però, oltre alla trasformata di Fourier di $f(t)$, subisce la dipendenza di $W_\rho(f)$, ossia della correlazione nel tempo dei dati. Il termine $W_\rho(f)$ si definisce infatti come:

$$W_\rho(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rho_k e^{-j2\pi k T_S f}$$

ciò ci porta a pensare che, 'introducendo' in qualche modo una correlazione tra i dati, si può modificare la correlazione ρ , e quindi lo spettro di potenza.

Ciò ci permette dunque di fare qualcosa di questo genere: è possibile introdurre 'artificialmente' correlazioni, mediante particolari codici, come i 'codici di linea': in questo modo, si può agire su $W_\rho(f)$, e quindi effettuare sagomature dello spettro. Un esempio pratico di dove serve ciò è la linea telefonica: essa si basa sull'uso di trasformatori, componenti che non permettono di far passare la continua. In trasmissioni digitali, mediante i codici di linea, si può ovviare facilmente a problemi di questo tipo.

7.4 Classificazioni di segnali in banda base

Consideriamo alcune classificazioni di segnali, per quanto riguarda i segnali in banda base.

7.4.1 Classificazione per simboli

- NRZ (No Return to Zero): il simbolo $f(t)$ occupa per intero il periodo T_S , senza mai annullarsi, ossia senza mai assumere il valore nullo;
- RZ (Return to Zero): dualmente a prima, $f(t)$ è '0' per un determinato intervallo di tempo compreso nel periodo T_S .

7.4.2 Classificazione per variabili casuali a_n

Considerando eventi equiprobabili, ossia sorgenti che producono tanti '0' quanti '1', esistono sostanzialmente due tipi di segnali, sotto il punto di vista della classificazione per i valori che possono acquisire:

- Unipolare: a_n assume solo valori '0' e 'A' (spesso $A = 1$); a noi il compito di decidere la codifica con questi valori (molto spesso si associa '0' a '0' e 'A' a '1').
- Antipodale (polare): a_n assume solo valori $\pm A$; la codifica al solito è arbitraria, anche se di solito si sceglie il valore negativo associato a '0', e quello positivo associato a '1'.

Si noti che, se le variabili casuali sono unipolari, la media è non nulla:

$$\mathbb{E}[a_n] \neq 0$$

Al contrario, se sono antipodali:

$$\mathbb{E}[a_n] = 0$$

Questo ovviamente data la solita ipotesi di sorgenti equiprobabili.

7.5 Cenni alle Codifiche

Il fatto che si sia parlato di modalità di classificazione delle variabili casuali, ha introdotto un possibile problema legato ad esse: la codifica dei loro valori. Esistono infinite di codifiche utilizzabili, di diverso tipo: alcune hanno una corrispondenza univoca (o addirittura biunivoca) tra bit che si vuole trasmettere e simbolo ad esso associato. D'altro canto, altre addirittura non hanno alcuna corrispondenza con il bit che si intende trasmettere. Non trattiamo per ora l'argomento in profondità, ed occupiamoci esclusivamente di alcuni esempi pratici di codifiche.

7.5.1 Esempio Pratico 1 : il codice AMI

Il codice AMI (Alternate Marking Insertion) codifica i simboli (lavorando ovviamente sulle variabili aleatorie) nel seguente modo:

- '0' codifica $a_n = 0$;
- '1' codifica $a_n = \pm 1$.

Il \pm indica il fatto che, alternativamente, una volta avremo $a_n = +1$, una volta $a_n = -1$, alternandosi dunque sempre dalla precedente. La codifica AMI quindi non è univoca, poichè serve di fatto una traccia della memoria passata, al fine di poterla interpretare correttamente.

Si noti che, poichè il numero di $+1$ eguaglia circa quello di -1 , abbiamo che:

$$\mathbb{E}[x(t)] = \langle x(t) \rangle = 0$$

7.5.2 Esempio pratico 2

Determinare la densità spettrale di potenza $\mathcal{P}_x\{f\}$ di un segnale modulato NRZ antipodale in banda base e senza correlazione, dato un simbolo impulsivo rettangolare di altezza unitaria causale.

Vediamo come procedere: innanzitutto, riprendiamo la definizione di base del segnale $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_S)$$

Da qua, abbiamo che:

$$\mathcal{P}_x \{f\} = D |F(f)|^2 \sigma_a^2 + (m_a \cdot D)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |F(nD)|^2 \delta(f - nD)$$

Per quanto riguarda il parametro m_a , si può calcolare come valore atteso:

$$m_a = \mathbb{E} [a_n] = 1 \cdot 0,5 + (-1) \cdot 0,5 = 0$$

Abbiamo dunque che:

$$\mathcal{P}_x \{f\} = \frac{|F(f)|^2}{T_b}$$

Dalla descrizione del simbolo, abbiamo che:

$$f(t) = p_{T_S} \left(t - \frac{T_S}{2} \right)$$

La trasformata di Fourier del simbolo sarà un seno cardinale:

$$F(f) = \mathcal{F} \{f(t)\} = T_b \cdot \frac{\sin(\pi f T_b)}{\pi f T_b} e^{-j2\pi f \frac{T_b}{2}}$$

Il modulo quadro a questo punto si potrà banalmente calcolare come:

$$|F(f)|^2 = T_b^2 \cdot \frac{\sin^2(\pi f T_b)}{(\pi f T_b)^2}$$

Come sappiamo conoscendo questa funzione da Teoria dei Segnali, il massimo assoluto è pari a T_b ; la banda null-to-null di questo segnale, inoltre, sarà pari a:

$$B_{00} = \frac{1}{T_b}$$

Definiamo a questo punto (in questo esempio pratico, ma che comunque avrà valore universale) l'efficienza spettrale η come:

$$\eta = \frac{B_r}{B}$$

Dove B_r è il bitrate, e B una banda del segnale (molto spesso in questo ambito si usa la B_{00} , ossia la banda null-to-null appena usata).

In questo esercizio, quindi:

$$\eta = \frac{B_r}{B} = \frac{B_r}{B_r} = 1$$

Abbiamo dunque concluso il calcolo di $\mathcal{P}_x\{f\}$, considerando alcuni casi particolari, ed alcuni esempi pratici.

7.6 Sistemi di trasmissione digitali

Abbiamo già visto che un sistema di trasmissione digitale si può schematizzare in questo modo:

Modellizziamo meglio il blocco includente gli ultimi tre blocchi: abbiamo il Tx digitale, dopo il quale vediamo il canale, che si può pensare come un filtro, la cui risposta all'impulso è pari a $h_c(t)$. Il ricevitore digitale si può modellizzare anch'esso come un filtro, con risposta ad impulso $h_R(t)$; questo secondo filtro da noi verrà chiamato 'filtro di ricezione'.

In uscita dal secondo filtro vi è un campionatore, in grado di campionare per l'appunto il segnale $y(t)$ in punti $t_k = t_0 + kT_S$.

Il decisore è un dispositivo in grado di produrre, a partire dai segnali campionati $y(t_k)$, la sequenza di bit.

Il primo filtro è dovuto ad effetti di filtraggio del canale, che potrebbero ad esempio tagliare un certo range di armoniche. Il secondo è un filtro da noi inserito e progettato, al fine di eliminare più rumore possibile. da qua nasce quindi un discorso un po' complicato: 'quanto' deve poter tagliare il nostro filtro, $h_R(t)$? Il filtro deve essere stretto, ma non troppo, altrimenti taglierebbe parte del segnale utile, distorcendolo. Il campionatore seleziona un valore di $y(t)$ per ciascun periodo T_S , selezionando solo un punto dall'intero simbolo.

lo schema a blocchi si può semplificare, considerando 'assieme' i due blocchi $h_c(t)$ e $h_R(t)$, in un unico filtro, $h(t)$, definito come:

$$h(t) = h_c(t) \otimes h_R(t)$$

Otterremo dunque:

Quanto vale $y(t)$? Utilizzando le conoscenze acquisite in Teoria dei Segnali sui sistemi LTI, vediamo che:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t)$$

Dove $x(t)$ vale:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_S)$$

Quindi, possiamo dire che:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta(t - nT_S) \otimes f(t) \otimes h(t)$$

Definendo dunque $g(t)$ il prodotto di convoluzione tra $f(t)$ e $h(t)$, possiamo riscrivere tutto ciò come:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT_S)$$

per ogni T_S dovremo tuttavia campionare un singolo punto, t_k :

$$t_k = t_0 + kT_S$$

Dunque, otterremo che:

$$y(t_k) = y(t)|_{t_k=t_0+kT_S} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t_k - nT_S) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t_0 + kT_S - nT_S)$$

I t_k sono detti 'istanti di campionamento' e, affinché il decisore possa ricostruire un '1' piuttosto che uno '0', devono essere scelti in maniera adeguata.

7.6.1 Esempio Pratico

Presentiamo un esempio pratico di come bisogna comportarsi, dinnanzi a problemi di questo tipo.

Dato un segnale $x(t)$ binario, antipodale, NRZ, con $f(t)$ porta causale di ampiezza 1, possiamo dire ciò:

Possiamo pensare che:

$$g(t) = x(t) \otimes h(t)$$

$g(t)$ può essere simile, un po' più regolare, dal momento che la convoluzione tende a regolarizzare una curva. Tra poco presenteremo il segnale $y(t)$ risultante dalla $g(t)$ di partenza, ma non prima di aver completato un

discorso che non abbiamo ancora ben affrontato ed evidenziato: la scelta del t_k .

Al variare di k in \mathbb{Z} abbiamo diversi istanti di campionamento t_k . Essi non si possono scegliere 'a caso', ma devono essere selezionati (dal progettista del sistema di trasmissione), in modo che il decisore possa distinguere, con una certa sensibilità, l'1' dallo '0'. Quello che non potremo dunque fare, è posizionare i t_k , o meglio il primo di essi, t_0 , in prossimità del massimo o del minimo del simbolo: in questo modo, i ciclo successivi rimarranno o sullo stesso livello, o andranno in un altro livello, sensibilmente differente dal primo.

Scegliendo il t_0 in una posizione di massimo, dunque, si può discriminare violentemente le differenze, evidenziandole, e permettendo così al decisore di non avere problemi.

A seconda di quanto il massimo sia piatto, ossia a seconda di quanto sia larga la parte più elevata del simbolo, si potrà avere una zona più o meno utilizzabile per la scelta del t_0 : se infatti il massimo è molto esteso, si ha maggiore possibilità di scelta del punto di campionamento iniziale.

7.7 Interferenza Intersimbolica

Ai fini di comprendere meglio cosa capita, per ogni k , studiamo in modo approfondito il primo caso, ossia $k = 0$:

$$y(t_0) = y(t_k)|_{k=0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t_0 - nT_S)$$

Stiamo dunque considerando solo il primo simbolo, trasmesso dal trasmettitore Tx in un intervallo temporale $[0; T_0]$, e ricevuto nel ricevitore Rx con un ritardo introdotto dai filtri, T_d : $[T_d; T_0 + T_d]$.

Poichè siamo dunque interessati solo al primo simbolo, con $n = 0$, vogliamo determinare l'informazione contenuta in a_0 , ossia:

$$a_0 = a_n|_{n=0}$$

Estraiamo dunque dalla serie solo l'informazione legata ad a_0 :

$$y(t_0) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t_0 - nT_S) \longrightarrow a_0 \cdot g(t_0) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t_0 - nT_S), \quad n \neq 0$$

Vediamo che $y(t_0)$ ha dunque due contributi: il contributo 'utile', contenente informazione, ossia $a_0 \cdot g(t_0)$, e la serie, parte non utile, detta 'parte

interferente', o ISI (Inter-Symbolic Interference, ossia Interferenza Intersimbolica). Il decisore riceverà dunque non solo la componente utile, ma anche un ulteriore contributo, interferente: il termine della serie infatti non porta informazione su a_0 , ma anzi lo disturba, lo distorce.

Più è elevato il disturbo, più sarà difficile ricevere informazioni: questo perchè la ISI porta ad un degrado dell'informazione.

Piccola osservazione: se $f(t)$ e $g(t)$ hanno lo stesso dominio, ossia l'intervallo di ampiezza T_S , allora si ha ISI? La risposta è no: possiamo pensare alla ISI come una sorta di termine 'di coda', che si va a sommare al termine a_0 ; se $g(t)$ fosse per qualche motivo limitata in T_S , non avremmo sovrapposizioni, e quindi non avremmo code aggiuntive da sommare. Purtroppo, l'effetto della convoluzione, ovvero del filtraggio, ha generalmente il risultato, in questo contesto negativo, di aumentare il dominio del segnale, introducendo queste code.

Quindi, in generale, anche se $x(t)$ è esente da interferenza intersimbolica, a meno di alcuni casi particolari, espanderemo nel tempo $f(t)$ in $g(t)$, e ciò provocherà proprio l'introdursi di questa.

Abbiamo così introdotto il concetto di interferenza intersimbolica; forniamo, a questo punto, alcune definizioni riguardanti il concetto di distorsione:

- Distorsione di picco: a priori, guardando il segnale influenzato dalla ISI, non possiamo conoscere i valori precisi degli a_n , dal momento che essi sono variabili casuali. Nella definizione di distorsione di picco, faremo dunque un'ipotesi di caso peggiore: tutte le code sono opposte al segnale, e si sommano quindi tutte in modulo al segnale. La distorsione di picco, D_p , si definisce dunque come:

$$D_p = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g(t_0 - nT_S)|}{|g(t_0)|}, \quad n \neq 0$$

- Distorsione efficace: si tratta di un parametro più realistico rispetto alla distorsione di picco, che somma ogni termine in valore efficace, ossia in potenza:

$$D_e = \sqrt{\frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g(t_0 - nT_S)|^2}{|g(t_0)|^2}}, \quad n \neq 0$$

7.7.1 Diagramma ad occhio

Uno dei parametri più importanti per determinare le prestazioni di un sistema digitale è il diagramma ad occhio: esso si costruisce prendendo ciascuno degli

intervallo di tempo in ogni nT_S , disegnandolo sullo stesso intervallo di tempo nel nostro disegno. Ciò ci fornisce un indice qualitativo delle prestazioni, nonché un'idea di dove si dovrebbero posizionare gli istanti di campionamento t_k .

Cerchiamo di capire come si costruisce, e come si studia, in un esempio pratico:

Esempio Pratico

Dato il seguente segnale $y(t)$:

Disegnamone il diagramma ad occhio:

In questo caso, si riesce distintamente a vedere un 'occhio': i due livelli della trasmissione binaria sono perfettamente distinti, e dunque possiamo dire, qualitativamente parlando, che le prestazioni siano molto buone.

Il diagramma ad occhio può essere molto utile anche per un'altra ragione: vediamo che, se il diagramma ad occhio è disegnato correttamente, vi sono zone di 'intersezione' tra diverse figure, tra diversi simboli; in questo diagramma la zona di intersezione è molto larga; in altri sarà più stretta, o addirittura così confusa da non permettere di visualizzare niente del genere. L'intersezione sarà ad ogni modo molto utile, poichè gli istanti in cui si ha intersezione sono gli istanti in cui i due livelli saranno maggiormente separati tra loro, e quindi gli istanti ideali per la scelta del primo istante di campionamento, t_0 .

In realtà, i problemi di cui ci dovremmo preoccupare sono tuttavia due, anche se per ora uno è stato accantonato: stiamo parlando abbondantemente di ISI, ma ci stiamo dimenticando del nostro storico nemico: il rumore.

La ISI influenza le dimensioni dell'occhio del grafico: più la banda del filtro sarà elevata, ossia più saranno le armoniche che lasceremo passare, e più l'occhio sarà grande e distinguibile. Peccato che, solitamente, la densità spettrale di rumore nei problemi che trattiamo sia uniforme: aumentando la banda, linearmente con essa aumenta anche la potenza di rumore; se magari andiamo a guadagnarci in fatto di eliminazione di ISI, sicuramente ci andiamo a perdere sotto il punto di vista del rumore passante. Per questo motivo, a seconda del sistema in studio, ci converrà trovare un giusto compromesso per la scelta della banda passante nel filtro: questo lo si può fare, modificando il filtro di ricezione che noi dovremo progettare.

7.8 Criterio di Nyquist

Dato un $g(t)$ sì fatto (ed un $x(t)$ ad esso relativo):

La $y(t)$ potrebbe avere un andamento di questo tipo:

Scegliendo come t_0 il punto di massimo, capita una cosa molto interessante: ogni t_k va a posizionarsi su di un punto in cui le altre sinc, ottenute dalla traslazione richiesta dall'espressione:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT_S)$$

In altre parole, capita ciò: dalla teoria sappiamo che, per ogni intervallo di tempo di durata T_S , noi campioniamo un singolo valore, $y(t_k)$, in prossimità quindi di punti $t_k = t_0 + kT_S$, dato t_0 scelto in modo idoneo, come già descritto. Se però qua scegliamo come t_0 il punto più alto, ossia il centro del lobo principale, di durata $2T_S$, capita una cosa molto, molto interessante: ognuno dei kT_S andrà a cadere sullo zero delle altre sinc; in questo modo, l'interferenza intersimbolica sarà sempre nulla, poichè $g(t - kT_S)$ sarà sempre identicamente nulla.

Ciò ci fa capire una cosa molto interessante: progettando in una certa maniera il filtro di ricezione, si può ottenere ISI nulla.

Dato t_0 l'istante di campionamento, vorremmo ricavare condizioni che ci dicano quando possiamo eliminare l'interferenza intersimbolica; abbiamo visto finora ciò, nell'esempio: se $g(t_0)$ è una costante c non nulla, e $g(t_0 - nT_S)$ per ogni n diverso da 0 è nulla, avremo annullato la ISI:

$$ISI = 0 \iff \begin{cases} g(t_0) = c \neq 0 \\ g(t_0 - nT_S) = 0 \forall n \neq 0 \end{cases}$$

Cerchiamo ora di formalizzare quest'espressione un po' meglio, in un altro modo: quelli che noi ora consideriamo, sono solo punti campionati: come già detto più e più volte, per ogni T_S consideriamo solo un $t_k = t_0 + kT_S$; per campionare questi punti, come sempre fatto in ambito della Teoria dei Segnali, potremo usare semplicemente le delta di Dirac e le loro proprietà.

Come si può dunque esprimere la condizione appena presentata? Beh, di tutte le δ , con i relativi coefficienti, ne dovrà restare solo una: quella centrata nel punto che stiamo trattando; le altre, infatti, costituiranno solo ISI, e quindi andranno eliminate. Ragionando in matematiche:

$$g(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[t - (t_0 + nT_S)] = c \cdot \delta(t - t_0)$$

Possiamo escludere il caso $n = 0$, separandolo da tutti gli altri, ottenendo:

$$g(t_0)\delta(t - t_0) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t_0 - nT_S)\delta[t - (t_0 + kT_S)] = c\delta(t - t_0), \quad n \neq 0$$

Da ciò si può verificare facilmente che, per ogni $k \neq 0$, i coefficienti delle $\delta(t)$ saranno tutti nulli, e quindi:

$$g(t_0)\delta(t - t_0) = c\delta(t - t_0) \longrightarrow c = g(t_0)$$

Calcoliamo dunque la trasformata di Fourier di ambo i membri dell'espressione iniziale:

$$G(f) \otimes \frac{1}{T_S} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f + \frac{n}{T_S}\right) e^{-j2\pi ft_0} = ce^{-j2\pi ft_0}$$

Ricordando che il baudrate D si definisce come l'inverso del tempo di simbolo T_S :

$$\longrightarrow c = D \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} G(f) \otimes \delta(f + nD)$$

Dato dunque $k = -n$:

$$\longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G(f - kD) = \frac{c}{D} = \text{costante}$$

Questo è il criterio di Nyquist: se accade che la serie appena presentata è costante, allora l'interferenza intersimbolica sarà nulla.

7.8.1 Esempio Pratico 1

Dato un $g(t)$ il cui spettro $G(f)$ è pari a:

$$G(f) = p_D(f)$$

Dove D è il baudrate del sistema, determinare il contributo della ISI.

Sappiamo che se $n = 1$, trasliamo di $\frac{1}{T_S}$, se $n = 2$ di $\frac{2}{T_S}$, e così via; la cosa interessante tuttavia è la seguente: se lo spettro continua a traslare di una quantità pari al baudrate, da $-\infty$ a $+\infty$, lo spettro diverrà di fatto una costante.

Poichè si ottiene una costante, possiamo dire di avere ISI nulla: se verificassimo mediante un disegno vedremmo che, a parte il punto stesso, gli zeri sarebbero in prossimità dei t_k , e quindi la ISI sarebbe nulla.

Affinchè il criterio di Nyquist sia verificato, l'insieme canale+filtro di ricezione deve fare in modo da avere in uscita tutte le componenti spettrali, e quindi il sistema deve avere una banda passante almeno pari a $\frac{D}{2}$. Soddisfatte queste ipotesi, il sistema non produrrà interferenza intersimbolica.

7.8.2 Alcune problematiche

La scelta della $g(t)$ appena introdotta purtroppo ci pone alcuni problemi: il suo supporto nel tempo è infinito, come sappiamo dalla Teoria dei Segnali, e si hanno discontinuità nel dominio di Fourier. In altre parole, il sistema realizzato mediante una sinc nel tempo non è realizzabile, in quanto:

- Non è causale;
- Presenta una discontinuità in frequenza.

La non-causalità si potrebbe ridurre, considerando da un certo punto in poi $g(t) = 0$, e quindi inserendo un ritardatore in modo da poter portare il punto di inizio del segnale sull'origine degli assi dei tempi. Fattore invece non eliminabile è un altro: il fatto di avere un salto in frequenza, implica avere un punto a variazione infinita di velocità, e quindi ciò nel tempo implica un segnale a risposta molto lenta, una scarsa reattività nel dominio del tempo. Questa scarsa reattività dà luogo ad un diagramma ad occhio molto stretto, e quindi difficile da studiare, ai fini della determinazione dell'istante di campionamento.

Nei sistemi reali, l'istante di campionamento viene rilevato da un circuito particolare, in grado di recuperare i tempi di clock; se l'occhio è però troppo stretto, il circuito ha dei problemi nell'effettuare l'operazione di recupero.

Se abbiamo risposte lente nel tempo, i lobi saranno più larghi, e così tenderemo a togliere spazio all'occhio; i lobi secondari si mettono 'sopra' perchè essi indicano il contributo aggiunto di ISI rispetto alla scelta del punto di massimo, all'ordinata del tempo di campionamento: se il circuito rilevatore sbaglia a scegliere il t_0 , all'ordinata del punto va ad aggiungersi l'indeterminazione introdotta dalla ISI causata dalla presenza dei lobi secondari. Il circuito rilevatore deve dunque essere molto preciso, non tanto per la variazione di $y(t_k)$, quanto per la grossa indeterminazione introdotta dai lobi secondari.

7.9 Spettri a coseno rialzato

Poichè la forma d'onda prima presentata è causale, e comunque darebbe luogo ad un occhio troppo stretto, introduciamo un'altra classe di forme d'onda, al fine di poter capire come progettare i filtri in modo corretto.

Uno spettro a coseno rialzato, ha un andamento di questo genere:

$$\begin{cases} 1, & |f| < \frac{D}{2}(1 - \rho) \\ \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\left(\frac{\pi D}{\rho} \right) \left(|f| - \frac{D}{2}(1 - \rho) \right) \right] \right\}, & \frac{-D}{2}(1 - \rho) < f < \frac{-D}{2}(1 + \rho) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Abbiamo una porta dunque, ed un arco di coseno; il baudrate D vale $\frac{1}{2}$ (come vedremo tra poco).

Solitamente, i sistemi si progettano nel seguente modo: il parametro ρ viene detto 'roll-off' del filtro a coseno rialzato, e può essere compreso tra 0 e 1; nella fatispecie:

- Se $\rho = 0$, non abbiamo la parte di coseno, e così si ha solo una porta compresa tra: $-\frac{D}{2}$ e $\frac{D}{2}$;
- Se $\rho = 1$, la porta si annulla, e si avrà solo un tratto di coseno da $-D$ a $+D$.

Il baudrate che abbiamo prima definito si riferisce all'uso di una particolare banda: la banda -6 dB:

$$G(f)|_{f=\frac{D}{2}} = \frac{1}{2}$$

Questa è la banda a -6 dB del segnale; questo perchè, in ambito di grandezze lineari, -6 dB significa 'dimezzamento'.

Verifichiamo subito che, per ragioni di simmetria, il criterio di Nyquist ha tutte le ipotesi verificate:

Scegliendo t_k idonei, avremo sempre e comunque valore costante, e quindi il criterio sarà rispettato, e non avremo interferenza intersimbolica.

Valori tipicamente utilizzati di ρ variano da 0,1 a 0,2: in questa maniera, il segnale che trasmetteremo avrà meno banda occupata (come si vede dalla semplice lettura delle espressioni prima presentate), e si ha possibilità di trasmettere su più canali.

Nel tempo, il segnale $g(t)$ avrà una forma del tipo:

$$g(t) = D \cdot \frac{\sin(\pi Dt)}{\pi Dt} \cdot \frac{\cos(\pi D \rho t)}{1 - (2D \rho t)^2}$$

Al crescere di ρ , i lobi decrescono più rapidamente nel tempo, poichè in frequenza si ha un aumento della banda, e dunque i lobi diventano più bassi.

Al fine di ottenere un occhio più aperto, ci servirebbe ρ elevato; poichè l'elettronica si è tuttavia evoluta a sufficienza da sviluppare circuiti rilevatori di clock molto accurati, si sceglie di risparmiare banda, tenendo un fattore di roll-off basso.

Da considerare è anche il fattore rumore: più la banda (e quindi ρ) è elevata, ampia, e più c'è rumore; conviene avere poca banda occupante, passante, anche per questo motivo: si riduce sì la dimensione dell'occhio, ma andiamo anche a ridurre il rumore passante nel sistema.

7.10 Equalizzatori

Abbiamo finora fatto i conti senza l'oste: abbiamo infatti fatto finta di conoscere la banda passante del canale, supponendo che essa sia maggiore della banda assoluta del segnale, B_{abs} :

$$B_{abs} = \frac{D}{2}(1 + \rho)$$

Questa può, volendo, essere invertita, al fine di determinare la massima velocità di trasmissione dei simboli, D :

$$D = \frac{2B_{abs}}{1 + \rho}$$

Spesso non abbiamo informazioni sul canale: in casi realistici, la funzione di trasferimento del canale, $H_c(f)$, può anche cambiare nel tempo; supponiamo di muoverci in auto con il cellulare, ad esempio: cambiando le celle cui siamo collegati, cambiando le condizioni atmosferiche, cambiando la distanza tra ricevitore e trasmettitore, potremmo avere variazioni nel tempo.

Poichè abbiamo che:

$$G(f) = F(f) \cdot H_c(f) \cdot H_R(f)$$

E abbiamo il vincolo di Nyquist su $G(f)$, possiamo modificare le altre funzioni di trasferimento, in modo da soddisfare sempre le ipotesi del criterio di Nyquist. Lavoriamo dunque nella fatispicie su $H_R(f)$, 'adattandola' nel tempo alle condizioni del canale.

Lo stimatore del canale, al passare del tempo, 'stima' la funzione di trasferimento del canale, $H_c(f)$, fornendo le informazioni, al fine di correggere $H_R(f)$. La stima del canale si ottiene con opportune tecniche basate

sulla trasmissione di sequenze note a priori dallo stimatore, dette 'preamboli': lo stimatore 'sa' cosa deve ricevere, confronta rispetto a quello che si aspetta, e propone quindi una stima della $H_c(f)$ da lui elaborata a $H_R(f)$, correggendola.

Capitolo 8

Sistemi Binari in Banda Base

Parliamo per ora di sistemi binari in banda base; in questi sistemi, il tempo di simbolo T_S coincide con il tempo di bit, T_b : il bitrate dunque coincide, come già detto più volte, con il baudrate.

Il segnale $x(t)$ si scrive mediante la solita notazione:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_S)$$

Dove $f(t)$ è la forma d'onda base di un simbolo; per comodità, chiamiamo $\xi(t)$ la funzione rappresentante il simbolo base filtrato dal canale:

$$\xi(t) = f(t) \otimes h_c(t)$$

Il segnale utile in uscita dal canale sarà dunque pari a $\eta(t)$, definito, a partire dal precedente risultato, come:

$$\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \xi(t - nT_S)$$

a_n è una variabile aleatoria; poichè siamo in un sistema binario, a_n potrà assumere solo due valori: α_0 , se si è trasmesso uno '0', e α_1 , se si è trasmesso un '1'. Per comodità, supponiamo per ipotesi che:

$$\alpha_1 > \alpha_0$$

Consideriamo lacune altre ipotesi molto importanti:

- Il rumore sul canale è gaussiano bianco ergodico a media nulla;
- L'interferenza intersimbolica non è presente nel sistema (poichè per ipotesi consideriamo un sistema ben progettato).

In questo modo, la qualità delle trasmissioni non dipende dai simboli trasmessi prima e/o dopo quello che si sta studiando.

Concentriamoci sulle prestazioni di trasmissione di un singolo bit, quello campionato nel solito primo istante t_0 , $y(t_0)$:

$$y(t_0) = a_n|_{n=0} g(t_n) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t_0 - nT_S), \quad n \neq 0$$

Trasmesso e considerato $y(t_0)$, supponiamo che il decisore sia basato su di un comparatore di soglia: il segnale $r_F(t)$, ossia $r(t)$ processato dal filtro di ricezione, verrà considerato in un singolo punto, ossia quello campionato; il comparatore di soglia ci dirà dunque se questo punto indica uno '0' o un '1'.

$r(t)$ è il segnale in ingresso nel filtro di ricezione: esso sarà formato dalla parte utile, $\eta(t)$, e dal rumore $n(t)$ che si è aggiunto nel sistema:

$$r(t) = \eta(t) + n(t)$$

In uscita dal filtro di ricezione avremo $r_F(t)$, con una forma del tipo:

$$r_F(t) = r(t) \otimes h_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \xi(t - nT_b) \otimes h_R(t) + n(t) \otimes h_R(t)$$

Il comparatore, fissato su di una certa soglia V_T , farà su ogni campione rilevato dal comparatore (considerando ad esempio il t_0):

$$r_F(t_0) \begin{cases} \geq V_T \longrightarrow '1' \\ < V_T \longrightarrow '0' \end{cases}$$

Definiamo a questo punto, per alleggerire la notazione, una funzione $g(t)$ e $n_F(t)$ come:

$$g(t) = \xi(t) \otimes h_R(t) = f(t) \otimes h_c(t) \otimes h_R(t)$$

$$n_F(t) = n(t) \otimes h_R(t)$$

Introducendo dunque gli effetti di filtraggio del filtro di ricezione in modo più compatto, il segnale $r_F(t)$ sarà:

$$r_F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT_b) + n_F(t)$$

Stiamo dunque considerando il primo bit campionato, e quindi $k = 0$, ma anche $n = 0$, poichè il fatto di non avere ISI ci permette di escludere tutti i termini diversi da 0. Possiamo dunque dire che:

$$r_F(t_0) = a_n|_{n=0}g(t_0) + n_F(t_0)$$

Cerchiamo di capire meglio cosa stiamo trattando; abbiamo che:

$$r_F(t_0) = \begin{cases} \alpha_0 g(t_0) + n_F(t_0), & Tx = 0 \\ \alpha_1 g(t_0) + n_F(t_0), & Tx = 1 \end{cases}$$

Poichè trasmettiamo solo il termine legato a $n = 0$, di fatto sappiamo che in uscita dal canale avremo α_0 o α_1 , ma sapremo di avere inviato uno dei due, ed anche quale dei due! Una volta trasmessi, infatti, α_0 e α_1 non sono più variabili aleatorie, bensì numeri, valori deterministici!

$n_F(t_0)$ è il rumore introdotto dal sistema in un dato istante t_0 : non abbiamo quindi dipendenza dal tempo poichè esso è fissato, ma vi sarà dipendenza statistica: si tratta dunque di una variabile aleatoria, poichè non ci è dato sapere a priori quanto rumore introduca il canale.

Tutto ciò che abbiamo finora detto è corretto, ma incompleto: non abbiamo detto ancora quando si commettono errori, ossia quando:

1. Trasmettendo un segnale tale per cui $r(t) < V_T$, il decisore rileva un '1';
2. Trasmettendo un segnale tale per cui $r(t) > V_T$, il decisore rileva uno '0'.

Quando capita ciò? Gli errori di trasmissione sono aleatori; può però capitare che, nell'istante di campionamento t_k , il rumore si aggiunga (nel caso 1), o si sottragga (nel caso 2), in misura tale da campionare un valore molto distante da $r(t)$ nel resto dell'intervallo: è un evento molto remoto (poichè il rumore dovrebbe provocare un picco di rumore opposto al segno di a_n in quel preciso istante, di fatto 'sballando' tutto il sistema), ma avviene; probabilità tipiche sono dell'ordine di 10^{-6} per sistemi elettrici, 10^{-10} per sistemi ottici.

Il campionare un istante fortemente influenzato dal rumore, inganna il decisore che così presenta, in uscita, il bit 'sbagliato', ossia diverso da quello effettivamente trasmesso.

Vogliamo calcolare la probabilità di errore, $\mathbb{P}\{e\}$, ossia la probabilità che, trasmesso un bit, se ne riceva un altro.

Utilizzando il teorema della probabilità totale, abbiamo che:

$$\mathbb{P}\{e\} = \mathbb{P}\{e|Tx = 1\} \mathbb{P}\{Tx = 1\} + \mathbb{P}\{e|Tx = 0\} \mathbb{P}\{Tx = 0\}$$

Supponiamo di avere come al solito sorgenti equiprobabili:

$$\mathbb{P}\{Tx = 1\} = \mathbb{P}\{Tx = 0\} = \frac{1}{2}$$

Avremo dunque che:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} [\mathbb{P}\{e|Tx = 1\} + \mathbb{P}\{e|Tx = 0\}]$$

Dovremo, a questo punto, calcolare le due probabilità di errore condizionate, per quanto riguarda i casi 1 e 2.

Caso 1: $\mathbb{P}\{e|Tx = 1\}$

Per quanto riguarda questo primo caso, avremo che:

$$r_F(t_0) < V_T$$

Di conseguenza:

$$\mathbb{P}\{r_F(t_0) < V_T | Tx = 1\}$$

Se $Tx = 1$, allora $a_n|_{n=0} = \alpha_1$; in questo caso, vediamo che:

$$r_F(t_0) = \alpha_1 g_0 + n_F(t_0) \implies \mathbb{P}\{\alpha_1 g_0 + n_{F,0} < V_T | Tx = 1\}$$

Come si può calcolare ciò? $\alpha_1 g_0$ è un numero, un semplice offset; $n_{F,0}$ è una variabile aleatoria gaussiana a valor medio nullo; il termine di cui vogliamo calcolare la probabilità, dunque, sarà una variabile aleatoria gaussiana a media $\mu = \alpha_1 g_0$.

Per calcolare la probabilità in questione dobbiamo ricorrere all'integrale della gaussiana, ossia alla funzione $\text{erfc}(x)$:

$$\text{erfc}(x) \triangleq \frac{2}{\pi} \int_x^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

La error function calcola dunque l'area delle code della gaussiana, al di sopra di $|x|$, dove x è l'argomento. Utilizzando questa definizione, dunque, otteniamo:

$$\mathbb{P}\{e|Tx = 1\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{r_{F0}|Tx=1}(x) dx = \int_{-\infty}^{V_T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{nF}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_{nF}^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha_1 g_0 - V_T}{\sqrt{2} \sigma_{nF}} \right)$$

Caso 2: $\mathbb{P}\{e|Tx = 0\}$

$$\mathbb{P}\{e|Tx = 0\} = \mathbb{P}\{Rx = 1|Tx = 0\} = \mathbb{P}\{\alpha_0 g_0 + n_{F0} \geq V_T\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{V_T - \alpha_0 g_0}{\sqrt{2} \sigma_{nF}} \right)$$

Possiamo quindi ora calcolare la probabilità di errore globale, come somma delle due:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} [\mathbb{P}\{e|Tx = 0\} + \mathbb{P}\{e|Tx = 1\}] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha_1 g_0 - V_T}{\sqrt{2} \sigma_{nF}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{V_T - \alpha_0 g_0}{\sqrt{2} \sigma_{nF}} \right) \right]$$

Graficamente, accadrà qualcosa di questo genere:

Le due funzioni di densità hanno, a parte per quanto riguarda la media, le stesse caratteristiche. Si può dunque dimostrare che, se le due densità di probabilità differiscono solo per la media, la scelta ottima di V_T è la seguente: ponendo uguali le due espressioni:

$$\mathbb{P}\{e|Tx = 1\}|_{V_T} = \mathbb{P}\{e|Tx = 0\}|_{V_T}$$

Possiamo porre uguali i due argomenti delle $\operatorname{erfc}(x)$, ottenendo:

$$\frac{V_T - \alpha_0 g_0}{\sqrt{2} \sigma_{nF}} = \frac{\alpha_1 g_0 - V_T}{\sqrt{2} \sigma_{nF}} \implies V_T = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} g_0$$

Collocando dunque V_T a metà delle due medie, si minimizza la probabilità di errore su sistemi in cui le due gaussiane, per $Tx = 0$ e $Tx = 1$, hanno le stesse caratteristiche.

Un caso in cui questa relazione non è più verificabile, riguarda le comunicazioni ottiche: le due gaussiane sono diverse, e dunque si deve tornare a considerare casi meno particolari.

Sostituendo la soglia appena ricavata in $\mathbb{P}\{e\}$, si ottiene:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{(\alpha_1 - \alpha_0) g_0}{2\sqrt{2} \sigma_{nF}} \right)$$

Questo è verificato e sempre valido, per trasmissioni binarie in banda base. Si noti la generalità di questo risultato: a parte la non presenza di interferenza intersimbolica, non abbiamo vincoli sui filtri o sul formato di comunicazione.

Potremmo porci a questo punto una domanda: è possibile fare di meglio? La risposta è sì, verificate alcune cose: la funzione $\text{erfc}(x)$, per x elevato, tende ad azzerarsi; poichè noi quantifichiamo le prestazioni in termini di probabilità di errore bassa, se riuscissimo ad avere un argomento della funzione $\text{erfc}()$ elevato, potremmo migliorare le prestazioni del sistema.

Si noti che noi conosciamo solo numericamente $\text{erfc}(x)$: possiamo, con una cattiva approssimazione, dire che $\text{erfc}(x) \simeq e^{-\frac{x^2}{\sqrt{\pi}x}}$, per $x < 10^{-2}$, ma è meglio utilizzare comunque le tavole numeriche.

Sappiamo già che $\alpha_1 - \alpha_0$ dipende dalla modulazione, g_0 dai filtri h_c e h_R , e dal rumore $n(t)$. per aumentare x , potremmo:

1. Diminuire σ_{nF} : se diminuisse la varianza del processo rumoroso, allora diminuirebbero le fluttuazioni del segnale, e quindi gli errori;
2. Aumentare g_0 ;
3. Giocare su α_1 e α_0 .

C'è un problema: per ridurre il rumore, dovremmo utilizzare un filtro passa basso a banda passante molto stretta; se però il filtro fosse troppo stretto, il rumore diminuirebbe, e con esso anche g_0 , e quindi si otterrebbe un effetto contrario rispetto a quello che vorremmo. Bisogna trovare un trade-off, ossia una via di mezzo in grado di massimizzare le prestazioni.

8.0.1 Esempio Pratico

Data una segnalazione NRZ binaria antipodale, con filtro di ricezione passa basso ideale e banda B pari al bitrate B_r , canale che non introduce filtraggio, determinare le prestazioni del sistema.

Il passa basso taglia al di sopra del lobo principale, non introducendo una grossa distorsione. Supponiamo che $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_1 - \alpha_0 = 2$. $n(t)$ è il solito processo gaussiano bianco stazionario ergodico a media nulla.

Utilizzando le notazioni già introdotte:

$$n_F(t) = n(t) \otimes h_R(t)$$

$$\sigma_{nF}^2 = p_{nF} = \frac{N_0}{2} \cdot 2B_{eq} \Big|_{B_{eq}=B_r} = N_0 B_r$$

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{2A}{2\sqrt{2N_0 B_r}} \right) = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{A}{\sqrt{2N_0 B_r}} \right)$$

Questo risultato è corretto, anche se di solito, in ambito di telecomunicazioni, si esprime la probabilità di errore al variare di energia o potenza. Sappiamo che in uscita dal canale avremo o $\alpha_1\xi(t)$ o $\alpha_0\xi(t)$, e quindi, dato il nostro esempio pratico, o $\xi(t)$ o $-\xi(t)$. Possiamo dunque dire che l'energia del segnale in uscita dal canale, ε_ξ , valga:

$$\varepsilon_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(t)|^2 dt = \int_0^{T_b} A^2 dt = A^2 T_b$$

Da ciò:

$$A = \sqrt{\frac{\varepsilon_\xi}{T_b}}$$

Ma

$$B_r = \frac{1}{T_b} \longrightarrow A = \sqrt{\varepsilon_\xi \cdot B_r}$$

Si vuol definire, come energia di riferimento, l'energia associata alla trasmissione di un bit, ε_b :

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_{b,1} + \varepsilon_{b,0}}{2}$$

Dove $\varepsilon_{b,1}$ è l'energia associata al bit '1', e $\varepsilon_{b,0}$ quella associata al bit '0'. Vediamo di calcolare la seconda:

$$\varepsilon_{-\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} |-\xi(t)|^2 dt = A^2 T_b = \varepsilon_{b,1} = \varepsilon_\xi$$

Sostituendo dunque nell'espressione della probabilità di errore, si otterrà:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\varepsilon_b \cdot B_r}{\sqrt{2N_0 B_r}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{2N_0}}\right)$$

Queste sono le prestazioni di un sistema NRZ binario antipodale in banda base con filtro passa basso ideale a frequenza di taglio $B = B_r$.

In realtà questi risultati sono abbastanza comuni: avremo spesso a che fare con curve funzione del rapporto $\frac{\varepsilon_b}{N_0}$. Spesso ci capiterà di trovare, in questo ambito, curve di questo tipo:

8.1 Filtro Adattato

Abbiamo lasciato un momento in sospeso l'argomento 'ottimizzazione', lasciando pensare che 'si può fare di meglio': abbiamo parlato di un trade-off, ma senza entrare nei dettagli.

Ai fini di variare σ_{nF} senza toccar troppo g_0 , e quindi senza modificare troppo il rapporto, possiamo lavorare su $h_R(t)$, ossia sul filtro di ricezione; per far ciò, lavoriamo nel dominio delle frequenze, e consideriamo lo spettro della forma dei simboli in uscita dal canale, $\xi(t)$, ossia:

$$\Xi(f) = \mathcal{F} \{ \xi(t) \}$$

Introducendo inoltre:

$$g_0 \triangleq g(t)|_{t=t_0} = \mathcal{F}^{-1} \{ G(f) \} |_{t=t_0} = \mathcal{F}^{-1} \{ \Xi(f) \cdot H_R(f) \} |_{t=t_0}$$

Svolgendo mediante definizione di antitrasformata di Fourier quest'ultimo:

$$g_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi(f) H_R(f) e^{j2\pi f t} df \Big|_{t=t_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi(f) H_R(f) e^{j2\pi f t_0} df$$

Calcoliamo ora la varianza σ_{nF}^2 : essa sarà, usando le solite ipotesi:

$$\sigma_{nF}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} |H_R(f)|^2 df$$

Possiamo dunque scrivere il rapporto al quadrato come:

$$\frac{g_0^2}{\sigma_{nF}^2} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi(f) H_R(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df}$$

Il nostro obiettivo è massimizzare questo rapporto; a questo scopo, dobbiamo scegliere una $H_R(f)$ idonea alla massimizzazione. Utilizzando la disuguaglianza di Schwartz:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Xi(f) H_R(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\Xi(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df$$

Si noti che, se vale la seguente condizione:

$$\Xi(f) = c \cdot H_R^*(f)$$

Allora la diseguaglianza diventa eguaglianza, e quindi abbiamo massimizzato il numeratore. Considerando dunque valida quest'ipotesi, 'al contrario', ossia:

$$H_R(f) = c \cdot \Xi^*(f)$$

Sostituendo ciò nel rapporto:

$$\frac{g_0^2}{\sigma_{nF}^2} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |\Xi^*(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df} = \frac{2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\Xi^*(f)|^2 df}{N_0}$$

Al numeratore abbiamo l'energia del segnale $\xi(t)$ (come si vede grazie all'eguaglianza di Parseval); possiamo quindi scrivere il rapporto come:

$$\frac{g_0^2}{\sigma_{nF}^2} = \frac{2\varepsilon_\xi}{N_0}$$

Nel dominio del tempo, il filtro $H_R(f)$ avrà dunque una forma del tipo:

$$h_R(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H_R(f)\} = c \cdot \xi^*(t_0 - T)$$

Questo utilizzando le proprietà dei numeri complessi, e del ritardo della trasformata di Fourier.

Questo è il filtro adattato, alla forma del simbolo: la risposta all'impulso si adatta non al canale o al carico di esso (come potremmo pensare, da Elettronici), bensì alla forma del simbolo in uscita dal canale.

Il filtro adattato massimizza il rapporto, e permette di ottenere le migliori prestazioni in assoluto, come vediamo da $\mathbb{P}\{e\}$:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{g_0}{2\sigma_{nF}^2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_\xi}{N_0}} \right)$$

Nel dominio del tempo, con segnali reali, il vincolo per la realizzazione di filtri adattati sarà:

$$h_R(t) = c \cdot \xi(t_0 - t)$$

Questo filtro generalmetne non è realizzabile: esso è infatti non causale. Se considerassimo però per ipotesi $t_0 > T_b$, nella fatiscie $t_0 = T_b$, il filtro diventerebbe causale, e $h_R(t)$ avrà una forma del tipo:

8.1.1 Esempio Pratico

Dato un sistema NRZ binario antipodale in banda base con filtro adattato, $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_1 - \alpha_0 = 2$, determinarne le prestazioni.

Le prestazioni, in caso di filtro adattato, sono:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_\xi}{N_0}}\right)$$

L'energia del segnale in uscita dal canale, $\xi(t)$, vale:

$$\varepsilon_{b1} = \varepsilon_{b2} = \varepsilon_\xi$$

L'energia media sui bit dunque vale:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_{b1} + \varepsilon_{b2}}{2} = \varepsilon_\xi$$

Da qua, la probabilità di errore espressa al variare dell'energia sui bit vale:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}}\right)$$

Facciamo ora un confronto delle prestazioni rispetto ad un caso non adattato, come l'ultimo esempio pratico prima di questo: abbiamo infatti visto che:

- Con filtro adattato:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}}\right)$$

- Con filtro LPF ideale:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{2N_0}}\right)$$

Consideriamo di voler la stessa probabilità di errore con i due sistemi; dovremo porre uguali gli argomenti delle due $\operatorname{erfc}()$:

$$\frac{\varepsilon_b}{N_0} \Big|_{\text{adattato}} = \frac{\varepsilon_b}{N_0} \Big|_{LPF\text{ideale}} \longleftrightarrow \frac{\varepsilon_b}{N_0} \Big|_{LPF\text{ideale}} = 2 \cdot \frac{\varepsilon_b}{N_0} \Big|_{\text{adattato}}$$

Questo significa che, per ottenere la medesima qualità, le stesse prestazioni, con il filtro adattato avrò bisogno di metà della potenza che si dovrà impiegare in un sistema non adattato, ossia 3 dB in meno!

Tra le due curve, quindi, vi sarà una distanza di 3 dB .

Questo risultato è stato ricavato da un esempio pratico, ma in realtà è molto generale: vale infatti per sistemi di qualsiasi tipo: tra filtro adattato e non adattato vi è una distanza di 3 dB . Si noti che l'adattamento dipende dal segnale in uscita dal canale: la banda del filtro non è la stessa del LPF ideale, ma dipende da alcuni fattori.

Capitolo 9

Calcolo di prestazioni di segnalazioni numeriche

Sfruttando la teoria dello Spazio dei Segnali, è possibile calcolare le prestazioni di segnalazioni numeriche, di tipo anche più complesso rispetto a quelle binarie in banda base finora analizzate.

Applichiamo dunque questa teoria ai sistemi di trasmissione: dato un intervallo di tempo $[0; T_S]$, con una forma d'onda presa da una costellazione di M forme d'onda, tale per cui:

$$M = 2^{nbit}$$

Ciascuna forma d'onda si può identificare con una sequenza *nbit* per l'appunto composta da n bit.

Consideriamo in trasmissione il segnale $s'(t)$, scomponibile in una base ortonormale, ottenendo N componenti $s'_1(t)$, $s'_2(t)$, e così via fino a $s'_N(t)$. In ricezione, in seguito agli effetti di filtraggio del canale, avremo sempre una costellazione di M forme d'onda, ma i simboli ricevuti potrebbero essere diversi da quelli trasmessi.

Il nostro sistema sarà dunque così modellizzabile:

Il nostro obiettivo è quello di essere in grado di stimare quale simbolo sia stato trasmesso, sulla base del segnale $r(t)$, comprensivo del rumore:

$$r(t) = s_i(t) + n(t)$$

Vogliamo dunque sfruttare la teoria dello spazio dei segnali, scomponendo i segnali con un'ideale base ortonormale. Lo spazio che questa base dovrà rappresentare avrà N dimensioni, dove $N \leq M$. Trovati i $\hat{\psi}_j(t)$, ossia le funzioni rappresentanti la base dello spazio, scomponiamo $s_i(t)$ come:

$$s_i(t) = \sum_{j=1}^N s_{i,j} \hat{\psi}_j(t)$$

Abbiamo così scomposto senza problemi il segnale utile rispetto ad una base ortonormale.

Vorremmo poter fare lo stesso per il rumore: nella fattispecie, la nostra intenzione sarebbe quella di rappresentare nella stessa base segnale utile e rumore. Il problema è tuttavia il fatto che non è assolutamente detto che la base dei $\hat{\psi}_j(t)$ sia completa rispetto al processo rumoroso $n(t)$. In realtà, questo fatto non ci interesserà più di tanto: supponiamo infatti di poter rappresentare i coefficienti di rumore, n_j , come:

$$n_j = \langle n(t) | \hat{\psi}_j(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} n(t) \hat{\psi}_j^*(t) dt$$

Poichè ogni elemento è esistente e limitato al tempo di trasmissione, potremo dire che l'integrale andrà fatto solo nel tempo di vita di ciascun simbolo, e quindi:

$$n_j = \int_0^{T_s} n(t) \hat{\psi}_j^*(t) dt$$

Poichè $n(t)$ è il solito processo gaussiano bianco ergodico a media nulla, i n_j saranno variabili casuali gaussiane (a media nulla); per caratterizzare le variabili n_j , dunque, dovremo effettuare la solita analisi statistica, mediante media e varianza; iniziamo con il valore atteso:

$$\mathbb{E}[n_j] = \mathbb{E} \left[\int_0^{T_s} n(t) \hat{\psi}_j^*(t) dt \right]$$

Utilizzando la linearità del valore atteso e dell'integrale, commutiamo i due segni:

$$\implies \int_0^{T_s} \mathbb{E}[n(t)] \hat{\psi}_j^*(t) dt = 0$$

Dal momento che la media del processo rumoroso è nulla.

Con ciò abbiamo dimostrato il fatto che effettivamente le variabili casuali gaussiane siano a media nulla; si noti che non stiamo considerando gli elementi che rendono non completa la base di $\hat{\psi}_j(t)$; più avanti discuteremo la validità di questo tipo di operazione, fornendo interpretazioni di vario tipo.

Proseguiamo la nostra analisi statistica, determinando la media congiunta di due generiche variabili aleatorie, n_j e n_k :

$$\mathbb{E} [n_j n_k] = \mathbb{E} \left[\int_0^{T_s} n(t) \psi_j^*(t) dt \cdot \int_0^{T_s} \hat{\psi}_k^*(t'') dt'' \right]$$

Utilizzando la proprietà di linearità degli operatori 'valore atteso' e 'integrale', possiamo commutarli, ottenendo:

$$\implies \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \mathbb{E} [n(t') \cdot n(t'')] \cdot \hat{\psi}_j^*(t') \cdot \hat{\psi}_k^*(t'') dt' dt''$$

Notiamo che il primo termine, il valore atteso, rappresenta l'autocorrelazione del processo $n(t)$, che sappiamo essere bianco, gaussiano, di densità spettrale di potenza pari a $\frac{N_0}{2}$; la funzione di autocorrelazione sarà dunque la sua antitrasformata, pari a:

$$\mathcal{R}_n(t'; t'') = \frac{N_0}{2} \delta(t' - t'')$$

Sostituendo questo risultato nell'integrale, si ottiene:

$$\implies \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \delta(t' - t'') \cdot \hat{\psi}_j^*(t') \cdot \hat{\psi}_k^*(t'') dt' dt''$$

Consideriamo quindi il solo integrale in dt' : possiamo considerare, nella δ , il termine t'' come un ritardo rispetto a t' , e quindi 'campionare' $\hat{\psi}_j^*(t')$ nel punto t'' , usando la proprietà della delta di Dirac:

$$\implies \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} \int_0^{T_s} \delta(t' - t'') \cdot \hat{\psi}_j^*(t'') \cdot \hat{\psi}_k^*(t'') dt' dt''$$

L'unico elemento che varia ancora in t' sarà la δ , il cui integrale vale notoriamente 1. Possiamo dunque dire che rimarrà solamente:

$$\implies \frac{N_0}{2} \int_0^{T_s} \hat{\psi}_j^*(t'') \cdot \hat{\psi}_k^*(t'') dt''$$

Supponendo a questo punto reali le due funzioni, possiamo interpretare questo integrale come un prodotto scalare, ricordando la definizione:

$$\implies \frac{N_0}{2} \langle \hat{\psi}_j(t) | \hat{\psi}_k(t) \rangle$$

Però ricordiamo che $\hat{\psi}_j(t)$ e $\hat{\psi}_k(t)$ fanno parte della base ortonormale mediante la quale abbiamo espresso il nostro segnale nello spazio dei segnali; varrà dunque, per il risultato finale, la condizione di ortogonalità:

$$\mathbb{E} [n_j n_k] = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Ma, se $j = k$, stiamo calcolando $\mathbb{E}[n_j^2]$, che è anche uguale a $\sigma_{n_j}^2$, dal momento che il segnale è a media nulla, e quindi la varianza del processo! Inoltre, se $\mathbb{E}[n_j n_k] = 0$, allora significa che si può scomporlo nelle sue componenti singole:

$$\mathbb{E}[n_j n_k] = 0 \iff 0 = \mathbb{E}[n_j] \mathbb{E}[n_k]$$

Questo significa che, per $j \neq k$, le variabili aleatorie sono tra loro scorrelate; poichè se due (o più) gaussiane sono tra loro scorrelate, allora sono anche statisticamente indipendenti, e poichè $n(t)$ è un processo gaussiano allora, per $j \neq k$, le variabili aleatorie saranno tra di loro scorrelate.

Si noti che finora, di tutto il ricevitore, abbiamo solo analizzato il primo pezzo: il nodo sommatore modellizzante il canale:

Abbiamo dunque in sostanza ottenuto, in uscita dal canale, un segnale $r(t)$ definibile come:

$$r(t) = s_i(t) + n(t)$$

Il segnale in uscita dal nodo sommatore con il quale modellizziamo il canale, che introduce il rumore $n(t)$, sarà $r(t)$; utilizzando la teoria dello spazio dei segnali, tuttavia, possiamo esprimere $r(t)$ come somma di due vettori, riferiti alla stessa base ortonormale:

$$r(t) \longrightarrow \vec{r} = \vec{s}_i + \vec{n}$$

Cerchiamo di fornire un'interpretazione geometrica di tutto ciò: dato un sistema esprimibile con una base ortonormale comprendente due funzioni, $\psi_1(t)$ e $\psi_2(t)$, capita la seguente cosa: \vec{r} ha come componenti delle variabili casuali, dal momento che \vec{r} rappresenta la somma (fatta mediante la regola del parallelogramma) di \vec{s}_i , vettore di numeri, e di \vec{n} , vettore di variabili casuali. Sappiamo già che la media delle variabili casuali, \vec{n} , sarà nulla, e di \vec{r} sarà \vec{s}_i , poichè a 0 aggiungiamo un offset pari al numero contenuto in ciascuna componente di \vec{s}_i .

Notiamo che il fatto che non consideriamo l'incompletezza della base ortonormale ($\psi_1; \psi_2$) non ci riguarda: se infatti il rumore fosse per esempio esprimibile mediante cinque funzioni, ($\psi_1; \psi_2; \psi_3; \psi_4; \psi_5$), le ultime tre funzioni non influenzerebbero, non varierebbero in alcun modo \vec{s}_i : data infatti per esempio una matrice 3x3, ed una 5x5, sarebbe sì possibile costruire una 5x5 prendendo la 3x3 e mettendo degli '0' su tutti gli altri punti, ma a questo punto influenzerebbero la 5x5 solo con gli elementi della 3x3; nelle basi capita la stessa cosa: se il rumore ha componenti in uno spazio di dimensione più elevata rispetto al segnale, il segnale potrà essere influenzato solo

nelle sue dimensioni, non in dimensioni non generabili dalla base ortonormale utilizzata.

Quanto vale la densità di probabilità della j -esima variabile aleatoria di \vec{r} ? Sarà la nostra solita gaussiana:

$$f_{r_j}(r_j|s_{i,j}) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{1}{N_0}(r_j - s_{i,j})^2}$$

Poichè le gaussiane sono tra loro statisticamente indipendenti, come abbiamo visto in precedenza, possiamo calcolare la $f_{\vec{r}}$, ossia la densità di probabilità congiunta del vettore \vec{r} , come:

$$f_{\vec{r}}(\vec{r}|\vec{s}_i) = \prod_{j=1}^N f_{r_j}(r_j|s_{i,j}) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} e^{-\frac{1}{N_0}(r_j - s_{i,j})^2}$$

Fatti questi calcoli preliminari, vediamo lo schema a blocchi del ricevitore basato su di questa teoria:

Il demodulatore, fornito in ingresso il segnale $r(t)$, fornisce in uscita il vettore \vec{r} prima descritto. Il decisore, dato \vec{r} in ingresso dovrà decidere, con la massima verosimiglianza, quale simbolo $s_i(t)$ ha generato il segnale $r(t)$ giunto in ingresso, e quindi il vettore \vec{r} . Il decisore, dunque lavorerà su \vec{r} .

9.1 Criterio di massima probabilità a posteriori

Il decisore dovrà, in qualche maniera, calcolare tutte le varie probabilità sui simboli della costellazione di essere vicini a \vec{r} , e selezionare quello che coincide con la probabilità maggiore. In questo modo si stima \hat{s} come il \vec{s}_i più vicino al \vec{r} ricevuto in ingresso.

Calcoliamo questa probabilità massima come:

$$\max \{ \mathbb{P} \{ \vec{s}_i | \vec{r} \} \}$$

Ricordiamo dunque il noto teorema di Bayes:

$$\mathbb{P} \{ A | B \} = \frac{\mathbb{P} \{ B | A \} \cdot \mathbb{P} \{ A \}}{\mathbb{P} \{ B \}}$$

Nel nostro caso:

$$\mathbb{P} \{ \vec{s}_i | \vec{r} \} = \frac{\mathbb{P} \{ \vec{r} | \vec{s}_i \} \cdot \mathbb{P} \{ \vec{s}_i \}}{\mathbb{P} \{ \vec{r} \}}$$

Supponendo che i M simboli della costellazione siano tutti equiprobabili, sostituiamo alle probabilità le funzioni di densità di probabilità:

$$\mathbb{P} \{ \vec{s}_i \} = \frac{1}{M}$$

$$\mathbb{P} \{ \vec{r} | \vec{s}_i \} = f_{\vec{r}}(\vec{r} | \vec{s}_i)$$

Da qua, si ottiene che:

$$\mathbb{P} \{ \vec{s}_i | \vec{r} \} = \frac{1}{M} \frac{f_{\vec{r}}(\vec{r} | \vec{s}_i)}{f_{\vec{r}}(\vec{r})}$$

Poichè il nostro obiettivo è quello di massimizzare la probabilità, dovremo massimizzare il numeratore, ossia la densità congiunta prima calcolata; utilizziamo dunque un piccolo artificio matematico: massimizzare una funzione $g(x)$ equivale a massimizzare la funzione $\ln(g(x))$, poichè i logaritmi sono funzioni monotone crescenti. Avremo dunque che:

$$\implies \max_x [\mathbb{P} \{ \vec{s}_i | \vec{r} \}] = \max_{\vec{s}_i} [\ln(f_{\vec{r}}(\vec{r} | \vec{s}_i))]$$

Calcoliamo dunque il logaritmo naturale della nostra espressione:

$$\ln [f_{\vec{r}}(\vec{r} | \vec{s}_i)] = \ln \left[(\pi N_0)^{-\frac{N_0}{2}} \right] + \left(-\frac{1}{N_0} \cdot \sum_{j=1}^N (r_j - s_{i,j})^2 \right)$$

Abbiamo due contributi, due addendi, che possiamo chiamare in ordine A e B ; la somma nasce dalla proprietà dei logaritmi, esprime il fatto che il logaritmo di un prodotto di due fattori equivale alla somma dei logaritmi dei due fattori. Si noti che il termine A non dipende da \vec{s}_i , e quindi non rientrerà nel processo di massimizzazione (sarà di fatto solo un offset); poichè il contributo B tuttavia ha un $-$ davanti a tutto, il suo valore più elevato sarà dato dal minimo della sommatoria (per massimizzare un numero negativo, dovremo prendere il più piccolo in modulo!):

$$\implies \min_{\vec{s}_i} \sum_{j=1}^N (r_j - s_{i,j})^2$$

Ma questa sommatoria altri non è che la distanza tra il vettore \vec{r} ed il vettore \vec{s}_i !

$$= d^2(\vec{r}; \vec{s}_i)$$

Abbiamo ottenuto un risultato veramente fondamentale e molto interessante: il criterio di decisione ottimo a posteriori è quello tale per cui, dato \vec{r} ricevuto in ingresso, viene scelto il simbolo \vec{s}_i tale per cui la distanza tra il vettore \vec{r} e \vec{s}_i sia la minima, rispetto a tutti gli altri simboli della costellazione.

Proviamo a vedere ciò graficamente:

Dato ad esempio $N = 2$ e $M = 4$ (ossia 4 simboli nella costellazione), supponiamo di ricevere \vec{r} ; il decisore calcolerà la distanza tra \vec{r} e ciascuno dei simboli; in questo caso, la migliore stima sarà data da \vec{s}_1 .

9.1.1 Regioni di Decisione

Lo spazio dei segnali può essere diviso in M settori (uno per simbolo della costellazione); questi settori rappresentano l'insieme dei punti più vicini ad un simbolo rispetto a tutti gli altri. Invece di andare ogni volta e per ogni \vec{r} a calcolare tutte le distanze dai vari \vec{s}_i , conoscendo a priori questi settori, detti 'regioni di decisione', vedendo che \vec{r} cade nella regione i -esima, allora siamo sicuri che $\hat{\vec{s}} = \vec{s}_i$.

Esempio Grafico

Supposta la base ortonormale costituita da due funzioni, ψ_1 e ψ_2 , dovremo dividere le regioni in otto zone, ciascuna per un simbolo diverso. Questo si può fare utilizzando i seguenti fungenti da assi per i vari segmenti congiungenti tra di loro i diversi punti. Vedendo che \vec{r} cade in una di queste regioni, potremo immediatamente stimare quale degli \vec{s}_i meglio identifichi \vec{r} .

Cerchiamo ora di re-interpretare questi risultati appena ottenuti con alcune nostre conoscenze, alcuni vecchi risultati, sperando di scoprire qualcosa di interessante: vedremo che quella appena introdotta è infatti una teoria molto generale, ma che racchiude risultati ed elementi già precedentemente introdotti.

Il demodulatore, calcolando le varie componenti dovrà di fatto calcolare prodotti scalari, determinando ogni componente r_i di \vec{r} in questo modo:

$$r_i = \langle r(t) | \hat{\psi}_i(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \hat{\psi}_i^*(t) dt$$

Poichè sappiamo che la funzione della base ortonormale esiste solo nel tempo di simbolo, quindi $\hat{\psi}(t) \in [0; T_S]$, l'integrale sarà qui limitato:

$$r_i = \int_0^{T_S} r(t) \hat{\psi}_i^*(t) dt$$

Il demodulatore quindi farà semplicemente queste operazioni:

Le varie componenti r_i calcolate mediante integratori andranno in ingresso al decisore, per ogni intervallo T_S , producendo in uscita il vettore \vec{r} , e quindi il decisore, mediante il criterio di minima distanza, sceglierà il simbolo \vec{s}_i più idoneo.

Sulla base delle componenti in ingresso, dunque, il decisore dovrà confrontare le varie componenti di \vec{r} con i confini delle zone di decisione. Alla base di questo decisore vi saranno, come si può immaginare, sostanzialmente dei comparatori di soglia (uno per componente del vettore \vec{r}).

9.1.2 Criterio di minima distanza / Filtro Adattato

Cerchiamo a questo punto di capire, mediante un esempio teorico/pratico, se vi sia un legame, come suggerisce il titolo della sottosezione, tra il criterio di minima distanza appena introdotto ed il filtro adattato (precedentemente introdotto). Dato dunque un sistema binario, i cui simboli trasmessi sono:

$$s_1(t) = \alpha_1 \xi(t)$$

$$s_2(t) = \alpha_0 \xi(t)$$

$\xi(t)$ funzione generica e reale, in banda base.

Si vuole determinare l'espressione del filtro ottimo, utilizzando la teoria dello spazio dei segnali.

La base ortonormale potrà essere formata da un solo simbolo base:

$$\hat{\psi}_1(t) = k\xi(t)$$

La costante k serve a normalizzare la funzione, ossia a far sì che la base sia ortonormale. Vediamo dunque quanto deve valere; la base deve essere ortonormale, e dunque k deve essere tale da far sì che:

$$\left\| \hat{\psi}_1(t) \right\| = 1$$

Ossia la norma euclidea (norma 2, norma quadratica, energia) della funzione deve valere 1.

Vediamo dunque che:

$$\left\| \hat{\psi}_1(t) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{\psi}_1(t) \right|^2 dt = k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(t)|^2 dt = k^2 \varepsilon_\xi$$

Dove ε_ξ sarebbe l'energia della forma del simbolo, ossia di $\xi(t)$. Per normalizzare, dunque, dovremo dire che:

$$k\varepsilon_\xi = 1 \longrightarrow k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\xi}}$$

La base ortonormale a questo punto è semplicemente la funzione:

$$\hat{\psi}_1(t) = \frac{\xi(t)}{\sqrt{\varepsilon_\xi}}$$

A rigore dovremmo a questo punto utilizzare il procedimento di Gram-Schmidt, e quindi calcolare i prodotti scalari per determinare $s_1(t)$ e $s_2(t)$; dal momento che però abbiamo una sola funzione in base, e le condizioni ci permettono di farlo, vediamo che:

$$\begin{cases} s_1(t) = \alpha_1 \xi(t) \longrightarrow s_1(t) = \alpha_1 \sqrt{\varepsilon_\xi} \cdot \hat{\psi}_1(t) \longrightarrow \vec{s}_1 \\ s_2(t) = \alpha_0 \xi(t) \longrightarrow s_2(t) = \alpha_0 \sqrt{\varepsilon_\xi} \cdot \hat{\psi}_1(t) \longrightarrow \vec{s}_2 \end{cases}$$

Usare di questi 'trucchi' può sempre essere utile; avessimo infatti svolto i prodotti scalari, avremmo dovuto fare qualcosa del tipo:

$$\begin{aligned} \vec{s}_1 &= \langle s_1(t) | \hat{\psi}_1(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) \hat{\psi}_1^*(t) dt \\ \vec{s}_2 &= \langle s_2(t) | \hat{\psi}_1(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) \hat{\psi}_1^*(t) dt \end{aligned}$$

Confrontiamo ora ciò che abbiamo ottenuto con un caso vecchio, a noi ben noto: il filtro adattato. Sappiamo che, dato $\xi(t)$ in uscita dal canale, la condizione di filtro adattato per quanto riguarda il filtro di ricezione, $h_R(t)$, è:

$$h_R(t) = k\xi(t_0 - t)$$

Consideriamo quindi $s_{F,1}(t)$ il segnale filtrato dal nostro $h_R(t)$, e consideriamo al solito il solo primo istante di campionamento, t_0 :

$$\begin{aligned} s_{F,1}(t) &= s_1(t) \otimes h_R(t) \Big|_{t=t_0} = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) h_R(t - \tau) d\tau \Big|_{t=t_0} = \\ &= k \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \xi(t_0 - t + \tau) d\tau \Big|_{t=t_0} = k \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(\tau) \xi(\tau) d\tau = \\ &= k \langle s_1(\tau) | \xi(\tau) \rangle \end{aligned}$$

Ma cosa ci è capitato? Abbiamo ottenuto la stessa equazione per il filtro adattato, e per il criterio di minima distanza!

Ciò che abbiamo appena mostrato è un risultato straordinario: l'uscita del filtro adattato a $\xi(t)$ è uguale alla componente di $s_1(t)$ nello spazio dei segnali (a meno di qualche fattore di proporzionalità): ciò significa che, con la nuova teoria generale introdotta, abbiamo racchiuso il caso ottimo ricavato senza di essa! Un modo di realizzare le operazioni di demodulazione, infatti, è proprio basato sull'uso di diversi filtri adattati.

Geometricamente, capita qualcosa di questo genere:

$$\vec{s}_1 = \alpha_1 \sqrt{\varepsilon_\xi}$$

$$\vec{s}_2 = \alpha_0 \sqrt{\varepsilon_\xi}$$

Consideriamo per ipotesi $\alpha_0 < \alpha_1$; consideriamo inoltre \vec{s}_1 legato alla trasmissione di un '1', e \vec{s}_2 legato alla trasmissione di uno '0'. Utilizzando il teorema della probabilità totale, calcoliamo la probabilità di errore per questo sistema:

$$\mathbb{P}\{e\} = \mathbb{P}\{Tx = 1\} \mathbb{P}\{e|Tx = 1\} + \mathbb{P}\{Tx = 0\} \mathbb{P}\{e|Tx = 0\}$$

Vediamo che:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{e|Tx = 0\} &= \mathbb{P}\{\vec{r} \notin \text{regione di decisione di } Tx = 0|Tx = 0\} = \\ &= \mathbb{P}\{\vec{r} \in \text{regione di decisione di } Tx = 1|Tx = 0\} \end{aligned}$$

Sappiamo che:

$$\vec{r} = \vec{s}_i + \vec{n}$$

Nella fattispecie, il segnale ricevuto \vec{r} è una variabile casuale con la media centrata sul simbolo stesso, e tutte le altre caratteristiche statistiche identiche a quelle del rumore. Consideriamo il caso $Tx=0$:

$$\vec{r}|_{Tx=0} = \alpha_0 \sqrt{\varepsilon_\xi} + n_1$$

Dobbiamo quindi calcolare la probabilità che \vec{r} valutato con $Tx=0$ si trovi nella regione di decisione del bit '1' inviato. Vediamo in matematiche:

$$\mathbb{P}\left\{\alpha_0 \sqrt{\varepsilon_\xi} + n_1 \geq \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} \sqrt{\varepsilon_\xi}\right\} = \mathbb{P}\left\{n_1 \geq \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \sqrt{\varepsilon_\xi}\right\}$$

Poichè n_1 è a media nulla, la gaussiana sarà centrata in 0; la probabilità che n_1 si trovi al di sopra di quel valore, ossia in una delle code, si calcola mediante la $\text{erfc}(x)$:

$$\begin{aligned} \implies \mathbb{P}\{e|Tx = 0\} &= \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \sqrt{\varepsilon_\xi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{\frac{N_0}{2}}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_\xi}{N_0}} \right) \end{aligned}$$

Questo poichè la varianza del processo è $\frac{N_0}{2}$; al numeratore dell'argomento della $\text{erfc}()$ si scrive la distanza del punto dal quale si calcola la coda, meno il punto in cui è situato il valor medio della gaussiana; al denominatore, la radice della varianza σ^2 (e quindi la deviazione standard σ), moltiplicata per $\sqrt{2}$.

Abbiamo dunque calcolato una delle due probabilità di errore: quella legata alla trasmissione di uno '0'.

Per quanto riguarda quella legata alla trasmissione di un '1', abbiamo che:

$$\vec{r}|_{Tx=1} = \alpha_1 \sqrt{\varepsilon_\xi} + n_1$$

Si noti ora una cosa molto interessante: rispetto a prima, l'unica caratteristica variante è il valor medio sul quale è centrata la variabile aleatoria \vec{r} , considerante '1' trasmesso. Poichè tuttavia quel valor medio è simmetrico, rispetto all'inizio, alla delimitazione delle regioni di decisione, e poichè la gaussiana (a parte per quanto riguarda il centro, e quindi la media), ha le stesse caratteristiche (ed è una funzione pari rispetto al suo asse), possiamo affermare che:

$$\mathbb{P}\{e|Tx = 1\} = \mathbb{P}\{e|Tx = 0\}$$

La probabilità di errore globale, supposta una sorgente di bit equiprobabile, sarà data dunque da:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{e\} &= \frac{1}{2} [\mathbb{P}\{e|Tx = 0\} + \mathbb{P}\{e|Tx = 1\}] = \frac{1}{2} [2 \cdot \mathbb{P}\{e|Tx = 0\}] = \\ &= \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_\xi}{N_0}} \right) \end{aligned}$$

Si noti una cosa: questi stessi risultati erano stati precedentemente ottenuti mediante campionamento e filtri adattati; utilizzando la teoria dello

spazio dei segnali, ed il criterio della minima distanza, abbiamo ottenuto in maniera semplificata lo stesso risultato.

Diamo spazio ad un'altra semplificazione: esaminando questo esempio sotto un altro punto di vista, introducendo il concetto di distanza minima d , come la distanza più breve che intercorre tra due simboli, ossia:

$$d = (\alpha_1 - \alpha_0)\sqrt{\varepsilon_\xi}$$

Possiamo semplificare la definizione, scrivendo:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

La cosa davvero interessante è che questo risultato, ricavato a partire da un caso molto particolare, è assolutamente valido per qualsiasi sistema binario. Dato dunque un generico sistema binario, la cui costellazione dispone di dunque 2 elementi, presentando i due simboli \vec{s}_1 e \vec{s}_2 , si vede che la probabilità di errore è sempre la stessa, considerando d come la distanza tra i due simboli; la probabilità di errore si potrà banalmente calcolare semplicemente come:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Ancora più interessante è il seguente fatto: abbiamo detto che la teoria dello spazio dei segnali con criterio di minima distanza è valida in caso di filtro adattato (le due cose coincidono); se sussistesse un qualche legame tra il filtro generico che utilizziamo in un sistema, ed il filtro adattato, potremmo ricondurci comunque a questa teoria, magari modificando semplicemente ciò che abbiamo appena fatto.

Esempio Pratico: LPF Ideale

Supponiamo per esempio di avere, al posto di un filtro adattato, un filtro passa-basso ideale di banda B , dove B è la banda null-to-null del segnale. Poichè noi sappiamo che questo introduce una penalità pari a 3 dB sulle prestazioni, potremmo fare la seguente cosa: prendere la teoria dello spazio dei segnali, e l'ultima formuletta appena presentata; il fatto che si introducono 3 decibel di penalità si può pensare come un raddoppiamento della varianza del processo casuale rumoroso, ottenendo, come $\mathbb{P}\{e\}$ finale, la seguente:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{2N_0}}\right)$$

Nota brutta: noi sapevamo già che la penalità tra i due filtri è di 3 dB, quindi abbiamo potuto fare senza problemi questo giochino simpatico. Purtroppo se il filtro è generico, non possiamo utilizzare giochetti di vario tipo, quindi è necessario ricondursi all'espressione più generale e complessa:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_0}{2\sqrt{2}} \frac{g_0}{\sigma_{n,F}} \right)$$

Quest'espressione è molto complessa, poichè si devono calcolare g_0 e $\sigma_{n,F}$; se possibile, sarebbe buona cosa non dovervi ricorrere.

Esaminiamo ora alcuni casi specifici, ricorrendo ad altri esempi teorico/pratici.

Esempio Pratico 1

Dato un sistema binario antipodale in banda base, dato il segnale $s_i(t)$ definito come:

$$s_i(t) = \alpha_i \xi(t)$$

$$\alpha_i : \alpha_1 = 1; \alpha_0 = -1$$

La base ortonormale sarà una sola funzione, e sarà:

$$\hat{\psi}_1(t) = \frac{\xi(t)}{\sqrt{\varepsilon_\xi}}$$

La distanza d tra i due simboli sarà dunque:

$$d = 2\sqrt{\varepsilon_\xi}$$

Poichè l'energia di bit vale:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_{\xi_1} + \varepsilon_{\xi_2}}{2} = \varepsilon_{\xi_1} = \varepsilon_{\xi_2}$$

Abbiamo che:

$$d = 2\varepsilon_b$$

Utilizzando la nostra formula magica, la probabilità di errore in questo ambito varrà:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_b}}{2\sqrt{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right)$$

Si noti la semplicità dei calcoli, rispetto a come potevano essere complicati, utilizzando la teoria più generale.

Cosa dovremmo fare se il filtro di ricezione fosse un LPF ideale, anziché adattato? Niente di più facile: introducendo la penalizzazione di 3 dB:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{2N_0}} \right)$$

Esempio Pratico 2

Dato un sistema binario unipolare (on/off) in banda base, il segnale sarà composto da sequenze dei simboli:

$$s_1(t) = \xi(t)$$

$$s_2(t) = 0$$

Ciò che avremo, è che:

$$\varepsilon_{s_1} = \varepsilon_\xi$$

$$\varepsilon_{s_2} = 0$$

La base ortonormale sarà composta da un solo simbolo: per rappresentare questi simboli è infatti sufficiente come prima un solo asse, poichè un punto nè è l'origine, l'altro la distanza rispetto all'origine.

Si ha che:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_{s_1} + \varepsilon_{s_2}}{2} = \frac{\varepsilon_\xi + 0}{2} = \frac{\varepsilon_\xi}{2}$$

Ciò che abbiamo, dunque, è che:

$$\varepsilon_\xi = 2\varepsilon_b$$

Utilizzando la solita teoria dello spazio dei segnali:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{2\varepsilon_b}}{2\sqrt{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\varepsilon_b}{2N_0} \right)$$

Vediamo che, rispetto alla antipodale con filtro adattato, si ha una penalità di 3 dB; il fatto che il baricentro della costellazione sia non nullo, ossia la media dei punti sia diversa da 0, comporta infatti un peggioramento delle prestazioni.

9.2 Primo Esempio di Trasmissione Multilivello

Esaminiamo ora un esempio un po' diverso dal solito: un sistema di trasmissione in banda base, ma multilivello! Dato dunque un sistema 4-PAM in banda base, con i seguenti simboli:

Abbiamo la stessa forma d'onda, ma ampiezze diverse: $A, 3A, -A, -3A$.

Poichè la forma d'onda è sempre la stessa, e solo l'ampiezza variabile, sarà sufficiente un solo elemento per rappresentare i simboli mediante una base ortonormale; essa sarà:

$$\hat{\psi}(t) = \frac{1}{\sqrt{T_S}}$$

Ossia una normalizzazione della porta per un fattore $\sqrt{T_S}$; rappresentante di essa l'energia sotto radice.

Espressi in questa base, i quattro simboli si potranno esprimere come:

$$\vec{s}_1(t) = A\sqrt{T_S}\hat{\psi}(t)$$

$$\vec{s}_2(t) = 3A\sqrt{T_S}\hat{\psi}(t)$$

$$\vec{s}_3(t) = -A\sqrt{T_S}\hat{\psi}(t)$$

$$\vec{s}_4(t) = -3A\sqrt{T_S}\hat{\psi}(t)$$

Come già detto, la cosa interessante è che basterà un singolo asse per rappresentare i 4 simboli; le regioni di divisione saranno al solito delimitate dagli assi dei segmenti congiungenti i vari simboli.

Si vuol definire, a questo punto, due probabilità di errore: una sui simboli, una sui bit (notiamo che infatti in questo caso $M = 4$, ma quindi $nbit = 2$).

9.2.1 Probabilità di errore sui simboli

Utilizzando al solito il teorema della probabilità totale, si può dire che:

$$\mathbb{P}_s \{e\} = \sum_{i=1}^M \mathbb{P} \{Tx = \vec{s}_i\} \mathbb{P} \{e|Tx = \vec{s}_i\}$$

Considerando dunque il nostro caso, e considerando le sorgenti dei quattro simboli equiprobabili, avvviene che:

$$\mathbb{P}_s \{e\} = \frac{1}{4} [\mathbb{P} \{e|Tx = \vec{s}_1\} + \mathbb{P} \{e|Tx = \vec{s}_2\} + \mathbb{P} \{e|Tx = \vec{s}_3\} + \mathbb{P} \{e|Tx = \vec{s}_4\}]$$

Iniziamo a calcolare queste quattro probabilità di errore, partendo da quella legata alla trasmissione di \vec{s}_2 ; il conto sarà in realtà abbastanza semplice:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{e|Tx = \vec{s}_2\} &= \mathbb{P} \{ \vec{r} \notin \text{regione di decisione di } s_2 \} = \\ &= \mathbb{P} \left\{ \vec{r} < 2A\sqrt{T_S} | Tx = \vec{s}_2 \right\} \end{aligned}$$

Dal momento che abbiamo che \vec{r} è pari a:

$$\vec{r} = \vec{s}_i + \vec{n}|_{s_2}$$

Ossia abbiamo la solita gaussiana a media nulla centrata in \vec{s}_2 , possiamo scrivere 'di getto' la probabilità di errore, considerando il fatto che al numeratore della $\text{erfc}()$ vi è la distanza del punto da cui si vuol calcolare l'integrale della coda dalla media, e al denominatore la varianza:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{e|Tx = \vec{s}_2\} &= \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{2A\sqrt{T_S} - 3A\sqrt{T_S}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{N_0}{2}}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\sqrt{\frac{A^2 T_S}{N_0}} \right) \end{aligned}$$

Ricordiamo che la $\text{erfc}()$ è una funzione pari, ergo possiamo comodamente ignorare il segno al suo interno.

Si noti da subito che $\mathbb{P} \{e|Tx = \vec{s}_4\}$ è uguale a questa, per le regioni di simmetria già utilizzate; abbiamo così già calcolato due delle quattro probabilità di errore.

Calcoliamo ora la probabilità di errore data la trasmissione di \vec{s}_1 :

$$\mathbb{P} \{e|Tx = \vec{s}_1\} = \mathbb{P} \{ \vec{r} \notin \text{regione di decisione di } s_1 | Tx = \vec{s}_1 \}$$

Il fatto che non si rientri nella regione di decisione di \vec{s}_1 dato \vec{s}_1 trasmesso, implica avere ambo le code distanti $A\sqrt{T_S}$ dalla media:

$$\mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_1\} = \operatorname{erfc}\left(\frac{A\sqrt{T_S}}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2T_S}{N_0}}\right)$$

Per simmetria, la $\mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_3\}$ sarà uguale alla probabilità di errore appena calcolata, e dunque la probabilità di errore finale sul simbolo sarà:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_s\{e\} &= \frac{1}{4} [2\mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_1\} + 2\mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_2\}] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2T_S}{N_0}}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A_2T_S}{N_0}}\right) \right] = \\ &= \frac{3}{4} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{A^2T_S}{N_0}}\right)\end{aligned}$$

9.2.2 Probabilità di Errore sui bit

Introduciamo alcune definizioni: prima di tutto, si definisce l'energia media dei simboli ricevuti, ε_s , come:

$$\varepsilon_s \triangleq \sum_{i=1}^M \varepsilon_{s_i}$$

A partire da qua, si definisce l'energia media sui bit come:

$$\varepsilon_b \triangleq \frac{\varepsilon_s}{nbit}$$

Facciamo un esempio pratico, utilizzando l'esempio del 4-PAM; calcoliamo l'energia sul segnale e l'energia sul bit come:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{4} [A^2T_S + 9A^2T_S + A^2T_S + 9A^2T_S] = \frac{1}{4} \cdot 20A^2T_S = 5A^2T_S$$

Calcoliamo dunque l'energia sui bit come:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_s}{nbit} = \frac{5A^2T_S}{2} = \frac{5}{2}A^2T_S$$

Cosa possiamo fare a questo punto: mediante il parametro ε_b , possiamo calcolare la probabilità di errore come:

$$\mathbb{P}_s \{e\} = \frac{3}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{2}{5} \frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right)$$

Iniziamo così a parlare di probabilità sui bit; al fine di ottenere migliori prestazioni, si utilizza una particolare codifica, detta 'Codifica di Gray': gruppi di bit, assegnati a simboli adiacenti, differiscono di un solo bit. Consideriamo un esempio pratico:

Questa codifica è utile perchè così, sbagliando a ricevere, sarà molto, molto più probabile che il segnale corretto sia adiacente a quello ricevuto, rispetto ad uno che non ha bit in comune con esso. Interpretato ad esempio un \vec{s}_3 , è molto improbabile che il segnale inviato sia un \vec{s}_2 .

Ciò che ci permette di fare la codifica di Gray e la conseguente osservazione che ne abbiamo tratto, è approssimare la probabilità di errore sul bit a partire da quella sul simbolo, come:

$$\mathbb{P}_b \{e\} \simeq \frac{\mathbb{P}_s \{e\}}{n_{bit}}$$

Ad esempio, nel nostro caso:

$$\mathbb{P}_b \{e\} \simeq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{2}{5} \frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right) = \frac{3}{8} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{2}{5} \frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right)$$

Si noti che questi risultati sono stati ottenuti utilizzando la teoria dello spazio dei segnali, con il criterio della minima distanza, e la codifica Gray.

Quello appena analizzato è un esempio di trasmissione multilivello; ciò che si può facilmente notare è il fatto che, confrontato con la binaria antipodale (andando a riprendere le formule precedenti), l'argomento ha un rapporto $1 : \frac{2}{5}$ (in altre parole, la 4-PAM ha una penalità circa pari a 4 dB sulle prestazioni rispetto ad una trasmissione binaria antipodale).

Quello che però capita è un'altra cosa interessante; analizzando la banda null-to-null del segnale risultante, capita che:

$$B_{0-0} = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{1T_b} = \frac{B_r}{2}$$

Quello che abbiamo dunque fatto, è dimezzare la banda occupata!

Solitamente, una penalizzazione di 4 dB è troppo elevata, nonostante il guadagno in termini di larghezza di banda impegnata conseguente dall'uso di una trasmissione di questo tipo. Di solito dunque i sistemi di trasmissione in banda base utilizzati sono binari.

Vedremo, parlando di sistemi in banda traslata, che capita molto sovente di utilizzare trasmissioni di tipo multilivello.

Capitolo 10

Modulazioni in Banda Traslata

Quando si parla di modulazioni in banda traslata, si usa la teoria del segnale analitico, esattamente come nel caso dell'analisi di modulazioni analogiche. Avremo dunque alla base della nostra teoria un segnale $s(t)$ definito come:

$$s(t) = \Re [g'(t)e^{j2\pi f_c t}]$$

Parlando di modulazioni analogiche, $g'(t)$ al suo interno aveva il segnale modulante, ossia un segnale analogico (continuo) che doveva appunto fornire l'involuppo, la modulante per il coseno che sarebbe risultato dall'operazione di estrazione di parte reale. La differenza sostanziale è che ora, al posto di un segnale modulante analogico, avremo un segnale digitale.

Si suol dunque dire che l'informazione è codificata in ' $g'(t)$ ' (che di solito sarà un segnale complesso in banda base). La frequenza f_c è la solita frequenza di portante; in $g'(t)$ vi sarà l'informazione codificata in termini di ampiezza, fase, frequenza: l'informazione digitale, dunque, andrà a variare una o più di queste tre informazioni.

Qual è la differenza sostanziale rispetto al caso analogico? $g'(t)$ prima poteva assumere qualsiasi valore con continuità; in modulazioni digitali, si assumono solo alcuni valori, discreti (due, quattro, otto, o più).

Per quel che concerne la densità spettrale di potenza, valgono gli stessi risultati precedentemente ricavati per quanto riguarda il caso analogico:

$$pows = \frac{1}{4} [\mathcal{P}_g(f - f_c) + \mathcal{P}_g(f + f_c)]$$

L'effetto della portante è dunque quello di traslare le componenti spettrali dell'involuppo complesso.

A questo punto poniamoci una domanda: come mai dovremmo utilizzare la banda traslata? Che senso ha trasmettere segnali digitali in banda traslata? Beh, proviamo a darci alcune risposte:

1. Multiplazione in frequenza: è possibile condividere lo stesso canale fisico con più segnali. Ad esempio, si può così trasmettere sullo stesso canale fisico un certo numero di segnali; per demodulare, prima di tutto si passa per un filtro passa-banda, detto filtro IF, che selezionerà la porzione di spettro di segnale passante nel canale che intendiamo utilizzare, poi potremo demodulare mediante un demodulatore classico la porzione di spettro da noi selezionata.
2. Dato un canale fisico a banda ΔF , centrato in una frequenza f_0 , possiamo fare ciò:

Se il canale non ha possibilità di inviare dati in banda base, la banda traslata diventa obbligatoria, e come frequenza di portante f_c avremo bisogno proprio di f_0 , ossia della frequenza in cui è centrata la banda del canale di trasmissione.

Analizziamo ora un certo numero di formati di modulazione digitale, per poi preoccuparci solo in seguito delle prestazioni di ciascuno di essi, al fine di determinare l'effettiva utilizzabilità di questi.

10.1 ON-OFF Keying

La più semplice modulazione in banda traslata è l'ON-OFF keying: sostanzialmente essa consiste nell'accendere e spegnere un circuito oscillatore. Consideriamo come segnale modulato il seguente:

$$s(t) = A_C m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

L'involuppo $m(t)$ può assumere solo due valori: '1' e '0'. Sostanzialmente dunque possiamo capire che $m(t)$ sia un segnale binario in banda base, o meglio un segnale unipolare digitale in banda base. Abbiamo dunque che:

$$m(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n f(t - nT_S), a_n = \{1; 0\}$$

Si tratta di un tipo di segnale già analizzato parlando di modulazioni in banda base.

Questa è la modulazione OOK: storicamente, Marconi la adottò per la prima comunicazione via etere. Nonostante la sua 'anzianità', essa viene ancora utilizzata in ambito di fibra ottica: si utilizza con un laser, che viene continuamente acceso e spento. Per quanto primordiale, essendo la più semplice

da demodulare, in un contesto come quello ottico è assolutamente un'ottima scelta.

Qual è lo spettro di potenza di una modulazione OOK ? Beh, partiamo dallo spettro di potenza di $g'(t)$, e vediamo come si comporta:

Vediamo che sostanzialmente si formano delle repliche causate dalla presenza del solito coseno moltiplicativo, dunque possiamo immaginare che lo spettro abbia una forma di questo tipo:

Notiamo che prima avevamo un segnale in banda base $g'(t)$, quindi aveva senso utilizzare la banda unilatera, dal momento che la trasformata di Fourier ha la proprietà di essere pari per segnali reali. Avendo dunque avuto banda null-to-null B_{0-0} pari a B_r , ossia all'ampiezza del lobo principale di un seno cardinale (si noti che il fatto di avere a che fare con una ON-OFF, implica il fatto di aver a che fare sostanzialmente con delle porte; la trasformata della porta rettangolare, notoriamente, è un seno cardinale, e quindi da qui la derivazione dello spettro), il fatto di avere traslato il segnale ad una frequenza centrale diversa da quella nulla, ci porta a dover utilizzare come banda null-to-null l'intera banda del lobo principale, che è largo (in frequenza) il doppio del precedente, e dunque $2B_r$.

Supponiamo a questo punto di utilizzare, al posto di una segnalazione di questo tipo, uno spettro a coseno rialzato; in questo modo, otterremo il fatto che la banda assoluta avrebbe dimensione pari a:

$$B_{abs} = \frac{B_r}{2}(1 + \rho)$$

Una volta traslato lo spettro a coseno rialzato, si avrebbe il doppio di questa banda (per le motivazioni prima dette, ossia il fatto di non trovarci più in banda base), e quindi avremmo banda occupata doppia, e quindi:

$$B_{abs} = B_r(1 + \rho)$$

10.1.1 Ricevitori ON-OFF Keying

Abbiamo sommariamente descritto il funzionamento della modulazione OOK; a questo punto, formalmente, come è possibile demodulare un segnale modulato mediante OOK? Proponiamo sostanzialmente due possibilità: ricezione coerente, e ricezione incoerente.

Ricezione Coerente

Non c'è molto da aggiungere rispetto a ciò che già sappiamo della ricezione coerente; lo schema a blocchi di un ricevitore coerente sarà infatti pressapoco il seguente:

Mediante il solito PLL si riesce a ricavare la portante, e a riutilizzarla in seguito.

Ricezione Incoerente

Come prima, non c'è molto da aggiungere rispetto a ciò che non si sapeva già in precedenza; lo schema a blocchi di un ricevitore incoerente sarà infatti il seguente:

Abbiamo il solito rilevatore di involuppo, collegato ad un passa basso ed ad un decisore a soglia.

10.1.2 ASK: Amplitude Shift Keying

Quella che abbiamo finora presentato è sostanzialmente una modulazione di tipo binario, poichè si basa sull'accendere e spegnere un oscillatore. A_C può assumere sostanzialmente solo i valori 0 e 1, in modo da 'spegnere' e 'accendere' il coseno. Ciò che si può fare anche è tuttavia parlare di modulazioni multilivello di questo tipo, ossia le Amplitude Shift Keying. Anzichè scegliere di accendere e basta l'oscillatore, si può scegliere di modularne l'ampiezza, utilizzando più di due valori di A_C (M valori), che permetteranno all'oscillatore locale di avere diverse ampiezze massime.

Esempio Pratico

Una 4-ASK potrebbe avere un $s(t)$ con questa forma:

La differenza è che rispetto a prima è possibile avere sostanzialmente 4 ampiezze: data la costante a , abbiamo:

$$A_C = \{0; a; 2a; 3a\}$$

Questo è quantomeno un esempio pratico di come si potrebbe utilizzare una 4-ASK.

Di solito, per quanto riguarda le modulazioni multilivello, si è soliti preferire le modulazioni di fase e di frequenza; queste tuttavia presentano un vantaggio assolutamente non trascurabile: è possibile utilizzare, come dispositivo di demodulazione, un circuito incoerente (ossia un rilevatore di involuppo), cosa che in effetti dopo non sarà fattibile, e potrebbe rappresentare un vantaggio

sulle altre. Si sappia che comunemente le ASK non son troppo diffuse, al di fuori della OOK.

10.2 PSK: Phase Shift Keying

Analizziamo la modulazione digitale di fase: la cosiddetta PSK. In questo caso, anzichè variare l'ampiezza del segnale modulato, ne varieremo la fase, utilizzando il modulante proprio a questo fine:

$$s(t) = A_C \cos(2\pi f_c t + D_p m(t))$$

L'informazione al solito è contenuta in $m(t)$, che però andrà a modificare non più l'ampiezza, bensì la fase del segnale (essendo parte dell'argomento del coseno). $m(t)$ di base è un segnale binario, e può sostanzialmente assumere due valori: θ_0 , o $\theta_0 + \pi$.

Volendo aver a che fare con segnalazioni multilivello, che si adattano bene nel contesto della PSK, potremmo avere una cosa del tipo:

$$m(t) = \frac{2\pi}{M} \cdot i$$

Dove $i = 1 \dots M$.

Questo segnale, se ci pensiamo, non è altri che il fasore in Elettrotecnica: rappresentandolo nello spazio delle fasi, infatti, otteniamo un insieme di punti appartenenti alla circonferenza goniometrica sul piano di Gauss. In una BPSK (PSK binaria) avremo due punti sull'asse reale, in una MPSK avremo M simboli disposti sul cerchio goniometrico del piano di Gauss.

Ovviamente, $D_p m(t)$ sarà un segnale in banda base. Spesso, si definisce un segnale supplementare $\theta(t)$ come:

$$\theta(t) \triangleq D_p \cdot m(t)$$

Utilizzando le formule di goniometria si ottiene:

$$s(t) = A_C \cos(2\pi f_c t + \theta(t)) = A_C [\cos(\theta(t)) \cos(2\pi f_c t) - \sin(\theta(t)) \sin(2\pi f_c t)]$$

10.2.1 PSK Binario: BPSK

Concentriamoci un momento sul BPSK = 2PSK; avremo che $\theta(t)$ vale '0' per '1' trasmesso, e π per '0' trasmesso. Quando trasmettiamo un '1', dunque, avremo che:

$$\cos[\theta(t)] = \cos(0) = 1$$

$$\sin[\theta(t)] = \sin(0) = 0$$

Al contrario, quando abbiamo uno '0' trasmesso, e quindi $\theta(t) = \pi$, capita che:

$$\cos[\theta(t)] = \cos(\pi) = -1$$

$$\sin[\theta(t)] = \sin(\pi) = 0$$

Il seno vale sempre '0', e quindi in effetti ci manca un termine: abbiamo sempre e comunque solo il contributo del coseno, che può assumere valore ± 1 .

Si noti che abbiamo fatto una supposizione iniziale, ossia quella di legare a '1' trasmesso il $\theta(t) = 0$, e così via. Questa in realtà non è influente: si può dimostrare, facendo conti banalissimi (provare per credere!) che non sarebbe cambiato assolutamente niente.

Ciò che possiamo fare, date queste osservazioni preliminari, è esprimere il segnale modulato della BPSK come:

$$s(t) = A_C m'(t) \cos(2\pi f_c t)$$

Dove $m'(t) = \pm 1$

Dal momento che $m'(t) = \pm 1$, capita che $f(t)$, ossia la forma del simbolo, è rettangolare e di ampiezza unitaria! Al più potrebbe essere positiva o negativa, per differenziare i bit trasmessi, ma la forma è quella di una porta rettangolare.

Possiamo interpretare dunque ciò come una modulazione di ampiezza con codifica antipodale (anche se questa di fatto è una codifica di base, per come l'abbiamo introdotta).

Come sarà fatto il segnale modulato? Vediamo:

Sostanzialmente gli spettri sono molto simili a quelli appena visto per la OOK, però c'è una grande differenza: non essendoci presenti δ , non è possibile utilizzare un ricevitore a rivelatore di involuppo, e quindi in questo caso la ricezione coerente, e quindi l'uso di anelli ad aggancio di fase, è obbligatorio.

La modulazione digitale appena presentata è probabilmente in totale tra le più utilizzate in ambito di telecomunicazioni; tra alcuni degli usi più comuni, presentiamo:

- Ponti Radio
- Televisioni Satellitari
- Digitale Terrestre
- MODEM telefonici di vecchia generazione

L'unica pecca, l'unico handicap che ci presenta per ora è la ricezione coerente. La cosa interessante è che però è stata ideata una sorta di alternativa al ricevitore coerente, ossia il DPSK. La 'D' sta per Differential, dal momento che questo tipo di modulazione lavora nel seguente modo:

Viene introdotto un nodo moltiplicatore, che introduce la moltiplicazione tra un bit, e quello che verrà dopo di lui. In questo modo, non si ha bisogno di un recupero di portante. Utilizzare una tecnologia del genere su sistemi ottici non è fattibile, per un semplice motivo: in campo di trasmissione ottica si punta ad avere velocità di trasmissione molto elevate, e quindi frequenze dell'ordine dei THz. Questo tipo di codifica è difficile da utilizzare poichè studia un dettaglio, ossia le variazioni di fase: utilizzando un'operazione logica di XOR tra un bit ed il successivo, si riesce a trovare il segnale di partenza.

10.2.2 MPSK: PSK Multilivello

La differenza dal caso-base appena introdotto, è il fatto che nell'MPSK si utilizzano sostanzialmente M valori di fase anzichè uno solo. Il caso più comune, che noi tratteremo per la maggiore, sarà il QPSK, ossia, nel piano delle fasi, una modulazione di questo genere:

Si hanno quattro simboli sul cerchio goniometrico, ma anche sulle quattro bisettrici del piano di Gauss!

Lo spettro modulato, avrà una forma di questo tipo: dato il segnale $\theta(t)$ prima definito, ma con un $m(t)$ diverso, avremo ossia un $m(t)$ rettangolare.

La banda null-to-null del sistema al solito vale il doppio della banda base:

$$B_{0-0} = 2D$$

Dove D è il baudrate; possiamo dunque dire che:

$$B_{0-0} = 2D = 2 \cdot \frac{B_r}{nbit}$$

Questo è vero per il MPSK; per il BPSK, abbiamo $nbit = 1$, e quindi $D = B_r$, e la formula consegue da ciò. Si noti che nel MPSK si ottiene una

riduzione di banda di un fattore pari a $nbit$, dove $nbit$ è il numero di bit necessari per la codifica:

$$nbit = \lceil \log_2(M) \rceil$$

Ciò di solito va a scapito delle prestazioni, come analizzeremo in seguito quantificando le prestazioni delle varie modulazioni digitali che stiamo introducendo. Questo sempre, tranne che in un caso: 4PSK e 2PSK.

Nota: 4PSK e QPSK non sono la stessa cosa! la 4PSK ha i simboli sugli assi (reale ed immaginario); la QPSK ha i simboli sulle bisettrici. In entrambi i casi si hanno i simboli ovviamente sul cerchio, ma in posizioni differenti! Si ricordi dunque che si parla di due tipi di codifica sostanzialmente diversi.

10.3 FSK: Frequency Shift Keying

Un altro formato di modulazione è il FSK: esso consiste, sostanzialmente, nell'aver a disposizione M oscillatori locali, ciascuno con una frequenza di oscillazione diversa.

Nel 2FSK, abbiamo a che fare con due simboli, ad esempio:

$$s_1(t) = A_C \cos(2\pi f_1 t + \theta_1), Tx = 1$$

$$s_2(t) = A_C \cos(2\pi f_2 t + \theta_1), Tx = 0$$

Cosa avremo, in pratica? Due oscillatori, a frequenze f_1 e f_2 , ed un interruttore in grado di selezionare quale dei due mandare in uscita.

Il fatto di utilizzare un interruttore, ci costringe ad avere una fase non continua: lo switching tra un oscillatore ed un altro non ci permette di realizzare la concordanza di fase tra le due, e quindi si avrà una discontinuità in questo senso. Questo problema tuttavia è ovviabile mediante un VCO (Voltage Control Oscillator), ossia un oscillatore comandato in tensione.

Questo tipo di formato richiede nuovamente un ricevitore di tipo coerente. Cosa interessante è il fatto che tuttavia, complicando un poco lo schema di un rivelatore di inviluppo, è possibile implementare una ricezione di tipo incoerente.

Lo spettro di un MFSK è molto difficile da calcolare e rappresentare, proviamo tuttavia a darne un'interpretazione grossolana, affermando in maniera semplicistica che esso è composto da tre fattori:

- Deviazione di frequenza utilizzata, ossia dalla differenza $f_2 - f_1$;

- Modo con cui si passa da un simbolo ad un altro (se la fase è continua avremo infatti uno spettro molto più stretto in frequenza, non avendo salti; viceversa per la fase discontinua, che provocherà la necessità di uno spettro in frequenza molto più largo);
- Dal bitrate B_r .

Questo tipo di modulazione presenta vantaggi e svantaggi: vantaggio è nella tecnologia, dal momento che è piuttosto semplice realizzare sia il sistema di trasmissione che quello di ricezione (per esempio un VCO non è troppo complicato da realizzare; uno switch di oscillatori ancora più banale). D'altro canto questo tipo di sistema presenta prestazioni piuttosto limitate, il che lo ha reso utilizzabile in una scala di applicazioni piuttosto limitato. Vediamone alcune:

- MODEM telefonici di prima generazione, fino a parlare di 1,2 kbit/s;
- Il telefono di casa, o meglio una sua componente: il numero telefonico viene modulato mediante una modulazione a toni, e quindi in cui vengono modificate frequenze; questa è una FSK.

10.4 QAM: Quadrature Amplitude Modulation

Il formato in assoluto più utilizzato in ambito di telecomunicazioni è la QAM, ossia (come suggerisce il titolo della sezione) la Quadrature Amplitude Modulation: si tratta di una modulazione contemporaneamente di ampiezza, e di fase. Detto in altre parole, si utilizzano le componenti sia in fase che in quadratura rispetto alla portante. Ciò significa che il segnale modulato avrà una forma del tipo:

$$s(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t) - y(t) \sin(2\pi f_c t)$$

In questo ambito, non abbiamo legami particolari tra $x(t)$ e $y(t)$: possono essere due segnali digitali in banda base qualunque, in teoria anche con diverso bitrate. In teoria perchè in pratica i segnali utilizzati si usano in maniera furba: si scelgono infatti segnali di tipo PAM (Pulse Amplitude Modulated) multilivello, in banda base. Nello spazio delle fasi, infatti, questi hanno una disposizione geometrica con una distribuzione più opportuna rispetto ad altre; consideriamo un esempio pratico:

Questo tipo di configurazione, di geometria, ci permette di considerare $x(t)$ e $y(t)$ come la parte reale e la parte immaginaria di un fasore, ma

in questo modo, in questo esempio possiamo considerare di avere 4 diversi valori di ampiezza per quanto riguarda la parte reale e la parte immaginaria. Quello che abbiamo appena presentato è il 16-QAM: ciascun simbolo ha sostanzialmente bisogno di 4 bit per essere rappresentato.

Le tecniche M-QAM sono quelle che si utilizzano quando è necessario risparmiare banda: lo spettro di potenza sarà infatti sostanzialmente simile a quello di una MPSK, poichè quelli che vengono trasmessi sono sostanzialmente fasori. Al fine di guadagnare in termini di prestazioni, si utilizzano costellazioni a baricentro nullo (come quella presentata nell'esempio di 16-QAM).

La banda null-to-null è pari al doppio del baudrate, $2D$, esattamente come nel caso dell'MPSK, e dunque:

$$B_{0-0} = 2D = 2 \cdot \frac{B_r}{nbit}$$

Supponiamo di avere due trasmissioni con lo stesso bitrate B_r , una mediante modulazione 2PSK, una mediante 128-QAM. Abbiamo che:

$$2PSK \longrightarrow B_{0-0} = 2B_r$$

$$128 - QAM \longrightarrow nbit = \log_2(128) = 7 \longrightarrow B_{0-0} = 2\frac{B_r}{7}$$

Quello che abbiamo ottenuto in questo esempio banale, è un sistema in grado di occupare una banda 7 volte più stretta! Ciò, nel caso di trasmissioni quali quelle via etere, dove la banda è un bene prezioso e da non sperperare, è assolutamente utile!

Questo tipo di modulazione è utilzzatissimo; una delle più celebri applicazioni è il MODEM telefonico v. 34 (33.6 kb/s): esso utilizzava una 1664-QAM, ossia una QAM a 1664 simboli. Questo tipo di tecnologia rappresenta quasi il massimo raggiunto (a parte il v. 90, il 56 kb/s, che utilizzava un trucco particolare per aumentare la velocità di trasmissione). Da ciò, si capisca quanto sia stata importante l'introduzione di questo tipo di modulazione.

Capitolo 11

Analisi delle Prestazioni delle Modulazioni Digitali

Ci occuperemo ora di valutare le varie modulazioni digitali appena introdotte, sotto il punto di vista delle prestazioni; se per ora abbiamo semplicemente fatto alcune presentazioni, ora inizieremo ad occuparci di un punto di vista più 'tecnico'.

11.1 PSK (Phase Shift Keying)

I simboli trasmissibili, $s_i(t)$, sono come abbiamo visto semplicemente dei fasori, in cui la variabile è la fase; il tempo di vita, la durata di questi fasori, è il tempo di simbolo T_S . Avremo dunque che:

$$s_i(t) = A \cos(2\pi f_c t + \psi_1) p_{T_S}(t)$$

Come impulsi consideriamo impulsi rettangolari sfasati; utilizzando le leggi della trigonometria, otteniamo:

$$s_i(t) = A p_{T_S}(t) [\cos(2\pi f_c t) \cos(\psi_1) - \sin(2\pi f_c t) \sin(\psi_1)]$$

Ogni simbolo si può dunque rappresentare, nel tempo di vita T_S , come una combinazione lineare di seno e coseno. Al fine di determinare le prestazioni, dovremo introdurre la teoria dello spazio dei segnali, e determinare una base ortonormale per i segnali $s_i(t)$, sia in questo caso che in altri casi (che studieremo più avanti).

Una base ortogonale sarà dunque:

$$\Psi_1(t) = p_{T_S}(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$\Psi_2(t) = p_{T_S}(t) \sin(2\pi f_c t) \cdot (-1)$$

Scegliamo di introdurre il -1 al seno per comodità, come vedremo in seguito. Normalizziamo dunque questi elementi di base, ottenendo:

$$\hat{\Psi}_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_S}} \cos(2\pi f_c t) p_{T_S}(t)$$

$$\hat{\Psi}_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T_S}} \sin(2\pi f_c t) p_{T_S}(t)$$

Si noti che questo discorso, queste formule, valgono per una generica MPSK, con $M > 2$. Per una BPSK, le cose si fanno più interessanti, poichè avremo bisogno esclusivamente di un elemento per la base ortonormale (come potevamo immaginare dalla presentazione: abbiamo visto che il seno risulta essere sempre nullo per qualsiasi codifica scelta); avremo dunque che, se $M = 2$:

$$\psi_i = \{0; \pi\}$$

$$s_1(t) = A \cos(2\pi f_c t)$$

$$s_2(t) = A \cos(2\pi f_c t + \pi)$$

La funzione generante lo spazio di questi segnali sarà banalmente:

$$\hat{\Psi}_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_S}} \cos(2\pi f_c t) p_{T_S}(t)$$

Si ricordi dunque che è possibile fare semplificazioni, se si parla di un BPSK!

Torniamo al nostro MPSK generico: i singoli simboli

$$s_i(t) = A \cos(2\pi f_c t + \psi_i) p_{T_S}(t), i = 1 \dots N$$

Si possono rappresentare geometricamente rispetto alla base ortonormale, mediante un vettore nel piano delle fasi:

$$\vec{s}_i = \left(\cos(\psi_i) \cdot A \cdot \sqrt{\frac{T_S}{2}}; \sin(\psi_i) \cdot A \cdot \sqrt{\frac{T_S}{2}} \right)$$

Nel piano delle fasi, dunque, \vec{s}_i è la rappresentazione del nostro fasore.

Ciò che abbiamo appena fatto coincide con la rappresentazione della costellazione; l'energia di \vec{s}_i varrà:

$$\varepsilon_{\vec{s}_i} = A^2 \left(\sqrt{\frac{T_S}{2}} \right)^2 (\cos^2(\psi_i) + \sin^2(\psi_i)) = A^2 \frac{T_S}{2}$$

Questo è ragionevole, poichè la potenza della sinusoide è $\frac{A^2}{2}$ (come sappiamo da tempo); moltiplicando per il tempo di esistenza, è ovvio che si ottenga l'energia, come ci potevamo aspettare.

Come sarà fatto il ricevitore? Abbiamo visto che nello spazio dei segnali il ricevitore è un demodulatore con in ingresso un segnale $r(t)$, ed in uscita le varie componenti r_i del vettore \vec{r} nella base ortonormale; il decisore riceverà i simboli trasmessi, e dunque i bit dalla codifica. Sappiamo che i r_i si ricavano mediante i prodotti scalari come vuole Gram-Schmidt:

$$r_1 = \langle r(t) | \hat{\Psi}_1(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \hat{\Psi}_1^*(t) dt =$$

Ma essendo il tutto limitato nel tempo di vita T_S , ed essendo reale la funzione della base ortonormale, abbiamo:

$$= \int_0^{T_S} r(t) \hat{\Psi}_1(t) dt$$

Analogamente per quanto riguarda r_2 , avremo:

$$r_2 = \langle r(t) | \hat{\Psi}_2(t) \rangle = \int_0^{T_S} r(t) \hat{\Psi}_2(t) dt$$

Dove abbiamo che:

$$\hat{\Psi}_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_S}} \cos(2\pi f_c t) p_{T_S}(t)$$

$$\hat{\Psi}_2(t) = -\sqrt{\frac{2}{T_S}} \sin(2\pi f_c t) p_{T_S}(t)$$

Questo sarà il ricevitore ottimo, implementante il criterio di minima distanza, come visto in precedenza.

11.2 QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

Terminiamo il cappello introduttivo sulle PSK, ed introduciamone uno per quanto riguarda le QAM (notiamo che queste due saranno le modulazioni numeriche che più discuteremo in questa trattazione); al termine di questo secondo cappello introduttivo, potremo incominciare a calcolare effettivamente le prestazioni di casi concreti.

Per quanto riguarda la QAM, il segnale modulato $s_i(t)$ avrà una forma del tipo:

$$s_i(t) = x_i(t) \cos(2\pi f_c t) - y_i(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Dove i varia da 1 a M , M è il solito numero di simboli della costellazione. $x_i(t)$ e $y_i(t)$ sono (di solito) impulsi rettangolari di diverse ampiezze. Possiamo dunque scrivere ciò che abbiamo appena proposto come:

$$s_i(t) = A_i p_{T_S}(t) \cos(2\pi f_c t) - B_i p_{T_S}(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Ogni simbolo è una combinazione lineare di una porta per una sinusoide, e quindi la base sarà più o meno simile:

$$\hat{\Psi}_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_S}} p_{T_S}(t) \cos(2\pi f_c t)$$

$$\hat{\Psi}_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_S}} p_{T_S}(t) \sin(2\pi f_c t) \cdot (-1)$$

Come prima moltiplichiamo solo per comodità per -1 .

Ciò che vediamo è che avremo nuovamente la rappresentazione nel piano delle fasi (a meno di un fattore moltiplicativo sotto radice); le componenti di \vec{s}_i , questa volta, saranno (calcolabile banalmente come prima, sostituendo la base ortonormale):

$$\vec{s}_i = (\sqrt{\varepsilon_{s_i}} \cos(\psi_i); \sqrt{\varepsilon_{s_i}} \sin(\psi_i))$$

In questo ambito, ψ_i vale:

$$\psi_i = \arctan\left(\frac{B_i}{A_i}\right)$$

Quando parleremo dunque di prestazioni, per quanto riguarda la MQAM e le MPSK, avremo sempre la stessa base ortonormale come riferimento! Cambierà leggermente (come abbiamo appena visto) il vettore \vec{s}_i , tuttavia

per il resto i calcoli saranno abbastanza simili! Vantaggio sarà il fatto che nel ricevitore col MQAM, rispetto al MPSK, non avremo alcuna differenza.

Abbiamo in questo modo individuato le premesse per lavorare sia con le PSK che con le QAM, le modulazioni più importanti nell'ambito delle telecomunicazioni elettriche moderne; iniziamo a calcolare le prestazioni, per diverse casistiche, per diversi esempi pratici di sistemi di trasmissione.

11.3 BPSK: Binary Phase Shift Keying

Nel caso del BPSK, avremo a che fare con un segnale modulato del tipo:

$$s_i(t) = A \cos(2\pi f_c t + \psi_i) p_{T_S}(t)$$

Dove ψ_i può valere '0', per $T_x=0$, o π , per $T_x=1$.

Che ci facciamo? La base ortonormale, innanzitutto, vale:

$$\hat{\Psi}(t) = \sqrt{\frac{2}{T_S}} \cos(2\pi f_c t + \psi_i) p_{T_S}(t)$$

Il vettore \vec{s}_i , sarà composto da due componenti:

$$\vec{s}_i = (+\sqrt{\varepsilon_{s_i}}; -\sqrt{\varepsilon_{s_i}})$$

Graficamente parlando, abbiamo quindi sostanzialmente due punti su di una retta:

Vediamo di calcolare l'energia per bit, che di solito viene utilizzata come riferimento per il calcolo delle prestazioni. Abbiamo che:

$$\varepsilon_{s_1} = \varepsilon_{s_2} = A^2 \frac{T_S}{2} = \varepsilon_s$$

Per quanto riguarda l'energia per bit:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_s}{nbit} = \varepsilon_s 1 = \varepsilon_s$$

Possiamo capire facilmente che la distanza tra i due simboli sia semplicemente il doppio della distanza di uno dei simboli dall'origine, dunque:

$$d = 2\sqrt{\varepsilon_s} = 2\sqrt{\varepsilon_b}$$

Utilizziamo finalmente in un caso veramente pratico la teoria che abbiamo introdotto per il calcolo della probabilità di errore, ottenendo:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{4\varepsilon_b}{4N_0}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right)$$

Nota: se come ψ_i avessimo scelto $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, le prestazioni non sarebbero assolutamente cambiate! Ciò che sarebbe capitato sarebbe stata una piccola differenza a monte, ossia al posto di avere un coseno come elemento per la base ortonormale avremmo avuto un seno, ma senza cambiare la distanza tra i due punti. Discorso diverso sarebbe stato scegliendo '0' e ' $\frac{\pi}{2}$ ': sarebbe cambiata la distanza minima (diminuita), diminuito l'argomento della $\operatorname{erfc}()$, e quindi peggiorate le prestazioni.

11.4 QPSK (Quadrature PSK)

Analizziamo ora il QPSK (che ricordiamo essere diverso dal 4-PSK, o meglio essere una particolarissima configurazione di esso): quattro simboli sulle bisettrici, equidistanti rispetto all'origine (su di un cerchio).

Considerando un esempio grafico di questo tipo, si ha che:

$$s_i(t) = A \cos(2\pi f_c t + \psi_i) p_{T_s}(t)$$

Dobbiamo effettuare un'operazione di assegnazione dei bit, al fine di realizzare la trasmissione; metodo furbo è scegliere, come abbiamo già visto, la codifica Gray: a seconda dell'adiacenza fisica nei vari quadranti, dovrà cambiare al più un bit; ciò significa che simboli opposti, ossia sulla stessa bisettrice, avranno bit opposti.

Al fine di utilizzare la teoria dello spazio dei segnali, servirà di certo una definizione delle regioni di decisione. Niente di più facile: gli assi cartesiani delimitano le regioni di decisione dei singoli simboli. Il primo quadrante sarà per \vec{s}_0 , il secondo per \vec{s}_2 , il terzo per \vec{s}_3 , il quarto per \vec{s}_1 . Avremo dunque che le regioni di decisione saranno completamente simmetriche, e potremo dire che:

$$\mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_0\} = \mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_1\} = \mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_2\} = \mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_3\}$$

Supponendo al solito simboli equiprobabili, avremo:

$$\mathbb{P}\{e\} = \sum_{i=1}^M \mathbb{P}\{\vec{s}_i\} \mathbb{P}\{e|\vec{s}_i\} = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \mathbb{P}\{e|\vec{s}_0\}$$

Se i punti non avessero avuto questa simmetria, le regioni non sarebbero state simmetriche, e quindi non sarebbe stato più vero tutto ciò che abbiamo

appena ipotizzato, e che ci ha permesso di ridurre a banalissimi dei calcoli (ossia al calcolo di una singola probabilità di errore).

Quantifichiamo ora la probabilità di errore su \vec{s}_0 :

Sappiamo che \vec{s}_0 è posto a distanza $\sqrt{\varepsilon_s}$ dall'origine con una fase di $\frac{\pi}{4}$; possiamo dire, in cartesiano, che:

$$\vec{s}_0 = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2}}; \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2}} \right)$$

In uscita dal canale avremo $r(t)$, interpretato mediante le componenti di \vec{r} :

$$\vec{r} = (r_1; r_2)$$

Avremo che:

$$\begin{cases} r_1 = n_1 + \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2}} \\ r_2 = n_2 + \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2}} \end{cases}$$

r_1 e r_2 sono due variabili casuali scorrelate tra loro (poichè bianche), indipendenti statisticamente (poichè gaussiane scorrelate), con media pari a s_i , e quindi $\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2}}$; la varianza sarà la stessa di n_1 e n_2 , e quindi $\frac{N_0}{2}$. Calcoliamo quindi la probabilità di errore, come:

$$\mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_0\} = \mathbb{P}\{r \notin \text{regione di decisione di } s_0 | Tx = \vec{s}_0\}$$

Da qua, introducendo il formalismo, avremo ciò:

Dal momento che la somma delle probabilità di errore darebbe luogo al contare due volte l'intersezione, dobbiamo escludere l'intersezione. Cosa più furba è usare il teorema della probabilità complementare, e fare un ragionamento di questo genere:

$$\mathbb{P}\{r_1 < 0\} + \mathbb{P}\{r_2 < 0\} - \mathbb{P}\{\text{INTERSEZIONE}\} = 1 - \mathbb{P}\{\text{CORRETTA RICEZIONE}\}$$

Introducendo un minimo di formalismo, vediamo dunque:

$$\mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_0\} = 1 - \mathbb{P}\{r \in \text{regione di decisione di } s_0\}$$

La probabilità $\mathbb{P}\{c\}$, di evento corretto (c), sarà:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{c|Tx = \vec{s}_0\} &= \mathbb{P}\{r_1 > 0; r_2 > 0\} = \mathbb{P}\{r_1 > 0; r_2 > 0 | Tx = \vec{s}_0\} = \\ &= \mathbb{P}\{r_1 > 0 | Tx = \vec{s}_0\} \cdot \mathbb{P}\{r_2 > 0 | Tx = \vec{s}_0\} \end{aligned}$$

Calcoliamo uno dei due fattori, usando nuovamente la probabilità complementare, al fine di poter utilizzare la $\text{erfc}()$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{r_1 > 0 | Tx = \vec{s}_0\} &= 1 - \mathbb{P}\{r_1 < 0 | Tx = \vec{s}_0\} = 1 - \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2}} - 0}{2\sqrt{N_0}}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2N_0}}\right) = 1 - p\end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo fattore, è esattamente uguale a questo: mediante gli stessi conti, si trova esattamente lo stesso risultato (poichè comunque abbiamo un insieme di simmetrie che ci permette di semplificare in maniera a dir poco enorme i calcoli), ottenendo quindi:

$$\mathbb{P}\{r_2 > 0 | Tx = \vec{s}_0\} = 1 - p$$

$$\mathbb{P}\{c | Tx = \vec{s}_0\} = (1 - p)^2$$

La probabilità di errore, finalmente, sarà:

$$\mathbb{P}\{e | \vec{s}_0\} = 1 - (1 - p)^2 = 2p - p^2$$

Dove ricordiamo che p è:

$$p = \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2N_0}}\right)$$

Quindi, svolgendo ancora alcuni conti:

$$\mathbb{P}\{e\} = 2 \cdot \frac{1}{2} \text{erfc}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2N_0}}\right) - \frac{1}{4} \text{erfc}^2\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2N_0}}\right)$$

Quella che abbiamo ottenuto dopo tutte queste peripezie algebriche è la probabilità di errore sul simbolo mediante criterio di decisione a minima distanza. Si ricorda che questa è una probabilità di errore 'esatta' (per quanto riguarda l'espressione calcolata, parlare di 'probabilità esatta' può sembrare un simpatico controsenso).

Esprimendo in funzione di ε_b , ossia dell'energia media per bit, avremo che:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_s}{\text{nbit}} = \frac{\varepsilon_s}{2} \implies \varepsilon_s = 2\varepsilon_b$$

Quindi:

$$\mathbb{P}_s \{e\} = \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right) - \frac{1}{4} \operatorname{erfc}^2 \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right)$$

Questo per quanto riguarda la QPSK e il criterio di decisione a minima distanza. Volendo calcolare la probabilità di errore sul bit, sapendo che abbiamo utilizzato la codifica Gray, possiamo usare l'approssimazione:

$$\mathbb{P}_b \{e\} \simeq \frac{\mathbb{P} \{e\}}{nbit} = \frac{\mathbb{P} \{e\}}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right) - \frac{1}{8} \operatorname{erfc}^2 \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right)$$

Questa è la probabilità di errore sul bit, approssimata, in QPSK, con sistema di trasmissione basato sul criterio di riconoscimento a minima distanza.

Piccola nota: ε_b dipende dall'energia dei bit ricevuti! Non trasmessi! Tutto ciò che stiamo ora facendo, riguarda solo ed esclusivamente il sistema di ricezione, e quindi i bit ricevuti!

11.4.1 Probabilità esatta sul bit

In questo particolare caso, nel QPSK, è possibile calcolare addirittura la probabilità esatta sul bit (oltre che sul simbolo), migliorando notevolmente la precisione sull'approssimazione fatta mediante la codifica Gray. Vediamo:

Osservando il primo bit di ciascuna delle sequenze di rappresentazione, ossia solo i primi bit (dei due bit, solo il primo); vediamo che:

$$s_{0,1}^{\rightarrow} = 0; s_{1,1}^{\rightarrow} = 0; s_{2,1}^{\rightarrow} = 1; s_{3,1}^{\rightarrow} = 1$$

Tutto ciò è riferito all'esempio precedentemente affrontato per il calcolo delle prestazioni della QPSK, relativo alle funzioni della base ortonormale $\hat{\Psi}_1$ e $\hat{\Psi}_2$.

Possiamo discriminare, in base alla base ortonormale, immediatamente il primo bit. Se il primo bit è pari a '0', siamo certi di trovarci nel semipiano destro ($r_1 > 0$); dualmente, se il primo bit è '1', siamo sicuri che $r_1 < 0$, ossia che siamo nel semipiano sinistro.

Per ora non preoccupiamoci del riconoscimento del simbolo, ma del riconoscimento delle componenti! Sulla base delle componenti ricevute, dunque, andiamo a riconoscere i singoli bit delle sequenze ricevute.

Per quanto riguarda il secondo bit della sequenza, il discorso è del tutto analogo: '0' ci ricollega al semipiano superiore, più alto, '1' a quello inferiore, più basso. Abbiamo che:

$$s_{0,2}^{\rightarrow} = 0; s_{1,2}^{\rightarrow} = 1; s_{2,2}^{\rightarrow} = 0; s_{3,2}^{\rightarrow} = 1$$

Potremmo implementare uno schema a blocchi del ricevitore fatto in questo modo:

Il demodulatore ricava le componenti di $r(t)$, e integrando da 0 a T_S si ricavano r_1 e r_2 ; anzichè fare ciò che facevamo prima, però, introduciamo in uscita ad ogni integratore introduciamo singoli decisori a soglia, con soglia $V_T = 0$, ed in uscita da essi rispettivamente il primo ed il secondo bit della sequenza. A questo punto, mediante un nodo moltiplicatore, si 'serializza' l'elenco dei bit, convertendo da parallelo a seriale (moltiplicando semplicemente per 2); in questo modo, si possono ricavare le probabilità di errore sul singolo bit, e non sui simboli, considerando direttamente la sequenza! Abbiamo dunque che:

$$\mathbb{P}_b\{0\} = \mathbb{P}\{Tx = 1\} \mathbb{P}\{e|Tx = 1\} + \mathbb{P}\{Tx = 0\} \mathbb{P}\{e|Tx = 0\} =$$

Ma il canale binario è simmetrico, e quindi le probabilità di errore uguali; inoltre, consideriamo al solito simboli equiprobabili, e dunque otterremo semplicemente:

$$= \mathbb{P}\{e|Tx = 0\}$$

Questo per quanto concerne il primo bit; a questo punto, quantifichiamo questa probabilità di errore, in questa maniera: se abbiamo errore sul primo bit, avremo che, pur avendo trasmesso '0', r_1 dovrà trovarsi nel quadrante sinistro, e quindi:

$$\mathbb{P}\{e|Tx = 0\} = \mathbb{P}\{r_1 < 0|bit_1 = 0\}$$

Grazie alle solite simmetrie, avremo che questa probabilità sarà pari a:

$$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2}}}{2\sqrt{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\varepsilon_s}{2N_0}\right) = p$$

Ma abbiamo, dal momento che i simboli sono 4, che:

$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_s}{2}$$

Quindi:

$$\longrightarrow \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\varepsilon_b}{N_0}\right)$$

Per quanto riguarda il secondo bit della sequenza, vediamo che si avran risultati del tutto analoghi: abbiamo angolo di $\frac{\pi}{4}$ sul piano di Gauss, abbiamo

la stessa distanza dall'origine degli assi, abbiamo la stessa varianza di prima. Volendo si può vedere, rifacendo gli stessi, identici conti di prima, verificare che:

$$\mathbb{P}_b \{e|Tx = 0\}_{bit_2} = p = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\varepsilon_b}{N_0} \right)$$

Oh, ma cosa abbiamo trovato? Dal momento che la probabilità di errore globale sarà semplicemente la media delle due probabilità, avremo che:

$$\mathbb{P}_b \{e\} = \frac{1}{2}(p + p) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\varepsilon_b}{N_0} \right)$$

Confrontando con la probabilità di errore sul bit precedentemente ricavata, che ricordiamo essere:

$$\mathbb{P}_b \{e\} \simeq \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right) - \frac{1}{8} \operatorname{erfc}^2 \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right)$$

Vediamo una cosa molto spiacevole per l'espressione prima calcolata: essa è approssimata, ma per difetto! Avendo una probabilità minore di quella reale, abbiamo idea di avere prestazioni migliori di quelle reali! Ciò è molto negativo, perchè avere un'approssimazione in grado di fornire un peggioramento delle prestazioni ci può far sentire 'al sicuro', ma una cosa di questo genere potrebbe essere molto pericolosa.

Abbiamo così calcolato le probabilità di errore sui bit per due sistemi, BPSK e QPSK; togliamoci a questo punto uno sfizio: andiamo a riprendere la probabilità di errore per il BPSK. Vediamo che:

$$\mathbb{P} \{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\varepsilon_b}{N_0} \right)$$

Ci è capitata una cosa veramente inaspettata: pur avendo cambiato tipo di trasmissione, abbiamo trovato una probabilità di errore del tutto identica a quella del QPSK! Cioè, nel QPSK abbiamo una trasmissione multilivello, ma con le stesse prestazioni del BPSK (che è binaria). A parità di energia di bit ricevuta, abbiamo le stesse prestazioni.

E per quanto riguarda l'occupazione di banda? A parità di bitrate, la banda null-to-null del BPSK era pari a:

$$B_{0-0} = 2B_r$$

Ora abbiamo, banalmente:

$$B_{0-0} = \frac{2B_r}{nbit} = \frac{2B_r}{2} = B_r$$

Ciò è a dir poco stupendo: a parità di prestazioni, il QPSK occupa metà della banda che richiedeva invece la modulazione BPSK!!!

Abbiamo dunque due formati: a parità di prestazioni, uno occupa metà della banda rispetto all'altro. Direi che non ci sono molti dubbi su quale sia il migliore, anche se c'è un piccolo inconveniente: i ricevitori per il QPSK sono un po' più complessi, ma la cosa non ci interessa più di tanto: lo sviluppo tecnologico dell'elettronica è tale da permettere, al QPSK, di surclassare notevolmente il BPSK.

11.5 Union Bound

Abbiamo analizzato alcune modulazioni di ampiezza multilivello; tratteremo anche alcuni dettagli per quanto riguarda le QAM; generalmente, nelle modulazioni multilivello in banda traslata, aumentando il numero di livelli, M , si ha una penalità nelle prestazioni (ossia una diminuzione del rapporto $\frac{E_b}{N_0}$, a parità di probabilità di errore sul bit). La penalità dipende dal formato di modulazione, e da M : più esso è elevato, più aumenta la penalità.

Aumentare M da un lato implica ridurre banda, che viene 'divisa per *nbit*'; d'altro canto aumenta la complessità del ricevitore, e diminuiscono ulteriormente le prestazioni; questo è vero SEMPRE, tranne nel caso BPSK/QPSK.

Nota: la 4-QAM e la 4-PSK sono identiche: incrementando M da qua, però, tendenzialmente il M QAM tende a fornire anche prestazioni migliori rispetto al generico MPSK (in termini di probabilità sui bit, $\mathbb{P}_b\{e\}$). Vedremo, in seguito, come mai ciò è generalmente vero.

Una cosa che si vuol far notare sin qui è la seguente: abbiamo per ora calcolato alcune probabilità di errore, e quindi prestazioni, utilizzando però particolari simmetrie. Cosa più importante che non abbiamo accennato, è il fatto che tutte le probabilità di errore calcolate, sono state quantificate su regioni di decisioni pseudorettangolari.

Cosa veramente brutta è il fatto che è impossibile calcolare, per $M > 4$, parlando di MPSK, le prestazioni: le regioni di decisione non sarebbero più rettangolari, e quindi avremmo enormi problemi ai fini del calcolo.

Si può dimostrare tuttavia che:

$$\mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_i\} \leq \sum_{k=1}^M \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{i,k}}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Dove $d_{i,k}$ è, nello spazio dei segnali, la distanza tra il simbolo i e il simbolo k .

Dimostrazione

Utilizzando il teorema della probabilità congiunta, si ottiene che la probabilità $\mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_i\}$ è semplicemente l'unione delle probabilità di decidere per simboli diversi da \vec{s}_i ; possiamo dunque definire l'evento $E_{i,k}$ come l'evento di decisione per il simbolo k , una volta trasmesso il simbolo i ; allora:

$$\mathbb{P}\{e|Tx = \vec{s}_i\} = \mathbb{P}\left\{E_{i,1} \cup E_{i,2} \cup \dots \cup E_{i,i-1} \cup E_{i,i+1} \cup E_{i,M}\right\}$$

Ossia consideriamo tutti gli eventi tranne quello corretto, $E_{i,i}$.
Dalla teoria del Calcolo delle Probabilità, sappiamo che:

$$\mathbb{P}\{A \cup B\} = \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}$$

Quindi:

$$\mathbb{P}\{A \cup B\} \leq \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B\}$$

Da ciò, possiamo banalmente estendere a ciò che abbiamo precedentemente scritto, esponendo:

$$\mathbb{P}\{e|\vec{s}_i\} \leq \sum_{k=1, k \neq i}^M \mathbb{P}\{E_{i,k}\}$$

Supponiamo ora ad esempio che la base ortonormale sia composta da due elementi; avremo che:

$$\mathbb{P}\{E_{i,k}\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{i,k}}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Da ciò, possiamo dimostrare il postulato iniziale, ossia:

$$\mathbb{P}\{e|\vec{s}_i\} \leq \sum_{k=1, k \neq i}^M \operatorname{erfc}\left(\frac{d_{i,k}}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Possiamo fare tuttavia di meglio! Noi conosciamo l'andamento della funzione $\operatorname{erfc}()$, e sappiamo che essa è una funzione decrescente; quello che possiamo fare, è definire un d_{min} , come il d minimo tra tutti i possibili i, j di $d_{i,j}$: sostanzialmente, la distanza minima!

$$d_{min} = \min_{i,j} \{d_{i,j}\}$$

Potremo dunque scrivere che:

$$\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}} \right) \geq \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{i,k}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

Possiamo dunque calcolare la probabilità di errore sul simbolo, a partire da queste considerazioni; supponendo al solito di aver a che fare con sorgenti di bit equiprobabili:

$$\mathbb{P}\{e\} = \sum_{i=1}^M \mathbb{P}\{\vec{s}_i\} \mathbb{P}\{e|\vec{s}_i\} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbb{P}\{e|\vec{s}_i\}$$

Da qui:

$$\mathbb{P}\{e\} \leq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sum_{k=1, k \neq i}^M \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

Si noti che però la sommatoria più interna non dipende da k , poichè non abbiamo k nella $\operatorname{erfc}()$! Possiamo dunque sommare $M - 1$ volte la stessa cosa, moltiplicando per $M - 1$, e ottenendo così:

$$\implies \mathbb{P}\{e\} \leq \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (M - 1) \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

Ma se stiamo a vedere, manco da i !!!

$$\implies \mathbb{P}\{e\} \leq \frac{1}{M} \cdot M \cdot (M - 1) \cdot \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

Cosa abbiamo ottenuto?

$$\mathbb{P}\{e\} \leq \frac{M - 1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

Questo termine appena trovato è chiamato 'union bound' ed è una probabilità di errore sul simbolo. Si noti che tutto ciò che abbiamo appena dimostrato ha senso, parlando di criterio di decisione a minima distanza; per eventuali altri criteri bisognerebbe tenere conto delle penalizzazioni che deriverebbero dall'uso di filtri non ottimi.

Ma a noi piace aver a disposizione non tanto la probabilità di errore sul simbolo, quanto quella sul bit! Supponiamo dunque di utilizzare la solita codifica di Gray, e quindi di ottenere:

$$\mathbb{P}_b\{e\} \simeq \frac{\mathbb{P}\{e\}}{nbit} \leq \frac{M - 1}{2} \cdot \frac{1}{nbit} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

Ordinando un po', e ricordando che $nbit \triangleq \lceil \log_2(M) \rceil$, ricaviamo:

$$\mathbb{P}_b \{e\} \leq \frac{M-1}{2^{\lceil \log_2(M) \rceil}} \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

Considerando dunque criterio di minima distanza, e codifica Gray, questa è una probabilità di errore (inesatta) sul bit.

Applichiamo dunque la teoria dell'union bound appena ricavata a qualcosa di noto, come per esempio al tanto caro QPSK, e vediamo cosa ne vien fuori.

Sappiamo dalla costellazione che la distanza minima è:

$$d = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2}}$$

Abbiamo dunque che:

$$\varepsilon_b \triangleq \frac{\varepsilon_s}{nbit} = \frac{\varepsilon_s}{2}$$

Applicando dunque l'union bound, otteniamo:

$$\mathbb{P} \{e\} \leq \frac{M-1}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{d_{min}}{2\sqrt{N_0}} \right) = \frac{3}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{2\sqrt{\varepsilon_b}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

Da ciò, troviamo che:

$$\mathbb{P} \{e\} \leq \frac{3}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right)$$

Questa è la probabilità di errore sul simbolo ricavata mediante union bound; e per quanto riguarda il bit?

$$\mathbb{P}_b \{e\} \leq \frac{\mathbb{P} \{e\}}{nbit} = \frac{\mathbb{P} \{e\}}{2} = \frac{3}{4} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right)$$

Questa è una probabilità di errore sul bit calcolata mediante union bound. Ricordiamo che avevamo calcolato, esattamente, che:

$$\mathbb{P}_b \{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{N_0}} \right)$$

Effettivamente, è minore di quella calcolata con union bound. La disuguaglianza si verifica giusta.

Applichiamo lo union bound ad un altro caso noto, il caso binario; mediante union bound, calcoliamo:

$$\mathbb{P}\{e\} \leq \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Ricordiamo che la probabilità di errore, in caso di sistema binario, valeva:

$$\mathbb{P}\{e\} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Abbiamo trovato la stessa espressione! Ciò ci può far intuire che, nel caso di sistemi binari, l'union bound non fornisca una maggiorazione, ma la probabilità di errore esatta!

11.6 Cenni a Possibili Applicazioni

Tutte le modulazioni finora analizzate sono utilizzabili in una serie di applicazioni riguardanti le telecomunicazioni; facciamo ad esempio una carrellata dei MODEM telefonici più famosi, e degli standard legati a diversi periodi.

Il 56k è diverso, è 'taroccato', poichè solitamente capita che, in fondo alla trasmissione digitale, vi sia una conversione A/D, ossia Analogico-Digitale, che riduce le prestazioni; chi ha progettato il 56k ha avuto la brillante idea di sopporre digitale la trasmissione, come è giusto che fosse, aumentando così le prestazioni rispetto allo standard precedente (33.6k).

La ADSL si basa invece su principi del tutto diversi: la banda a disposizione del doppino telefonico è sostanzialmente un seno cardinale, di cui i MODEM convenzionali sfruttavano solo il primo lobo; ADSL divide in 'striscie' la banda, considerando però non solo il lobo principale, ma l'intero seno cardinale, e quindi i lobi secondari. Questi lobi vanno, come larghezza, dai 300 Hz ai 3 kHz; prima che si inizi a scaricare dati, il modem invia le frequenze di verifica, ossia particolari segnali; se la centrale riceve allora tutto ok, e si procede con le operazioni, ma se la centrale non ricevesse segnali di verifica, abbasserebbe la propria velocità, adattandosi al canale fisico.

Capitolo 12

Multiplicazione

Abbiamo introdotto e caratterizzato secondo le loro prestazioni diversi tipi di modulazioni numeriche (digitali) in banda traslata; uno dei motivi per cui ha senso introdurle, come abbiamo già detto, è la cosiddetta 'multiplicazione', ossia la possibilità di condividere lo stesso canale fisico con più segnali. Questi segnali possono avere le più svariate caratteristiche: essere digitali o analogici, e se digitali avere diverso bitrate o formato di modulazione. Nell'etere avviene effettivamente ciò: l'aria è un mezzo di trasmissione per un immenso numero di segnali, di tipo fondamentalmente diverso: si trasmette infatti qualsiasi tipo di informazione in qualsiasi maniera, si pensi ai cellulari, alle onde radio, alle microonde.

Iniziamo a parlare di multiplicazione, introducendone quattro sostanziali tipologie:

1. Divisione di frequenza (FDM: Frequency Division Multiplexing): ad ogni segnale viene assegnata una certa posizione spettrale, ossia un certo range di frequenze che dovrà occupare. Questa porzione di spettro verrà utilizzata solo da quel segnale.
2. Divisione di tempo (TDM: Time Division Multiplexing): ad ogni flusso di bit viene assegnato un preciso slot temporale, ossia una frazione di tempo in cui solo lui viene emesso.
3. Divisione di codice (CDMA: Code Division Multiple Access): in questo caso il flusso di bit, oltre ad essere trasmesso in un preciso slot temporale, si ha una codifica dei vari flussi. Ciò permette la possibilità di trasmettere contemporaneamente diversi segnali, dal momento che in questa maniera la codifica permette di evitare fenomeni di interferenza, o quantomeno aggirarli. In questo ambito, si dice di avere a che fare con 'codici ortogonali'.

4. Divisione di spazio: divido lo spazio in diverse celle, e quindi poi si possono 'riciclare' le multiplazioni. Di fatto, come accenneremo tra non molto, il telefono cellulare si basa proprio sostanzialmente su di una divisione di spazio. In ogni territorio sono presenti delle celle; questo permette di comunicare alla stessa frequenza tra cellulare e cella, e le varie celle parleranno poi tra di loro mediante mezzi veloci quali la fibra ottica. Si suppone tuttavia che non molti cellulari siano collegati alla stessa cella, quindi scopo del gestore telefonico è quello di piazzare in posti 'tattici' ed in numero adeguato le celle telefoniche.

Riprenderemo brevemente in seguito tutto ciò che abbiamo appena detto al fine di introdurre alcuni dettagli.

Altra differenziazione da fare è in due modi in cui avviene il procedimento di 'multiplazione', due modi di fatto tra loro diversi:

- Multiplazione: si parla di multiplazione in senso stretto quando vario segnali si accentrano, arrivando mediante diversi canali, su di un dispositivo. I vari terminali del dispositivo sono quindi collegati ai canali, ed il dispositivo regola gli accessi. Un esempio banale di una multiplazione, nel vero senso della parola, è la centrale telefonica: all'interno di una centrale telefonica vi è un dispositivo che effettua la multiplazione, assegnando i vari terminali con modalità scelte a seconda della sua configurazione.
- Accesso Multiplo: parlando di accesso multiplo, si ha un certo numero di apparati che 'chiama' un 'centro cella', accedendo allo stesso canale fisico nello stesso istante temporale. Di fatto non vi è un dispositivo che gestisca la multiplazione, poichè non vi è un dispositivo in grado di gestire gli accessi al canale. Un esempio banale di accesso multiplo è sempre nella telefonia cellulare: quando diversi cellulari di persone ad esempio nella stessa piazza vengono utilizzati per telefonare, molti di essi chiameranno alla stessa 'cella', una sorta di periferica collegata a delle centrali, che metteranno in comunicazione con l'altro cellulare in questione.

Entriamo ora un po' più nel merito delle diverse multiplazioni, analizzando quelle principali.

12.1 FDM: Frequency Division Multiplexing

Come abbiamo già accennato, nella FDM, ad ogni segnale si assegna una precisa porzione di spettro. Si noti che talvolta parlando di segnali, in let-

teratura, in questo ambito, si parla anche di 'canali' (si noti che NON si sta parlando dei canali fisici, è solo un modo di dire che potrebbe risultare confusionario e per questo viene evidenziato).

Utilizzando una FDM in ambito di accesso multiplo, gli spettri dei vari segnali devono quantomeno essere tra di loro separati: se vi fosse infatti un'intersezione tra di essi, vi sarebbero fenomeni di interferenza, che potrebbero essere estremamente negativi per il nostro sistema di telecomunicazioni. Considerando ad esempio uno spettro a coseno rialzato, si avrebbe una cosa di questo tipo:

La condizione necessaria sarebbe:

$$f_{i,1} - f_{i,2} \geq D(1 + \rho)$$

Da qua, è possibile individuare il numero massimo di segnali che si possono trasmettere nel canale, nella banda B_{TOT} , ossia:

$$N_{max} = \frac{B_{TOT}}{\Delta f} \leq \frac{B_{TOT}}{D(1 + \rho)}$$

La FDM presenta vantaggi e svantaggi: premettendo che noi utilizziamo la modulazione soprattutto in ambito di modulazioni digitali, un vantaggio è che essa è l'unica che si potrebbe utilizzare anche in ambito di segnali analogici. Inoltre, non richiede un grosso sincronismo tra i segnali: l'unica condizione che deve essere tassativamente rispettata è il fatto che gli spettri siano separati; ciò come vedremo nella TDM non capita. In una trasmissione cellulare realizzata mediante FDM, tuttavia, serve che i vari telefoni 'conoscano' la frequenza di trasferimento in cui debbono funzionare, cosa che effettivamente potrebbe risultare molto poco 'versatile' e comoda. La mancanza di flessibilità di questo tipo di trasmissione ne è il grosso handicap: dal momento che la Δf in cui lavora il segnale è prefissata, bisognerebbe garantire una spaziatura per il bitrate più elevata possibile. Ciò implica il fatto che se utilizziamo lo stesso dispositivo cellulare per telefonare (traffico irrisorio), o per andare su internet e scaricare a 2 Mbit/s, dovremmo comunque avere la stessa banda (e ciò potrebbe essere un enorme problema per trasmissioni via etere, dove la banda non si può sprecare!).

Si ricordi: utilizzare l'occupazione di banda minima è una cosa a dir poco obbligatoria; il vincolo di dover sempre utilizzare la banda massima richiesta dal protocollo, comporterebbe di fatto un enorme spreco di banda, che rende questo tipo di modulazione, per come lo stiamo trattando, inutile.

12.2 TDM: Time Division Multiplexing

Per quanto riguarda la moltiplicazione a divisione di tempo, si fa qualcosa di fondamentalmente diverso: nella FDM ciò che era separato era lo spettro in frequenza, senza doversi preoccupare di fenomeni particolari al riguardo del tempo. Nel caso della TDM capita qualcosa di molto diverso: i trasmettitori possono trasmettere solo ed esclusivamente a istanti di tempo ben definiti, periodicamente. Possiamo subito immaginare un dettaglio tutt'altro che trascurabile: se il trasmettitore deve trasmettere solo a certi istanti di tempo, in tutti gli altri cosa possiamo fare? Mettiamo di dover effettuare una telefonata: dobbiamo parlare solo quando il trasmettitore funziona?! Non avrebbe senso. Per questo motivo, in modo da dare l'impressione di avere una conversazione 'continua', si trasmette 'tutto in un colpo', al momento della trasmissione, dopo aver introdotto in una memoria (una sorta di buffer) la conversazione.

Cerchiamo di rispiegare cosa capita:

a T_{x1} viene assegnato un certo time slot, a T_{x2} un altro time slot, e così via fino all' n -esimo, T_{xn} . Sostanzialmente, una volta che hanno 'parlato tutti', il ciclo riprende. Parlando di accesso multiplo, dunque, l'elemento critico sarà l'assegnazione del time slot. Esistono sostanzialmente due tipi di tecniche:

- Time slot preassegnati;
- Time slot non preassegnati: quando intendiamo trasmettere, comunicare, bisogna iniziare a comunicare indipendentemente dall'aver inizializzato la connessione, dopo di che il centro cella blocca una trasmissione, gestendo le altre.

Si noti che la prima soluzione non permette collisione, pur essendo molto poco flessibile; al contrario, la seconda implica la presenza di collisioni (cosa che capita nel protocollo ethernet).

Parliamo unicamente di slot preassegnati: nel TDM, per come è stato progettato, si ha bisogno di bit di controllo: la sequenza di bit trasmessi infatti è continua, e non si deve interrompere all'improvviso. I bit di controllo serviranno a determinare l'inizio e la fine del time slot, e/o della trama, ossia del periodo, del frame, del tempo che tutti i trasmettitori impiegano per 'parlare' una volta. Esistono ulteriori bit, utilizzati per la sincronizzazione o per l'invio di informazioni di controllo ai vari dispositivi collegati alla cella.

Questo tipo di metodo è molto flessibile: è infatti possibile trasmettere anche segnali con bitrate di fatto diversi; l'assegnazione può inoltre essere fatta mediante statistiche sui diversi tipi di dispositivi collegati. Di fatto inoltre non è possibile avere interferenza, poichè si trasmette di fatto in istanti

diversi, quindi in frequenza si ha a che fare con spettri che magari, fossero contemporaneamente presenti nella trasformata di Fourier, potrebbero anche intersecanti, ma che di fatto esistono in istanti di tempo diversi: quando un segnale è attivo gli altri sono disattivati, dunque si ha un solo spettro alla volta in frequenza.

Lo svantaggio di questo tipo di sistema è il seguente: dovendo dividere il tempo in trame e slot, introduciamo di fatto bit di controllo, inutili ai fini della trasmissione, generanti una ridondanza. Questo tipo di moltiplicazione, inoltre, non può essere usata con segnali analogici. Inoltre, il moltiplicatore deve avere una velocità di trasmissione molto più elevata rispetto a quello utilizzato nella FDM (dove l'unico vincolo era la separazione spettrale).

12.3 Applicazioni Pratiche: I Telefoni Cellulari

Descriviamo sommariamente, per dare l'idea degli sbocchi che hanno avuto le tecniche di moltiplicazione, le tre grandi generazioni di telefoni mobili.

1. TACS (Total Access Communication System): si utilizzava una modulazione analogica di frequenza FM; il canale di controllo, dal momento che si utilizzavano segnali analogici, era basato su di una moltiplicazione di frequenza FDM, da 890 a 900 MHz da mobile a base, e da 935 a 945 MHz tra base e mobile. Si utilizzava dunque una moltiplicazione con divisione di spazio, unita ad una FDM;
2. GSM (Group Special Mobile): si è passati sostanzialmente dall'analogico al digitale, utilizzando come modulazione una GMSK (si tratta di una sorta di BPSK con segnali a gaussiana, in modo da compattare lo spettro); per quanto riguarda le moltiplicazioni, si utilizzavano soprattutto TDM, FDM, e divisione a spazio. Ogni cellulare aveva assegnato un determinato slot per la trasmissione di dati; viene in seguito introdotto il GPRS, dove al posto di un solo slot si assegnano 5 o 6 slot per la trasmissione dati, avendo più tempo per trasmettere e così migliorando le prestazioni;
3. UMTS (Universal Mobile Telecommunication System): si usa sostanzialmente una QPSK utilizzando come codifica dei turbo-codici. La moltiplicazione è a divisione di spazio, ma anche a divisione di codice. Ulteriori informazioni si possono trovare sul sito www.3gpp.org.

Capitolo 13

Codifica di Sorgente

Se analizziamo un tipico sistema di trasmissione, sappiamo che vi è sostanzialmente una sorgente dati, discretizzata sia nelle ampiezze che nel dominio del tempo (ossia nei tempi in cui è non nulla). La codifica di sorgente è per l'appunto un codice, una codifica, in grado di comprimere il segnale, ossia ridurre il bitrate al prezzo di perdere informazioni non troppo importanti ai fini della ricostruzione (sull'importanza discuteremo in seguito). Ciò che vogliamo dunque è un codificatore tale per cui, sfruttando la ridondanza della sorgente, si ottenga una riduzione del bitrate.

Tutto si basa sull'eliminare un'ipotesi semplificativa che finora abbiamo sempre considerato valida: finora abbiamo infatti utilizzato sempre simboli equiprobabili, ossia sorgenti in grado di emettere tanti zeri quanti uni (detto in modo semplicistico), o comunque simboli in egual misura (in caso di trasmissioni multilivello). Si sappia che generalmente, quantomeno in molti casi di trasmissioni, quest'ipotesi non è verificata, e ciò permette di attuare alcuni ragionamenti in grado di ridurre il bitrate (come vedremo).

Oltre a codifica di sorgente si può parlare di codifica di canale (cosa sulla quale non ci soffermeremo): la codifica di canale è un codice a controllo di parità (ossia in grado di controllare il numero di bit a uno o a zero): questi codici sono in grado di rilevare ed eventualmente correggere l'informazione in caso di presenza di errori. Ciò si paga tuttavia con un aumento di bit da trasmettere, e quindi con un aumento del bitrate complessivo. Vantaggi della codifica di canale sono quindi la riduzione della probabilità di errore, grazie al riconoscimento/correzione degli errori; lo svantaggio è la conseguente crescita del bitrate. Si può dimostrare che:

$$\mathbb{P}_b \{e\} \simeq \alpha \mathbb{P}^n \{e\}_{\text{uncoded}}$$

Dove n è un intero maggiore di 1. Ciò che avviene parlando di codifica di canale, dunque, è il fatto che si ha una probabilità di errore più bassa

rispetto al caso uncoded. Il guadagno di codifica ovviamente dipende dal tipo di codice utilizzato; si sappia comunque che si può arrivare anche a 6 dB di guadagno. Si sappia comunque che questi codici vengono utilizzati soltanto in casi estremi, quando è necessaria un'enorme robustezza sul rumore, riuscendo così a demodulare segnali con addirittura rapporti segnale/rumore pari al 100%.

Abbiamo dato alcuni cenni sulla codifica di canale giusto per cultura generale; ciò che ci interessa trattare ora sarà tuttavia la già citata codifica di sorgente. Essa torna utile soprattutto nei segnali analogici, che poi dovranno essere trasdotti in digitali mediante la PCM, come ad esempio i segnali audio (Mp3), o video (Mpeg), o anche semplici files di testo. In cosa consiste l'idea di base dietro alla codifica di sorgente? Semplice: quando si ha una forte differenza tra le probabilità di invio, tra le probabilità di sorgente, si può scegliere una particolare codifica per i simboli trasmessi, in modo da migliorare le prestazioni del sistema. Possiamo dunque immaginare che sia utile quando gli eventi di trasmissione sono tutti equiprobabili, o già stati compressi! Ad esempio, 'zippare' due volte un file, è totalmente inutile, dal momento che la compressione è già stata effettuata, e quindi non si avran benefici di alcun tipo.

Proponiamo alcuni esempietti pratici veloci per far capire quanto sia utile tutto ciò che stiamo per presentare:

1. Consideriamo un video 1000x800 pixel a 65000 colori (16 bit/pixel), a 100 Hz di refresh. Il bitrate B_r sarà:

$$B_r = 1000 \cdot 800 \cdot 16 \cdot 100 = 1.28Gb/s$$

MpegII permette di ottenere una buona qualità con $6 \div 8$ Mbit/s, e quindi a comprimere il flusso di bit di circa 300 volte.

2. Audio digitalizzato per telefonini: da 300 Hz a 3400 Hz; utilizzando il criterio di Nyquist, la banda minima dovrà essere $2 \cdot 3400$ Hz $\simeq 6800$ Hz; per comodità si aumenta e si usano 8 kHz, sovracampionando. Servirebbero 64 kb/s, ma i GSM ne impiegano solo 13, poichè si ha una codifica di sorgente; Skype funziona pure meglio.

Prima cosa da fare è discriminare le codifiche di sorgente in due sostanziali tipologie:

- Codifiche di sorgente senza perdite
- Codifiche di sorgente con perdite

Cosa significa ciò? Nel caso senza perdite, dopo il decodificatore, si ricostruisce il segnale di partenza alla perfezione (un esempio è rappresentato dai formati di compressione di files, quali zip o arj); con perdite si perde invece informazione del segnale, ad esempio come nel caso degli Mp3 o degli MpegII, dove di fatto si ha un notevole guadagno in fatto di bitrate, al prezzo di abbassare la qualità.

Discuteremo soprattutto codifiche di sorgente senza perdite, ossia codifiche che si basano sulle caratteristiche statistiche della sorgente. Prima di parlare in senso più pratico di codifiche di sorgente, necessitiamo di un'introduzione teorica su ciò che stiamo per utilizzare.

13.1 Teoria dell'Informazione

Consideriamo come ipotesi la seguente: data una sorgente digitale, in cui in ogni intervallo di tempo viene inserito un certo simbolo preso da un insieme di M simboli, che indichiamo con X , tale per cui:

$$X = \{x_1; x_2; \dots; x_M\}$$

I simboli sono non equiprobabili; ogni simbolo avrà una determinata probabilità di essere trasmesso pari a p_i , definita come:

$$p_i \triangleq \mathbb{P}\{x_i\}$$

Supponiamo, come ipotesi semplificativa, che i simboli siano statisticamente indipendenti; non sempre questa è un'ipotesi sensata, tuttavia ci semplifica notevolmente la vita, quindi conviene considerarla, in questo primo studio, verificata. Si dice che si parla di 'sorgenti senza memoria': la trasmissione di un simbolo in un dato momento, in un dato istante, non dipende da ciò che è stato precedentemente trasmesso.

Sfruttiamo l'ipotesi di non-equiprobabilità, nel seguente modo: codificando i simboli più probabili con una codifica di numeri binari più corta, ossia con meno 'digit', quelli più probabili saranno codificati al contrario con una sequenza di digit più lunga. Si parla di digit e non più di bit, come mai? C'è un motivo ben preciso: il bit, nella teoria che stiamo introducendo, ha un significato ben preciso, che in effetti applicando la teoria a ciò che abbiamo sinora visto coincide con il significato di digit; ora stiamo generalizzando il tutto, quindi nasce un'effettiva differenza tra i due concetti, come diremo. L'introduzione di questa codifica a lunghezza variabile, come abbiamo anticipato, ci permetterà di variare il bitrate. Prima avevamo sostanzialmente che:

$$nbit = \lceil \log_2(M) \rceil$$

Questo era vero, in una codifica a lunghezza fissa; si aveva inoltre prima un simbolo ogni T_m secondi; si sarebbe potuto definire il digirate come:

$$\text{vel} \{Tx\} = ndigit \cdot \frac{1}{T_m} = \frac{\lceil \log_2(M) \rceil}{T_m}$$

Presentiamo alcune definizioni, al fine di meglio comprendere ciò che stiamo facendo, e formalizzare il tutto.

13.1.1 Quantità di informazione

Si definisce 'quantità di informazione' del simbolo x_i , $\mathcal{I}[x_i]$, come:

$$\mathcal{I}[x_i] = \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \right)$$

Ossia il logaritmo in base 2 del reciproco della probabilità di trasmissione del simbolo, p_i ; la misura di questo tipo di grandezza, è il bit. In altre parole, i bit in realtà sono una misura della quantità di informazione contenuta in un simbolo. Più un evento ha probabilità bassa di presentarsi, di essere trasmesso, e più conterrà informazione. Possiamo intuitivamente pensare infatti che un evento molto frequente non ci dica molto: essendo 'abituati' a riceverlo, possiamo immaginare che esso contenga poche informazioni utili. Al contrario, molto più 'interessante' è un evento raro, poichè, avvenendo 'meno frequentemente', risulta contenere informazioni più utili, poichè meno presenti nel segnale ricevuto. Vediamo se la teoria finora utilizzata funziona, su di un caso a noi ben noto: una sorgente binaria equiprobabile.

In una sorgente binaria equiprobabile, si ha:

$$X = \{x_1; x_2\}$$

$$p_1 = p_2 = 0,5$$

La quantità di informazione trasportata ad esempio da x_1 (che sarà ovviamente uguale a quella di x_2), sarà:

$$\mathcal{I}[x_1] = \log_2 \left(\frac{1}{0,5} \right) = \log_2(2) = 1$$

Oh, ma cosa abbiamo trovato? Tutto ciò che abbiamo detto finora è giusto! Abbiamo infatti sempre utilizzato sorgenti equiprobabili, e abbiamo

sempre parlato di 'bit'; abbiamo appena dimostrato di non aver preso, in questo senso, una cantonata, dal momento che effettivamente, in questo caso, un digit corrisponde ad un bit.

Piccola nota 'confermativa': avendo un y_i la cui $p_i = 1$, abbiamo che:

$$\mathcal{I}[y_i] = 0$$

Ma ciò è intuitivamente ovvio! Avendo un evento certo, siamo sicuri che esso avverrà sempre, ma dunque esso non ci porterà informazione, poichè un evento a probabilità 1 è un evento determinato, e quindi a noi perfettamente noto.

13.1.2 Entropia

Si definisce un'ulteriore quantità, detta 'entropia' $\mathcal{H}[x]$, come:

$$\mathcal{H}[x] \triangleq \mathbb{E}[\mathcal{I}[x_i]] = \sum_{i=1}^M p_i \cdot \log_2 \left(\frac{1}{p_i} \right)$$

L'unità di misura dell'entropia è bit/simbolo; ricordiamo che i bit misurano la quantità di informazione, mentre i digit sono i numeri binari utilizzati per la codifica del simbolo. Consideriamo un esempio pratico: dati due simboli in generale, ad esempio:

$$X = \{x_1; x_2\}$$

Data p la probabilità di uno dei due, si ha:

$$\mathbb{P}\{x_1\} = p; \mathbb{P}\{x_2\} = 1 - p$$

Possiamo calcolare l'entropia come:

$$\mathcal{H}[X] = p \log_2 \left(\frac{1}{p} \right) + (1 - p) \log_2 \left(\frac{1}{1 - p} \right)$$

Volendo rappresentare graficamente un grafico dell'entropia in funzione della probabilità p da noi definita, avremmo una curva di questo genere:

L'entropia della sorgente è massima per $p = 0,5$, ossia per il caso di sorgenti equiprobabili! Abbiamo trovato questo risultato, ma si sappia che esso è vero in assoluto, anche se noi lo abbiamo ricavato solo per un caso specifico: l'entropia è sempre massimizzata per simboli equiprobabili, anche quando si parla di costellazioni generiche a M elementi. Detto in un altro modo, quando p_i , probabilità del simbolo, è pari a:

$$p_i = \frac{1}{M}$$

Allora l'entropia del sistema è massima. Si noti che se parliamo di sorgenti equiprobabili, parlare di digit e di bit coincide nel modo più assoluto; noi comunque, per essere formali, dovremmo, d'ora in avanti, parlare di digit.

In generale il valore massimo di entropia, come vediamo dal grafico, si ha per eventi equiprobabili, ossia proprio per quei valori di probabilità degli eventi tali per cui si abbia una sorgente equiprobabile. Possiamo immaginare, vedendo la formula, che sia vera la seguente disuguaglianza:

$$\mathcal{H}[X] \leq \log_2(M)$$

13.1.3 Lunghezza media di codifica

Per lunghezza media di codifica si intende la media di insieme della lunghezza di codifica di ogni simbolo. Si definisce dunque la grandezza \bar{n} come:

$$\bar{n} = \mathbb{E}[n_i] = \sum_{i=1}^M n_i p_i$$

Mediante la lunghezza media, è possibile calcolare la velocità in uscita dal codificatore di sorgente:

$$\text{vel}\{source\} = \frac{\bar{n}}{T_m}$$

Essa si misura in digit/s, ed è, volendo, un'estensione del bitrate: il digitrate. Spesso capiterà una cosa di questo tipo:

$$\bar{n}|_{fissa} = \lceil \log_2(M) \rceil \geq \bar{n}|_{lung.variabile}$$

In altre parole, capiterà (quasi) sempre che la lunghezza media a codifica fissa, ossia sempre con ogni simbolo codificato con lo stesso numero di cifre, indipendentemente dalle sue caratteristiche (in questo caso statistiche), sarà maggiore della lunghezza media a codifica variabile, scelta in modo idoneo a seconda delle caratteristiche (statistiche, per quanto ci riguarda) del segnale, dei simboli trasmessi.

Si introduce, per quantificare la bontà del codice utilizzato, l'efficienza di codice come il rapporto tra entropia della sorgente e della lunghezza media della codifica:

$$\varepsilon \triangleq \frac{\mathcal{H}[X]}{\bar{n}}$$

Si noti che finora abbiamo parlato di sorgenti semplici, ossia binarie, con solo due elementi; è possibile realizzare sorgenti composte, ossia sorgenti costituite dalle combinazioni di quei due simboli; cerchiamo di spiegarci meglio, mediante il seguente esempio. Data la sorgente X così definita:

$$X = \{A; B\}$$

Si potrebbe utilizzare questa sorgente inventandone una nuova, a partire da questa, utilizzando le combinazioni dei due elementi:

$$X' = \{AA; AB; BA; BB\}$$

In questo caso, si avrebbe una sorgente composta di ordine 2, poichè abbiamo simboli solo composti da 2 dei simboli fondamentali.

Fatta questa dovuta premessa, la nozione di efficienza di codice si può estendere a una generica sorgente di ordine k , come:

$$\varepsilon \triangleq \frac{\mathcal{H}[X^k]}{\bar{n}} = \frac{k \cdot \mathcal{H}[X]}{\bar{n}}$$

Questo passaggio è giusto dal momento che l'entropia viene definita mediante una grandezza logaritmica, quindi la dimostrazione consiste semplicemente nell'andare a rivedere la formula, e le proprietà dei logaritmi!

13.1.4 Risultato fondamentale della teoria dell'informazione

Il risultato fondamentale della teoria dell'informazione, una volta presentate tutte le definizioni introduttive, è il seguente:

$$\bar{n} \geq \mathcal{H}[X]$$

Questo è verificabile per qualsiasi codifica scegliibile; indipendentemente dalla sorgente, inoltre, esiste una lunghezza ottima tale per cui si verifica la doppia disuguaglianza:

$$\mathcal{H}[X] \leq \bar{n} \leq \mathcal{H}[X] + 1$$

Questo risultato è molto interessante perchè ci permette di comprendere i limiti della codifica: sappiamo infatti quanto distiamo, di fatto, dal limite teorico. Conoscendo il limite teorico, cercare un altro limite cambiando codifica è inutile. Possiamo infatti vedere facilmente che:

$$\varepsilon \triangleq \frac{\mathcal{H}[X]}{\bar{n}}$$

Dal momento che \bar{n} è minorabile con $\mathcal{H}[x]$, si ha che $\varepsilon_{max} = 1$.

Supponiamo ora in un esempio di riprendere in mano la nostra amica d'infanzia, la sorgente equiprobabile. La lunghezza media vale, banalmente:

$$\bar{n} = \lceil \log_2(M) \rceil$$

L'entropia:

$$\mathcal{H}[X] = \log_2(M)$$

L'efficienza del codice, per M multiplo di 2, vale sempre e comunque 1, è cioè massima. Ciò che significa questo fatto è il fatto che, con sorgente equiprobabile, non è possibile far di meglio della codifica a lunghezza fisica, poichè la sua efficienza di codice è di fatto già massima.

13.2 Codifica di Huffman

Abbiamo finora introdotto tanta teoria, vorremmo ora vederla un po' in pratica, e capire a cosa serve. Quello che ci interessa è ridurre il digirate, quindi comprimere, ma vorremmo evitare di utilizzare simboli di controllo, come per esempio digit di demarcazione (poichè aumenterebbero il bitrate, e quindi la velocità di trasmissione richiesta per trasmettere correttamente il segnale).

Purtroppo inventare una codifica non è cosa facile: abbiamo infatti dei vincoli sulla codifica di questi simboli. Consideriamo in un esempio pratico, una cosa di questo tipo; data una sorgente di 4 simboli, A, B, C, D , scegliamo di codificarli nel seguente modo:

$$A = 0; B = 01; C = 10; D = 1$$

Vogliamo a questo punto trasmettere una data sequenza, per esempio A, B, B, C, A ; trasmetteremo dunque:

$$0, 01, 01, 10, 0$$

Si noti che qua son state inserite le , per chiarezza, in realtà non esistono demarcatori, poichè aumenterebbero il digirate. Si noti che purtroppo questo tipo di codifica non è interpretabile univocamente: possiamo non essere in grado di risalire, tramite la ricezione di questi digit, ai simboli.

Per evitare questo tipo di problemi, sarà necessario introdurre una qualche idea in grado di permetterci di 'fare i furbi', e di creare una codifica in grado di riconoscere univocamente il flusso di bit ricevuto. Un'idea potrebbe

essere quella di sfruttare la cosiddetta 'regola del prefisso': se si fa in modo che nessuna codifica possa essere il prefisso della codifica di un altro simbolo, riconosciamo univocamente il simbolo a partire dalle sequenze, che non possono essere interpretate in maniera dubbia!

Riprendiamo la nostra sorgente di quattro simboli, ma assegnamo una codifica di tipo diverso:

$$A = 0; B = 10; C = 110; D = 111$$

Vediamo di trasmettere la stessa sequenza di prima, che sarà:

$$0, 10, 10, 110, 0$$

Cosa capita? L'unico simbolo che incomincia per 0 è A , quindi abbiamo identificato senza incertezze il primo simbolo; leggiamo dopo un 1: a questo punto potremmo avere un B , un C , o un D , quindi dobbiamo andare avanti a leggere. Subito dopo il 1 leggiamo lo 0, quindi abbiamo identificato univocamente una B . Dopo leggiamo nuovamente un 1, allora possiamo avere il dubbio tra B , C , D . Andiamo avanti, e leggiamo un altro 1, che restringe il campo tra C e D ; andiamo ulteriormente avanti trovando uno 0, che ci spinge direttamente verso la C . L'ultimo 0 sarà legato ad una A .

Se chi trasmette e riceve conosce questo tipo di legge, la decodifica sarà un problema del tutto banale.

Potremmo chiederci come fare ad assegnare in modo semplice ed immediato una codifica intelligente come questa; a rispondere a questo tipo di esigenza ci pensò Huffman, che propose la Codifica di Huffman, ossia un metodo algoritmico in grado di codificare una costellazione secondo la regola del prefisso. Esso consiste dei seguenti passi:

1. Ordinare i simboli secondo la loro probabilità, in ordine decrescente, ossia dalla più grande alle più piccola;
2. Raggruppare i due simboli a probabilità più bassa, e considerarli come un unico simbolo;
3. Ripetere il punto 2 fino a quando non si han raggruppato tutti i simboli;
4. Assegnare i digit ai vari gruppi.

13.2.1 Esempio Pratico

Applichiamo la Codifica di Huffman, e cerchiamo di renderci conto della sua efficacia. Proponiamo la seguente costellazione, con le probabilità relative a ciascun simbolo:

Avendo un \bar{n} tale da avere codifica fissa, servirebbero tre digit: avendo 5 simboli, $\lceil \log_2(5) \rceil = 3$. Calcoliamo l'entropia, e vediamo:

$$\mathcal{H}[X] = \sum_{i=1}^5 p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = 1,29$$

Abbiamo bisogno di 1,29 digit a simbolo (mediamente).

Applichiamo l'algoritmo di Huffman, e otteniamo:

Questi sono i raggruppamenti ottenuti; su ciascun ramo a questo punto forniamo un digit. Conviene (consiglio professionale ma non errato il contrario) dare sempre la stessa codifica, per esempio '0' in alto e '1' in basso; per far ciò, si parte dall'estrema destra, e si cerca di raggiungere il simbolo.

Da questo processo, si otterrà una codifica del tipo:

Vediamo subito a occhio che la regola del prefisso è stata certo rispettata, e quindi comunque abbiamo ottenuto una codifica univocamente interpretabile. Il simbolo a probabilità più bassa, inoltre, ha la codifica più lunga, come ci potremmo aspettare.

Calcoliamo ora la lunghezza media della codifica, e vediamo cosa abbiamo ottenuto:

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^5 p_i n_i = 0,4 + 0,15 + 0,16 + 0,04 + 0,07 = 1,45$$

Questi sono digit al simbolo. Vediamo che abbiamo meno della metà della larghezza di codifica di prima. L'efficienza di codifica sarà abbastanza elevata:

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{H}[X]}{\bar{n}} = \frac{1,29}{1,45} = 89\%$$

Possiamo inoltre calcolare il fattore di compressione, come:

$$1 - \frac{1,45}{3} = 0,516 \simeq 56\%$$

Qual è il vantaggio che abbiamo dunque ricavato in tutto ciò? Se la sorgente ha un rate di emissione dei simboli pari a circa 1 kbaud, il digitrate B_r nel caso della codifica a lunghezza fisica varrebbe 3 kdigit/s; nel caso di codifica a lunghezza variabile, ottenuta mediante procedimento di Huffman, avremmo circa:

$$B_r|_{Huffman} = \bar{n}|_{Huffman} \cdot D = 1,45 \text{ kdigit/s}$$

Abbiamo più che dimezzato il bitrate, ottenendo quindi un risultato eccellente rispetto ai nostri fini!