Antenne e Propagazione

Alberto Tibaldi

10 febbraio 2011

Indice

Capitolo 1

Introduzione e nozioni preliminari

1.1 Introduzione alle antenne

In questo primo capitolo della trattazione verranno sostanzialmente fornite alcune nozioni preliminari per lo studio e il progetto delle antenne. Prima di tutto, può essere una buona idea quella di introdurre una classificazione per le antenne, in modo da sapere di che cosa si parla. Si possono sostanzialmente identificare tre categorie di antenne:

- antenne a filo, ossia antenne in 1 dimensione (costituite da fili che poi ovviamente potrebbero anche essere attorcigliati); la antenne di questo tipo funzionano solo se le loro dimensioni sono più piccole delle lunghezze d'onda del segnale che si intende considerare, dunque le lunghezze d'onda che possono gestire sono molto ridotte (essendo il filo sottile). Queste antenne dunque tendenzialmente vengono utilizzate al di sotto di 1 GHz di frequenza;

- antenne ad apertura: si tratta di antenne bidimensionali, che però sono, al contrario delle antenne precedenti, meglio funzionanti con dimensioni maggiori rispetto alla λ del segnale considerato; generalmente, per frequenze maggiori di 1 GHz, si usano antenne di questo tipo;

- antenne a schiera: un'antenna a schiera è costituita da un insieme di antenne dei tipi precedenti, disposte nello spazio in modo opportuno.

Questa classificazione verrà ripresa al momento di iniziare a trattare l'argomento "antenne". Un'antenna è un sottosistema che fa da interfaccia tra i circuiti e lo spazio: trasforma l'energia elettromagnetica guidata all'interno di circuiti in energia che si può propagare nello spazio libero: si passa dal parlare di tensioni, correnti, potenze, al parlare dei vettori campo elettrico ($\underline{\mathcal{E}}$), campo magnetico ($\underline{\mathcal{H}}$), di Poynting ($\underline{\mathcal{S}}$), i cui significati fisici sono collegati a quelli delle suddette grandezze.

1.2 Equazioni fondamentali

Tutta la trattazione parte dalle equazioni di Maxwell, nella fattispecie dalle due equazioni del rotore, e dalle due equazioni della divergenza:

$$\nabla \times \underline{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \underline{\mathcal{B}}}{\partial t} - \underline{\mathcal{M}}$$

$$\nabla \times \underline{\mathcal{H}} = \frac{\partial \underline{\mathcal{D}}}{\partial t} + \underline{\mathcal{J}}$$

Si ha a che fare con 6 incognite: il campo elettrico, il campo magnetico, lo spostamento dielettrico, l'induzione magnetica, le densità di corrente magnetica $\underline{\mathcal{M}}$ ed elettrica $\underline{\mathcal{J}}$. Allo stesso modo, le equazioni della divergenza sono:

$$\nabla \cdot \underline{\mathcal{B}} = \varrho_{\mathrm{m}}$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathcal{D}} = \varrho_{\mathrm{e}}$$

Come si vede si hanno dei termini noti anche per quanto riguarda cariche elettriche e cariche magnetiche; fisicamente, come noto, queste cose non esistono. Torna molto utile avere comunque questi termini quando si ha a che fare con il teorema di equivalenza: esso permette di rappresentare strutture complicate, come un anello (spira) di corrente elettrica, mediante un dipolo magnetico, cosa estremamente comoda. Si noti che si ha un principio di dualità: le varie grandezze sono duali tra loro:

$$-\underline{\mathcal{B}} \Longleftrightarrow \underline{\mathcal{D}} \quad -\underline{\mathcal{M}} \Longleftrightarrow \underline{\mathcal{J}}$$

Questa è una specie di legge di Ohm: come si ha $V = RI$, e $I = GV$, è possibile trovare una dualità.

Si è parlato per ora di equazioni di Maxwell, ma non di condizioni al contorno: essendo esse equazioni differenziali, hanno ∞ soluzioni. Per poter ottenere una soluzione unica per il problema, è necessario utilizzare le seguenti condizioni al contorno:

$$\hat{\mathrm{n}} \times (\underline{\mathcal{H}}_2 - \underline{\mathcal{H}}_1) = \underline{\mathcal{J}}_{\mathrm{s}}$$

$$(\underline{\mathcal{E}}_2 - \underline{\mathcal{E}}_1) \times \hat{\mathrm{n}} = \underline{\mathcal{M}}_{\mathrm{s}}$$

Ne esistono altre due in realtà, che però non utilizzeremo in questa trattazione.

Tutte le grandezze scritte finora (campo elettrico, magnetico e simili) sono state scritte in modo calligrafico; ciò sottointende il fatto di aver a che fare con grandezze istantanee, ossia variabili nel tempo. L'approccio ingegneristico più utilizzato è invece basato sull'uso dei fasori; ciò che facciamo dunque è introdurre alcune ipotesi semplificative:

- si considera solo il regime sinusoidale, con ingressi monocromatici;
- si considerano mezzi omogenei e isotropi, ossia ε e μ sono termini scalari.

In queste situazioni, le equazioni di Maxwell nel dominio dei fasori diventano:

$$\nabla \times \underline{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\underline{H} - \underline{M}$$

$$\nabla \times \underline{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{E} + \underline{J}$$

$$\nabla \cdot \underline{H} = \frac{\varrho_{\mathrm{m}}}{\mu}$$

$$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{\varrho_{\mathrm{e}}}{\varepsilon}$$

Dove ε è la permettività del mezzo, μ la permeabilità del mezzo.

Una nota: la μ è stata fissata mediante una convenzione: c'è una teoria metrologica che ha portato alla scelta delle attuali ε e μ; l'unica cosa nota, infatti, è che

$$\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \mathrm{c}$$

Si è giunti a concordare, nel sistema MKS normalizzato:

$$\mu = 4\pi 10^{-7}\mathrm{H/m}$$

A partire da ciò e dalla misura di c, è stato dunque possibile determinare:

$$\varepsilon \sim 8,86\mathrm{pF/m}$$

Sostituendo l'espressione del campo elettrico in quella del campo magnetico o viceversa, è possibile ricavare le equazioni d'onda, che sono, come noto dai corsi di Campi Elettromagnetici, funzione di una certa costante k, detta "costante di propagazione". Le equazioni d'onda possono ricordare le equazioni delle linee di trasmissione. Per questo motivo, si vuole parlare un attimo di k: essa rappresenta sostanzialmente qualcosa di vicino ad una "pulsazione spaziale", dunque si può dire che il "periodo spaziale" (o, come meglio noto, "lunghezza d'onda"), sia:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Questa è, considerando una grandezza istantanea e fissando un certo tempo (per esempio $t = 0$), la distanza tra due picchi dell'onda. Essa è anche legata alla frequenza dalla seguente relazione:

$$\lambda = \frac{\mathrm{c}}{f}$$

1.3 Problema dell'irradiazione

Si vuole a questo punto fornire alcuni dettagli fondamentali per lo studio del problema dell'irradiazione. Il risultato finale, che verrà da noi utilizzato, è il seguente:

$$\underline{E}(P) = -\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\int_V \underline{J}_{\mathrm{t}}(P)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\underline{r}'\cdot\hat{R}}\mathrm{d}V$$

Si può vedere un termine immaginario, dunque un termine che varia l'ampiezza in funzione di R secondo la prima potenza al denominatore, e un esponenziale complesso funzione di R sempre; questo termine è un'onda sferica (il termine esponenziale su R), con una proprietà particolare: il fatto che esso sia alla prima potenza garantisce la conservazione dell'energia. Ciò che permette lo studio dell'energia in un campo elettromagnetico è il ben noto teorema di Poynting, basato sullo studio del vettore di Poynting; il vettore di Poynting nel dominio dei fasori è definito come:

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}^*$$

In nostro favore interviene però, a grande distanza, la relazione di impedenza, propria delle onde piane:

$$\underline{H} = \frac{1}{Z_0}\hat{\mathrm{n}} \times \underline{E}$$

Se dunque $\underline{E}$ decresce con la prima potenza della distanza, anche $\underline{H}$ lo farà; il prodotto dei due, ossia il vettore di Poynting, decrescerà dunque con la seconda potenza, ottenendo dunque la conservazione dell'energia: ciascuna sfera cresce con il quadrato del raggio, la potenza decresce con essa, dunque l'energia, data dall'integrale di superficie del teorema di Poynting, finisce per conservarsi.

Studiamo un po' meglio questo risultato: si consideri la seguente situazione

Si stabilisce, in un certo punto dello spazio (non per forza all'interno del volume che confina le cariche ma di solito sì), un'origine O del sistema di riferimento. Il vettore $\underline{r}'$ sarebbe il vettore che congiunge l'appena definita origine con una delle sorgenti. $\underline{R}$ è un vettore fisso, nel senso che è il vettore che congiunge l'origine del sistema di riferimento a un preciso punto, il punto di osservazione (o punto potenziato); $\underline{r}'$ al contrario non è un vettore costante, dal momento che esso dipende sostanzialmente dalla sorgente considerata. Si può vedere, mediante la costruzione geometrica appena vista, che:

$$\underline{R} = \underline{r}' + \underline{r}$$

dunque

$$\underline{r} = \underline{R} - \underline{r}'$$

Ogni volta che si considera una sorgente diversa, si cambia $\underline{r}'$; questo significa che, se passo da un certo $\underline{r}'$ a un altro, quello che ottengo è, rispetto $\underline{r}'$, una differenza pari a $\underline{r}' \cdot \underline{R}$, ossia alla proiezione di questo nuovo vettore su $\underline{R}$.

Si è detto che siamo in condizioni di campo lontano, ma cosa significa esattamente questo ? Esistono in realtà più condizioni, che determinano l'essere in campo lontano. La prima è la cosiddetta "condizione di Fraunhofer":

$$r > \frac{2D^2}{\lambda}$$

Dove D rappresenta la massima direzione del volume che confina le sorgenti. Esiste però una seconda condizione:

$$r > 3 \div 10\lambda$$

solitamente si utilizza 3λ ma a seconda della precisione che si vuole ottenere è possibile utilizzare anche numeri più grandi.

La formula dell'integrale di irradiazione prima proposta deriva dalla seguente formula esatta, data l'applicazione delle varie approssimazioni:

$$\underline{E}(\underline{P}) = -\mathrm{j}\omega\mu \int_V \underline{\underline{G}}(\underline{P} - \underline{P}') \cdot \underline{J}_{\mathrm{eq}}(\underline{P}')\mathrm{d}V$$

dove P è il punto di osservazione, ossia un punto fisso, e P' il punto che indica la sorgente. $\underline{\underline{G}}$ è la funzione diadica di Green, ossia un operatore rappresentabile mediante una matrice, che opera in una certa maniera. Nella fattispecie, una diadica è, dati due vettori $\underline{A}$ e $\underline{B}$ non paralleli, un operatore che, se applicato al vettore $\underline{A}$, possa modificarne, oltre al modulo, anche la direzione. La matrice che rappresenta la $\underline{\underline{G}}$ sarà dunque la seguente:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_r \\ J_\vartheta \\ J_\varphi \end{bmatrix}$$

Dove il termine A va secondo $\frac{1}{k_0 r}$ (o infinitesimi di ordine pure maggiore), mentre B è simile a $1 + \frac{1}{k_0 r} + ...$ Se si considerano valori di r, ossia distanze, molto elevate, si avrà che $A \to 0$, $B \to 1$. Ciò permette di vedere che, sapendo che

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

se voglio che

$$\frac{2\pi}{\lambda} r \gg 1$$

allora devo chiedere che:

$$\frac{r}{\lambda} \gg \frac{1}{2\pi}$$

Questo sarebbe in realtà sufficiente per mettere a posto il termine di ampiezza, ossia il termine che va come R^{-1}: è possibile ridurre arbitrariamente l'errore. Al contrario, non è possibile fare la stessa cosa per quanto concerne la fase: purtroppo infatti, oltre a esserci il termine R^{-1}, si ha anche il termine esponenziale che modifica la fase, e in questo caso i ragionamenti non valgono. Rivediamo un attimo un'espressione:

$$\underline{E}(P) = -\frac{\mathrm{j}Z_0}{2\lambda} \int_V \underline{J}_{\mathrm{eq}}(P') \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r} \mathrm{d}V$$

Ricordando che un integrale è sostanzialmente una somma di un insieme più che numerabile di valori, si può pensare che il campo sia dato dalla somma di infinite onde sferiche elementari: questo è sostanzialmente simile al principio di Huygens-Fresnel, asserente il fatto che un'onda (in qualsiasi contesto: acustica, elettromagnetica) si può pensare come sovrapposizione di un insieme di onde sferiche "elementari".

A distanza ancora maggiore, gli r sono tali da avere il vettore $\underline{r}$ parallelo a $\underline{R}$; per il caso dell'esponenziale, dunque, è possibile scrivere:

$$r = R - \underline{r}' \cdot \hat{R}$$

Ciò permette di portare fuori il termine R^{-1}, che sostituisce r^{-1}, dall'integrale, risolvendo così la questione "ampiezza", ma lasciando in ballo la questione "fase": se sotto il punto di vista del r^{-1} la fase varia esattamente come atteso, per quanto riguarda l'esponenziale complesso le cose non son così semplici; si fa un esempio: se si ha che $r = 0,001$, e si ha che una lunghezza di 500 λ e si ha una variazione di $1/1000$ tra i due vettori, allora si ha una variazione all'esponenziale di $500/1000$ che è pari a $\frac{1}{2}$: enorme. Il problema sarà determinare J_{eq} o J_{T}: esse possono avere espressioni anche molto complicate.

1.3.1 Dipolo elettrico

Si vuole presentare a questo punto un esempio di radiatore: il dipolo elettrico. Dai calcoli si può dimostrare che esso irradia nella seguente maniera:

$$\underline{E} = -\frac{\mathrm{j}Z_0}{2\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}M\sin\vartheta\hat{\vartheta}$$

$$\underline{H} = -\frac{\mathrm{j}M}{2\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\sin\vartheta\hat{\varphi}$$

Questo è un radiatore **omnidirezionale**, che non vuol dire **isotropo**: isotropo è un radiatore che irradia nella stessa maniera in ogni direzione, nello spazio tridimensionale, su 4π steradianti; omnidirezionale significa che irradia nella stessa maniera su tutto il piano, su 2π radianti. Non è possibile avere un radiatore isotropico ideale, è possibile fare qualcosa di quasi ideale. Nella pratica, un dipolo elettrico è un elemento di corrente lungo un filo di lunghezza l molto piccola rispetto alla lunghezza d'onda λ. Avere ciò nella pratica non è possibile. Si dovrebbe inoltre avere qualcosa di questo genere:

Ciò che si vorrebbe avere è un qualcosa che distribuisca uniformemente l'energia sul proprio piano, ma ciò non fa questa cosa, bensì ha una distribuzione di tipo triangolare, ben diversa da quella attesa. Questo accade perchè la linea lunga l, allargata in modo da realizzare l'antenna, avrà una corrente circa come quella di prima. Se si mettesse in fondo una capacità, non si avrebbe più un aperto.

Per realizzare qualcosa di simile a ciò, è necessario mettere delle capacità:

Si noti che si ha a che fare con M, ossia il "momento" del dipolo. Esso è definito come il prodotto corrente per lunghezza del filo, l

1.3.2 Dipolo magnetico

Dualmente al dipolo elettrico si potrebbe parlare del dipolo magnetico: un qualcosa di duale al dipolo elettrico, dove però c'è da tenere conto del fatto che la corrente magnetica non esiste. Un dipolo magnetico può essere realizzato mediante una spira di corrente elettrica: le variazioni di corrente su questo anello corrisponderebbero a variazioni del campo magnetico in un ipotetico dipolo magnetico.

1.4 Teorema di equivalenza

Come visto in precedenza, tutti gli integrali concernenti la soluzione del problema dell'irradiazione sono integrali di volume; come noto dall'Analisi Matematica, gli integrali di volume sono piuttosto complicati da risolvere, dunque sarebbe buona cosa ridurre le dimensioni degli integrali, in maniera di avere qualcosa di più semplice da calcolare. Ciò che ci permette di migliorare la nostra situazione è il cosiddetto "teorema di equivalenza": un teorema in grado di ricondurre un integrale di volume a un integrale di superficie.

Si consideri il seguente volume:

Si ha una superficie di suddivisione tra due volumi, senza che essa rappresenti per forza una variazione di mezzo propagativo. All'interno del mezzo sono contenute delle sorgenti, tali per cui si possa avere generazione di campo elettromagnetico sia all'interno sia all'esterno del volume V racchiuso dalla superficie. Si hanno dunque le condizioni al contorno:

$$(\underline{E}_1 - \underline{E}_2) \times \hat{\mathrm{n}} = 0$$

$$\hat{\mathrm{n}} \times (\underline{H}_1 - \underline{H}_2) = 0$$

queste valgono a maggior ragione dal momento che non si hanno discontinuità. A questo punto, introduco delle nuove sorgenti, all'interno della superficie, modificando le topografie di campo interne a essa. Al posto di $\underline{E}_1$ e $\underline{H}_1$ avrò $\underline{E}'_1$ e $\underline{H}'_1$. Esternamente alla superficie voglio avere però lo stesso campo, dunque introdurrò altre sorgenti, nella fattispecie correnti elettriche e magnetiche sulla superficie, atte a compensare la differenza tra le topografie risultanti e avere in sostanza fuori dal volume lo stesso campo elettromagnetico di prima. Si avrà dunque, come nuova condizione al contorno:

$$(\underline{E}'_1 - \underline{E}_2) \times \hat{\mathrm{n}} = -\underline{M}_{\mathrm{S}}$$

$$\hat{\mathrm{n}} \times (\underline{H}'_1 - \underline{H}_2) = -\underline{J}_{\mathrm{S}}$$

Questa cosa ci permette di avere diverse topografie di campo all'interno del volume. Supponiamo che, all'interno del volume, dal momento che la topografia interna al volume può a questo punto essere arbitraria (tanto ciò che capita esternamente verrà compensato dalle correnti superficiali), di avere una topografia di campo elettrico e magnetico nulla: che dentro alla superficie, dunque non vi sia campo elettromagnetico. Ciò permette di avere le seguenti equazioni come condizioni al contorno:

$$\underline{E}_2 \times \hat{\mathrm{n}} = \underline{M}_{\mathrm{S}}$$

$$\hat{\mathrm{n}} \times \underline{H}_2 \underline{J}_{\mathrm{S}}$$

Ottenendo qualcosa di questo genere:

In questo modo all'interno del volume non dobbiamo più preoccuparci del campo elettromagnetico, e considerare al posto di esso delle correnti magnetiche o elettriche: questa è l'idea del teorema di equivalenza. Concettualmente questa cosa potrebbe ricordare il teorema di Thèvenin dell'elettrotecnica: riconduciamo, invece che il circuito, il problema elettromagnetico, a una forma più facile da studiare: invece che avere campo elettrico interno alla superficie, abbiamo semplicemente delle correnti superficiali, dunque ciò che dovremo fare è risolvere integrali di superficie.

Questo teorema ha sicuramente semplificato le cose, però ha ancora alcuni difetti: ora abbiamo a che fare sia con correnti elettriche, sia con correnti magnetiche, dunque con due variabili, due tipi di correnti. Si può eliminare questa cosa? Beh, in realtà sì, e con una certa semplicità: ora, nel nostro volume "equivalente", abbiamo campo elettrico e magnetico nulli. Nulla ci impedisce, dunque, di riempire con un qualche materiale questa struttura, per esempio con un PEC, ossia con un conduttore elettrico perfetto: questa struttura non reagirà con il campo elettromagnetico interno al volume dal momento che esso sarà nullo, e permetterà di annullare un contributo di corrente. Quello che accade infatti è un qualcosa di questo genere:

Per il principio delle immagini quando si ha una carica vicina a un conduttore elettrico perfetto, è come avere, all'interno di esso, una carica che si muove in modo uguale e opposto, provocando dunque la nascita di una densità di corrente uguale e opposta rispetto a quella causata dalla carica in movimento, nello stesso punto; il contributo di una corrente cancellerà il contributo dell'altro, dunque la superficie elettrica cancella le correnti elettriche, ma d'altra parte raddoppia le correnti magnetiche, dal momento che un PEC in cui incide una certa onda elettromagnetica, il campo elettrico tangenziale per le condizioni al contorno si annulla, e l'onda riflessa avrà un campo elettrico diretto verso l'alto, il campo magnetico invece sarà con la stessa direzione, ma, essendo il campo magnetico incidente e quello riflesso concordi e uguali, all'interfaccia si "sommeranno".

Si può fare un qualcosa di esattamente duale usando un PMC al posto di un PEC, eliminando le correnti magnetiche equivalenti, raddoppiando le correnti elettriche superficiali.

Si han dunque tre possibili forme del teorema di equivalenza: una con correnti elettriche e magnetiche, una con correnti elettriche, una con correnti magnetiche. Questo risolve il problema di avere due tipi di correnti.

L'altro problema che si ha è la complessità della faccenda: anche risolvere integrali di superficie è una cosa di fatto difficile, se si ha a che fare con correnti complicate sulla superficie; ciò potrebbe portarci a calcolare ancora l'integrale di irradiazione, addirittura in campo vicino.

Bisogna scegliere delle superfici intelligenti, quali una sfera, o un piano chiuso da una semisfera con raggio all'infinito (che andrebbe dunque trattata usando le condizioni al contorno "infinito", con i campi che tendono a 0, riconducendo l'integrale a un integrale da farsi solo sul piano), quindi serve un metodo (anche approssimato) per calcolare il campo sulla suddetta superficie.

1.5 Caratteristiche fondamentali delle antenne

1.5.1 Definizione

Esistono diversi modi per generare le correnti che devono essere fatte irradiate dall'antenna. Un modo che capita frequentemente nel caso dei radar è quello di correnti nate in seguito a un'irradiazione, che vengono quindi fatte reirradiare da un corpo: questo è il caso tipico per esempio di un aereo, nella cui fusoliera potrebbe incidere del campo, che genera delle correnti, portando dunque ad avere una reirradiazione da parte di queste.

Ciò che capiterà a noi sarà avere generatori in un circuito, collegato all'antenna: un sistema dunque dato da generatore, linea di trasmissione, antenna (la quale convertirà la potenza circuitale in potenza irradiata nello spazio libero). Per il circuito, si avrà a che fare dunque con caratteristiche di adattamento: l'antenna infatti è sostanzialmente un carico, sotto il punto di vista del circuito (dunque un'impedenza). Ciò che idealmente si vorrebbe è avere il massimo trasferimento possibile di potenza dal circuito all'antenna, dunque al carico del circuito, e per far ciò è necessario avere un adattamento (in modo che la potenza non venga riflessa dalla discontinuità circuitale tra guida e antenna). Al fine di caratterizzare l'adattamento, vi sono almeno tre parametri:

$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

$$\mathrm{SWR} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

Un ultimo parametro interessante è il RLR, ossia il Return Loss Ratio: esso è sostanzialmente ciò che quantifica le perdite dovute alle riflessioni. Si ha infatti che:

$$|\Gamma|^2 = \frac{P_{\text{riflessa}}}{P_{\text{incidente}}}$$

dunque, si definisce:

$$\mathrm{RLR} \triangleq 20 \log_{10} |\Gamma|$$

1.5.2 Efficienza di antenna

Come detto, l'antenna si può pensare come una sorta di convertitore da energia circuitale a energia irradiata; supponendo che vi sia un buon adattamento, ossia che l'energia sia stata trasferita bene, senza perdite di disadattamento, non tutta la potenza viene convertita in potenza irradiata. Il circuito equivalente interno all'antenna può essere infatti visto come qualcosa di questo genere:

La potenza irradiata è pari a:

$$P_{\text{irradiata}} = R_{\text{irr}} I^2$$

Dove R_{L} è una "resistenza di perdite" (L sta per Loss), mentre R_{irr} è la resistenza di irradiazione dell'antenna. Si ha che l'efficienza η è definibile come:

$$\eta = \frac{P_{\text{irradiata}}}{P_{\text{incidente}}} = \frac{R_{\text{irr}}}{R_{\text{irr}} + R_{\text{L}}}$$

In pratica, quali sono valori plausibili per η? Beh, la risposta è che dipende dalle antenne, e dalla frequenza: idealmente ci piacerebbe avere R_{L} nulla ma ciò dipende anche dai materiali, e dalla frequenza a cui stiamo usando l'antenna. R_{irr} grossa non è tuttavia si avrebbero problemi di adattamento, dunque si ricascherebbe nel problema di prima. Si è visto inoltre che, per un'antenna a filo:

$$R_{\mathrm{irr}} \sim 800 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$$

Si noti che questa formula deriva dal calcolo della resistenza di irradiazione per un dipolo hertziano, ossia per un dipolo elementare (corrente costante invece che triangolare), e per esso si trova 3200 (con questa notazione, per cui l è la lunghezza di uno dei bracci); il fatto che l'integrale della corrente sia nel caso del dipolo corto la metà di quello del dipolo hertziano, porta questa differenza per fattore 4. Si potrà poi aumentare questo 800, come si vedrà in seguito.

I casi di R_{L} grande e R_{irr} bassa corrispondono a casi piuttosto importanti: se siamo a frequenze molto basse, la resistenza di irradiazione è molto piccola; viene dunque a intervenire la resistenza ohmica del filo, che rischia di ridurre di molto l'efficienza. Per frequenze dunque relative alle onde lunghe, decine o centinaia di kHz, si ha questo problema (resistenza di irradiazione bassa). L'altro caso emblematico è per le frequenze molto alte (decine di GHz), frequenze per cui i circuiti dell'antenna (la microstriscia, lo stampato) han delle perdite (effetto pelle per esempio), dunque la resistenza di perdite diventa molto elevata, e l'efficienza ohmica si riduce. Stando tra i 100 kHz e i 10 GHz di solito si può dire con una certa tranquillità di avere una η circa unitaria.

1.5.3 Guadagno e direttività

Si è parlato, precedentemente, di grandezze in grado di quantificare le prestazioni dell'interfacciamento dell'antenna al circuito; verranno ora introdotte altre grandezze, quantificanti in questo caso il comportamento dell'antenna verso lo spazio libero. Come molti altri parametri di questo tipo, esso è figlio dell'integrale di irradiazione:

$$\underline{E}(P) = \frac{Z_0}{2\lambda R} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR} \int_V \underline{J}_{\mathrm{t}}(P) \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\underline{r}' \cdot \hat{R}} \mathrm{d}V$$

Questo integrale non si scrive sempre in questa forma: il suo risultato infatti, come si può dimostrare, dà origine a una funzione $\underline{P}_{\mathrm{e}}$ funzione esclusivamente degli angoli ϑ e φ: dal prodotto scalare $\underline{r}' \cdot \hat{R}$ infatti esce qualcosa che ha va con $\hat{R}$, e che dunque può essere scritto come:

$$\hat{R} = \sin\vartheta \sin\varphi \hat{\mathrm{x}} + \sin\vartheta \cos\varphi \hat{\mathrm{y}} + \cos\vartheta \hat{\mathrm{z}}$$

Dunque, alla fine della fiera il risultato dell'integrale è funzione dei soli angoli ϑ e φ. Avendo l'integrale in questione il significato fisico di "calcolo del campo irradiato da un insieme di sorgenti confinate al finito", possiamo dunque dire che le caratteristiche del campo irradiato da un radiatore avranno generalmente dipendenza dalle variabili angolari e non da quella radiale. Il vettore $\underline{P}_{\mathrm{e}}$, derivante dal calcolo dell'integrale, è detto "momento elettrico generalizzato" (o MEG).

Parlare di integrale di irradiazione significa parlare di campi elettrici o magnetici; generalmente, in ingegneria siamo abituati a preferire parlare di potenza invece che di campo elettrico; a partire dunque da queste idee (dipendenza dagli angoli e uso della potenza) si definisce la funzione guadagno G (in trasmissione) come:

$$G(\vartheta, \varphi) = \frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}}{\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}\right|_{\text{isotropico}}}$$

Ossia, si rapporta la densità di potenza generata in un particolare punto dall'antenna che stiamo studiando con la densità di potenza generata nel suddetto punto che sarebbe generata dal radiatore isotropico. Questa formula generalmente non viene utilizzata in questa forma, ma in forma leggermente diversa: di solito, quando si considera l'elemento di potenza $\mathrm{d}P$, considerando il fatto che siamo a grande distanza, tende a 0. Allo stesso modo però tende a 0 anche il denominatore, ossia $\mathrm{d}S$. Cosa possiamo fare? Beh, si sa che:

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{R^2}$$

dunque

$$\mathrm{d}S = R^2 \mathrm{d}\Omega$$

Per quanto riguarda l'altro termine, dal momento che si parla di **guadagno**, si vuole vedere come la potenza introdotta dal circuito all'antenna vada a distribuirsi nello spazio; quello che si considererà dunque per il radiatore isotropico sarà la seguente formula:

$$\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}\right|_{\text{alimentazione}} = \frac{P_{\text{incidente}}}{4\pi R^2}$$

dove $P_{\text{alimentazione}}$ è la potenza con cui si alimenta l'antenna dal circuito; la chiameremo P_{e} per semplicità (si noti che, essendo scalare, non è il MEG).

In parole povere, la formula che ci troveremo più spesso a utilizzare sarà:

$$G(\vartheta, \varphi) = \frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}}{\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}\right|_{\text{isotropico}}} = \frac{\frac{\mathrm{d}P}{R^2 \mathrm{d}\Omega}}{\frac{P_{\mathrm{e}}}{4\pi R^2}} = \frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}}{\frac{P_{\mathrm{e}}}{4\pi}}$$

Questa è la definizione del guadagno di un'antenna.

Il guadagno non è l'unica grandezza usata per la definizione dell'interfacciamento tra antenna e spazio: l'altra grandezza principale che si utilizza è la direttività, ossia un qualcosa di quasi analogo, per cui tuttavia si considera come potenza di riferimento relativa al radiatore isotropico quella da esso irradiata e non quella in esso introdotta. Si ha dunque:

$$\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}\right|_{\text{isotropico}} = \frac{P_{\text{irradiata}}}{4\pi R^2}$$

dove $P_{\text{irradiata}}$ è ovviamente la potenza irradiata, che verrà indicata per semplicità come P_{i}. Si ha dunque, con medesimi passaggi:

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}}{\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}\right|_{\text{isotropico}}} = \frac{\frac{\mathrm{d}P}{R^2 \mathrm{d}\Omega}}{\frac{P_{\mathrm{i}}}{4\pi R^2}} = \frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}}{\frac{P_{\mathrm{i}}}{4\pi}}$$

si osservi che guadagno e direttività sono grandezze "imparentate": di tutta la potenza P_{e} che utilizziamo per alimentare il circuito, sappiamo che una parte, proporzionale mediante coefficiente η, andrà irradiata, a causa delle perdite interne all'antenna. Si avrà, come noto:

$$\frac{P_{\mathrm{i}}}{P_{\mathrm{e}}} = \eta$$

sostituendo, si trova che:

$$G = \eta D$$

Il guadagno è una funzione di due variabili, dunque di fatto fornire l'intera funzione non sarebbe interessante. Quello che si fa di solito è fornire, con un'antenna, solo alcuni numeri, quale per esempio il guadagno massimo, o il guadagno lungo la direzione desiderata, insieme a qualche altro parametro.

Tutto ciò che è stato finora detto vale per la trasmissione; per quanto riguarda la ricezione, la definizione è un poco diversa: in ricezione si ha un'antenna ricevente, con la quale si riceve una certa potenza; a questa antenna si sostituisce quella isotropica, la quale riceverà un'altra potenza; si ha:

$$G_{\mathrm{rx}}(\vartheta, \varphi) = \frac{P_{\mathrm{rx}}(\vartheta, \varphi)}{P_{\mathrm{rx,isotropico}}}$$

Ossia, si ha una definizione analoga alla precedente, solo con le potenze ricevute invece che con quelle trasmesse.

Se l'antenna che si sta analizzando è reciproca, i due guadagni dovrebbero essere uguali; non sempre però un'antenna è reciproca: se si considera per esempio il caso dell'antenna attiva, ossia dell'antenna in cui si ha anche un amplificatore o un dispositivo attivo, la reciprocità salta.

Per quanto riguarda la direttività, è possibile proporre qualche altra formulazione, in modo da renderne più semplice il guadagno. Si può pensare infatti di scrivere la funzione $D(\vartheta, \varphi)$ come:

$$D(\vartheta, \varphi) = D_{\max} d(\vartheta, \varphi)$$

Dove $D_{\max}$ è la massima direttività ottenibile, $d(\vartheta, \varphi)$ è la funzione direttività normalizzata rispetto al suo valore massimo $D_{\max}$. Sappiamo infine che:

$$D(\vartheta, \varphi) = 4\pi \frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}}{P_{\mathrm{irr}}}$$

dal momento che vogliamo determinare l'espressione di $D_{\max}$, una buona idea potrebbe essere prendere l'ultima espressione, scrivere il membro sinistro come appena detto, e integrare su tutto l'angolo solido (ossia 4π steradianti) ambo i membri:

$$D_{\max} \int_{4\pi} d(\vartheta, \varphi) \mathrm{d}\Omega = 4\pi \frac{\int_{4\pi} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \mathrm{d}\Omega}{P_{\mathrm{irr}}}$$

Si osservi tuttavia che l'integrale, sull'angolo solido, della densità angolare di potenza irradiata coincide con la potenza irradiata: numeratore e denominatore dunque si semplificano, e si ottiene:

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\int_{4\pi} d(\vartheta, \varphi) \mathrm{d}\Omega}$$

Il diagramma di direttività normalizzato rispetto al suo massimo si può ottenere mediante misure o mediante considerazioni teoriche. Il fatto che la direttività e di conseguenza il guadagno abbiano un integrale costante, significa che se in un punto ho un livello molto alto di potenza, necessariamente la parte alta deve essere distribuita in una regione molto stretta: integrare significa calcolare l'area sottesa, dunque non è possibile che l'area sia molto ampia su tutto l'angolo solido. Questo ci dice che l'angolo di apertura dell'antenna, ossia il settore angolare per cui l'antenna irradia con la massima potenza, è tanto più stretto quanto più ampio è il guadagno.

Consideriamo a questo punto un esempio, che però può essere molto utile per conoscere il guadagno: si consideri un'antenna direttiva che irradia lungo l'asse z. Supponendo che il campo elettrico abbia una polarizzazione lineare lungo $\hat{\mathrm{x}}$, $\hat{\mathrm{z}}$ sia la direzione di irradiazione, dunque $\hat{\mathrm{y}}$ la direzione del campo magnetico.

Quando si ha a che fare con polarizzazioni di tipo lineare, è possibile definire dei piani, detti "piani principali", che contengono la direzione di irradiazione e il campo elettrico o il campo magnetico.

L'antenna irradia lungo un certo angolo solido, per esempio supponendo polarizzazione lineare, con

$$\vartheta_{3\mathrm{dB},xz} = \vartheta_1$$

$$\vartheta_{3\mathrm{dB},yz} = \vartheta_2$$

Il piano xz sarà il piano $\underline{E}$, dal momento che esso contiene il campo elettrico; dualmente, il piano yz sarà il piano $\underline{H}$, poichè contiene il campo magnetico. Abbiamo dunque identificato i due angoli, rispetto a questi piani, in cui la nostra antenna irradia. Questi potrebbero esser chiamati ϑ_{E} e ϑ_{H}. Approssimando al fatto che tutto il campo irradiato sia in questa porzione angolare, riprendiamo la definizione di direttività:

$$D(\vartheta, \varphi) = 4\pi \frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}}{P_{\mathrm{irr}}}$$

Supponendo a questo punto che la densità di potenza irradiata rispetto all'angolo solido sia piatta, possiamo dire che semplicemente essa sia:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{P_{\mathrm{irr}}}{\Delta\Omega}$$

L'angolo solido $\Delta\Omega$ (in steradianti) è dato dal prodotto dei due angoli (in radianti):

$$\Delta\Omega = \vartheta_1\vartheta_2$$

sapendo poi che:

$$\vartheta_{\mathrm{deg}} = \vartheta_{\mathrm{rad}}\frac{180}{\pi}$$

si ha:

$$D_{\mathrm{max}} = \frac{4\pi \times 180^2}{\vartheta_{1,\mathrm{deg}}\vartheta_{2,\mathrm{deg}}\pi^2} = \frac{K}{\vartheta_{1,\mathrm{deg}}\vartheta_{2,\mathrm{deg}}} \sim \frac{41250}{\vartheta_{1,\mathrm{deg}}\vartheta_{2,\mathrm{deg}}}$$

dove K è una certa costante, che in alcuni libri vale 30000, in altri 31000, in altri 42700, e così via (determinata mediante studio di vari tipi di antenne o da varie misure). Se poi, date le condizioni precedentemente presentate $\eta \sim 1$, si ha $G \sim D$.

1.5.4 Altezza efficace

Un'altra grandezza molto importante per quanto riguarda la caratterizzazione delle antenne è la cosiddetta "altezza efficace", la quale si può definire sia in ricezione sia in trasmissione. Nell'ambito delle antenne in ricezione, si tratta di una quantità vettoriale che, se moltiplicata mediante prodotto scalare per il campo elettrico incidente sull'antenna, fornisce la tensione a vuoto che si ha ai morsetti di uscita del circuito equivalente dell'antenna. La definizione dunque è sostanzialmente:

$$V = \underline{\mathrm{h}}_{\mathrm{eff}} \cdot \underline{E}_{\mathrm{i}}$$

Questa grandezza si può porre in relazione con l'area efficace: entrambe le grandezze infatti sono legate alla potenza disponibile del circuito equivalente dell'antenna. Sia il campo elettrico sia l'altezza efficace come detto sono vettori, dunque comunque la tensione a vuoto prodotta sarà dipendente anche dagli orientamenti dei due vettori: se i due vettori sono ortogonali, il prodotto scalare darà luogo a una proiezione nulla.

Per calcolare l'altezza efficace si utilizza la reciprocità, dal momento che si può anche definire in trasmissione; in trasmissione la definizione di altezza efficace è relativa a $\underline{P}_{\mathrm{e}}$, ossia al MEG (momento elettrico generalizzato):

$$\underline{P}_{\mathrm{e}}(\vartheta, \varphi) = I_{\mathrm{AL}} \underline{\mathrm{h}}_{\mathrm{eff}}(\vartheta, \varphi)$$

ossia, si dice che il vettore altezza efficace è un vettore parallelo al momento elettrico generalizzato dell'antenna in trasmissione, moltiplicato per la corrente che alimenta l'antenna. Definire quest'ultima può essere non banale, dal momento che, per esempio nelle guide d'onda, definire il concetto di corrente può essere non banale.

1.5.5 Area equivalente

Un altro parametro molto importante per la quantificazione delle prestazioni dell'antenna rispetto allo spazio è l'area equivalente. Data un'antenna in ricezione, si definisce l'area equivalente A_{eq} come il rapporto tra la potenza disponibile proposta dal circuito equivalente dell'antenna in ricezione e la densità di potenza incidente S nell'antenna ricevente.

$$A_{\text{eq}} \triangleq \frac{P_{\text{d}}}{S}$$

Come noto, la potenza disponibile di un circuito è pari a:

$$P_{\text{d}} = \frac{|V|^2}{4R_{\text{g}}}$$

questa è la massima potenza che l'antenna ricevente può erogare al circuito ricevitore; questa condizione si verifica ovviamente nel caso vi sia adattamento energetico all'antenna. Si tratta di un parametro in grado di quanitifcare la trasmissione da spazio libero a circuito di ricezione.

Si può dimostrare che guadagno e area equivalente sono grandezze legate tra loro: vale infatti la formula

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{\text{eq}}$$

Ciò permette di stimare il guadagno di antenna conoscendo semplicemente le sue dimensioni. Nel caso si abbia a che fare con antenne effettivamente sviluppate su di una superficie bidimensionale, ossia con antenne ad apertura, l'area equivalente è legata all'area geometrica, mediante il coefficiente ν (detto "efficienza di apertura" o "coefficiente di utilizzazione di bocca"); si può dunque dire che:

$$A_{\text{eq}} = \nu A_{\text{geometrica}}$$

Questa eguaglianza è molto interessante dal momento che ν è un numero abbastanza ben definito a seconda del tipo di antenna che si sta considerando: un'antenna parabolica ha $\nu \sim 0,5$, un'antenna a tromba $\nu \sim 0,8$, e così via.

Definita C_λ la lunghezza della circonferenza di raggio R normalizzata rispetto alla lunghezza d'onda λ, dunque

$$C_\lambda \triangleq \frac{2\pi R}{\lambda}$$

si può dimostrare, per un'apertura circolare, la seguente formula:

$$G = \nu C_\lambda^2$$

infatti, dalla formula precedente, si ha:

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2} A_{\text{eq}}$$

ma, per un'apertura circolare, l'area equivalente sarà ν volte l'area della circonferenza di raggio R:

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2}\nu\pi R^2 = \nu\frac{4\pi^2 R^2}{\lambda^2} = \nu\left(\frac{2\pi R}{\lambda}\right)^2 = \nu C_\lambda^2$$

Emerge, dai vari passaggi delle varie dimostrazioni, che area equivalente e altezza efficace sono tra loro collegate; vale infatti la relazione:

$$A_{\mathrm{eq}} = |\underline{\mathrm{h}}_{\mathrm{eff}}|^2 \frac{Z_0}{4R_{\mathrm{g}}}$$

1.5.6 Rappresentazione del guadagno: diagramma di irradiazione

Come detto, il guadagno è una funzione di più variabili, ed è generalmente rappresentato in coordinate polari sferiche. Come ogni funzione di più variabili, è necessario scegliere una rappresentazione più o meno vantaggiosa a seconda di cosa si intende determinare a partire da essa. L'idea potrebbe nella fattispecie essere quella di considerare, per il guadagno, "tagli" ad angolo costante, ossia visualizzare la funzione in questione per $\varphi = \mathrm{c}_1$ e $\vartheta = \mathrm{c}_2$, dove le c_i sono due termini costanti.

Come già detto, di solito insieme all'antenna vengono forniti solo alcuni parametri caratteristici e non tutta la funzione del guadagno; un parametro di sicuro potrebbe essere il guadagno massimo; un altro potrebbe essere la larghezza (in termini di angolo) del fascio a - 3 dB, gli angoli per cui si hanno zeri di irradiazione, il livello dei lobi secondari, e altri.

Si consideri per esempio $\varphi = 0$: la definizione standard internazionale di livello a 3 dB di guadagno, ossia l'angolo a metà guadagno (half power beam width), come l'intero angolo (parte positiva e negativa) per cui il guadagno è superiore al guadagno a metà potenza: dato ϑ_0 l'angolo dal massimo a - 3 dB, quello fornito usualmente nei datasheet è $2\vartheta_0$.

Al fine di caratterizzare l'antenna, spesso vengono fornite delle proiezioni del guadagno; una proiezione che si incontra molto spesso è quella "polare". Si immagini per esempio una rappresentazione polare che rappresenta una mezza sfera; in un sistema cartesiano, dunque (x, y, z), i avrebbe:

Se l'antenna irradia solo in un semispazio, avere a disposizione mezza sfera può essere comodo. Considero il raggio della semisfera unitario. Ogni punto della semisfera viene proiettato sul piano xy, ottenendo dunque come coordinate:

$$\begin{cases} u = \sin\vartheta\sin\varphi \\ v = \sin\vartheta\cos\varphi \end{cases}$$

questa è la proiezione di un generico punto P sulla semisfera rispetto all'asse z cartesiano. Tutti i punti di questa semisfera si proiettano all'interno di un cerchio a raggio unitario, dunque a ogni punto di questo cerchio si ha corrispondenza una certa direzione, a una certa coppia (ϑ, φ). Si tratta di una trasformazione di variabili da ϑ e φ in queste u e v, proiettando ogni direzione sul cerchio unitario, proiettando la sfera sul piano. La cosa purtroppo fa perdere informazione: finchè proiettiamo la sfera vicino al polo, ho un coseno circa unitario, dunque la proiezione "viene molto bene"; quando l'angolo è prossimo a 90°, si hanno delle compressioni causate dal coseno prossimo a 0, perdendo dunque informazione: il punto a 70° e a 90° sono vicini, dunque si ha molta compressione sotto questo punto di vista.

1.5.7 Polarizzazione

Associato al guadagno c'è il discorso della polarizzazione: il guadagno è un concetto sostanzialmente associato alla potenza, senza però fornire informazioni su come il campo elettrico o quello magnetico siano orientati nello spazio. Risolvendo l'integrale di irradiazione, si può dire che:

$$\underline{E} = V_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R} F(\vartheta, \varphi) \hat{p}(\vartheta, \varphi)$$

Dove il prodotto finale coincide sostanzialmente con il MEG:

$$\underline{P}_{\mathrm{e}} = F(\vartheta, \varphi) \hat{p}(\vartheta, \varphi)$$

Mediante un'opportuna scelta della normalizzazione, si può fare in modo che:

$$|F| = \sqrt{G}$$

permettendo dunque di attribuire al guadagno un significato fisico più forte.

Ciò che mancava al resto della trattazione era la direzione che si attribuiva all'integrale, ossia il versore risultante dall'integrale: $\hat{p}(\vartheta, \varphi)$, ossia il versore che indica come il campo elettrico è polarizzato.

La polarizzazione di un'antenna si può definire sostanzialmente introducendo due concetti:

- polarizzazone nominale: quella che dovrebbe essere la polarizzazione ottenuta al termine del progetto dell'antenna; questa varia a seconda del tipo di servizio (radiodiffusione, telefonia, etc) e dalle specifiche che si vogliono soddisfare; molti servizi hanno allocazioni di polarizzazione:

ponti radio e altri. Le polarizzazioni nominali sono sempre o lineare (orizzontale o verticale) o circolare (oraria o antioraria); se si ha per esempio un campo elettrico polarizzato verticalmente, allora si sa per certo che l'informazione associata al campo elettrico sia solo sull'asse verticale del sistema di riferimento scelto, dunque tutto ciò che è ortogonale a esso può contenere altra informazione, dal momento che non ve ne è; stesso discorso per la polarizzazione circolare;

- polarizzazione incrociata: per un motivo o per l'altro, in realtà la polarizzazione del sistema misurato non sarà proprio quella voluta: prendendo per esempio un dipolo, la cui polarizzazione deve essere verticale, in realtà ci sarà anche un po' di polarizzazione orizzontale; questa polarizzazione è detta "spuria" o "incrociata", dal momento che essa va a "sporcare" la polarizzazione nominale, sovrapponendosi a essa.

Supponendo per esempio di avere una polarizzazione in cui la nominale è 1 e la incrociata è 0,1 (una dieci volte meno dell'altra), ho - 20 dB di polarizzazione incrociata. Di per sè questo non è importante se l'antenna è semplice, a polarizzazione semplice: si ha un disadattamento di polarizzazione che fa perdere - 20 dB di potenza, dunque il 1 % (niente di preoccupante). La cosa può essere molto importante nel caso in cui si abbia a che fare con antenne complicate, a doppia polarizzazione (ossia antenne che mandano informazione sia con una polarizzazione orizzontale sia con una polarizzazione verticale), su due canali diversi.

1.5.8 Equazione di Friis (equazione della trasmissione)

Al fine di determinare facilmente la potenza trasmessa da un'antenna trasmittente a una ricevente, esiste una nota formula, detta "Formula di Friis", che permette di calcolarla, per un caso abbastanza semplice:

$$\frac{P_{\mathrm{rx}}}{P_{\mathrm{tx}}} = G_{\mathrm{tx}} G_{\mathrm{rx}} \frac{\lambda^2}{(4\pi R)^2}$$

dove R è la distanza tra le due antenne. Si ha a che fare come si vede con due termini: uno è il prodotto dei due guadagni per le antenne, uno è il "fattore di attenuazione spaziale". Questa formula è assolutamente valida nel caso semplificato in cui non vi siano attenuazioni o diffrazioni all'interno del problema considerato, ossia se si ha un cammino diretto sullo spazio libero. Ciò è generalmente vero quando si lavora a frequenze basse ma, sopra i 15 GHz, l'attenuazione diventa un fenomeno significativo. Questa formula non tiene conto inoltre di un possibile disadattamento, di natura circuitale o di polarizzazione; al fine di tenerne conto, sarebbe possibile introdurre il seguente termine moltiplicativo correttivo:

$$(1 - |\Gamma_{\mathrm{rx}}|^2)(1 - |\Gamma_{\mathrm{tx}}|^2)\,|\hat{p}_{\mathrm{rx}} \cdot \hat{p}_{\mathrm{tx}}|^2$$

Questo numero, in un caso a noi favorevole, deve essere circa unitario. Oltre a tutto ciò, come già accennato, c'è l'attenuazione dell'atmosfera, e la diffrazione.

Molto spesso si ha a che fare con numeri molto grandi, per esempio con guadagni elevati; per questo motivo è tendenzialmente conveniente utilizzare questa formula in modo differente, ossia in scala logaritmica: con i decibel (dB). Si ha:

$$P_{\mathrm{rx}}|_{\mathrm{dB}} = P_{\mathrm{tx}}|_{\mathrm{dB}} + G_{\mathrm{tx}}|_{\mathrm{dB}} + G_{\mathrm{rx}}|_{\mathrm{dB}} - 20\log_{10}\left(\frac{4\pi R}{\lambda}\right)$$

si utilizza questa definizione, con il segno "-" per l'ultimo termine, in maniera che esso sia sicuramente positivo; questo ultimo termine è l'attenuazione spaziale in dB. Le potenze sono di solito espresse in $\mathrm{dB_m}$ o in $\mathrm{dB_W}$ (essendo esse potenze e non rapporti). Si ha inoltre un'altra definizione: per avere una certa potenza ricevuta infatti è necessario tenere ben conto dei primi due termini dell'equazione, detti "EIRP" (Equivalent Isotropic Radiated Power), o, in italiano, Potenza Equivalente Isotropica: si tratta della potenza che dovrei dare a un radiatore isotropico per avere la stessa potenza all'antenna che trattiamo.

Da questa formula sembrerebbe che l'attenuazione spaziale aumenti con la frequenza, ma ciò non darebbe senso alla "corsa alle frequenze" che c'è stata in questi anni. In realtà ciò non è vero: se i guadagni delle antenne fossero funzioni costanti rispetto alla frequenza sì, sarebbe così, ma in realtà andando su di frequenza il guadagno aumenta notevolmente. La formula di Friis potrebbe infatti essere riscritta in questa maniera:

$$\frac{P_{\mathrm{rx}}}{P_{\mathrm{tx}}} = A_{\mathrm{eq,tx}} A_{\mathrm{eq,rx}} \frac{1}{(\lambda R)^2}$$

Come si può vedere da questa formula, valida soprattutto per le antenne ad apertura, ora si ha qualcosa di inversamente proporzionale alla lunghezza d'onda, ma qui la cosa è più realistica.

Oltre a tutto ciò, come già detto, vi sono i vari fattori di perdite; il primo deriva da η, che però è già tenuto in conto nei guadagni (i quali dipendono, si ricordi, non dalle potenze irradiate ma quelle di alimentazione delle antenne). Più interessante è l'assorbimento nel mezzo: nello spazio libero, nella fattispecie nel vuoto, le onde elettromagnetiche non possono interagire con niente, dal momento che non si ha del materiale. Se la propagazione avviene però in un mezzo materiale, si ha interazione con le molecole e dunque possibilità di attenuazione. Le attenuazioni avvengono a causa dell'interazione tra l'onda elettromagnetica e le molecole per esempio dell'aria: queste a una certa frequenza vanno in risonanza e dunque assorbono l'energia. Nell'aria potrebbero risuonare l'azoto, il quale ha però una frequenza molto elevata; il vapore acqueo ha invece frequenze di risonanza più basse, dunque si potrebbe avere una finestra di risonanza. L'attenuazione potrebbe derivare anche da altri fenomeni, nella fattispecie statistici, come i fenomeni atmosferici: se piove, l'attenuazione potrebbe essere molto significativa, specialmente sopra i 20 GHz, ed essa cresce con la quantità di acqua che piove.

Capitolo 2

Antenne ad apertura

2.1 Introduzione all'argomento

Le antenne ad apertura sono antenne estese in due dimensioni, tendenzialmente direttive; tra queste antenne si possono ricordare l'antenna a tromba, l'antenna parabolica, la guida d'onda troncata.

Come si fa ad analizzare un'antenna ad apertura? Sostanzialmente, tutto si basa sull'applicazione del teorema di equivalenza su di una superficie chiusa idonea. La superficie che consideriamo, per semplicità, è una superficie piana con un'apertura con una certa geometria (che potrebbe essere rettangolare, circolare, o di altra forma), chiusa da una semisfera di raggio infinito. Grazie a questa scelta della geometria, l'integrale di irradiazione dovrà essere calcolato sostanzialmente solo sull'apertura considerata. Si considera dunque un sistema di questo tipo:

Come noto, l'espressione semplificata dell'integrale di irradiazione è qualcosa del tipo:

$$\underline{E} = -\mathrm{j}\frac{Z_0}{2\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\int_A \underline{J}_\mathrm{t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\underline{r}'\cdot\hat{R}}\mathrm{d}S$$

dove al solito si ha un punto P' che descrive la posizione delle sorgenti, R che indica il punto potenziato (il punto di osservazione), quindi il vettore $P - P'$. Applicando il teorema di equivalenza alla superficie considerata è possibile prendere l'integrale di irradiazione e, al posto delle sorgenti, ottenere l'espressione del campo sulla superficie considerata (l'apertura). Fatto ciò, è necessario fare l'integrale, e per questo dunque è necessario conoscere l'espressione del campo sulla suddetta superficie A. Prima di tutto, definiamo in qualche modo l'elemento di superficie dell'integrale; essendo la superficie piana, potremmo utilizzare per esempio un sistema di riferimento cartesiano; in questo modo, si avrebbe:

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

si ha che la direzione di propagazione dell'onda elettromagnetica è z, le altre due coordinate rappresentano il piano; il sistema è tale da avere l'apertura al livello $z = 0$. Un generico punto $\underline{r}'$ apparterrà al piano dell'apertura, dunque esso avrà certamente $z = 0$, e le altre coordinate pari a $x\hat{\mathrm{x}}$, $y\hat{\mathrm{y}}$. Al fine di calcolare l'integrale, ci manca ancora un dettaglio, ossia $\hat{R}$: come ciascun versore radiale, esso è nativamente espresso in un sistema di riferimento sferico; per riferirsi al cartesiano, è necessario proiettarlo sul sistema in questione, ottenendo:

$$\hat{R} = \sin\vartheta\cos\varphi\hat{\mathrm{x}} + \sin\vartheta\sin\varphi\hat{\mathrm{y}} + \cos\vartheta\hat{\mathrm{z}}$$

dunque, a questo punto è possibile calcolare l'argomento dell'esponenziale sotto integrale come:

$$k\underline{r}' \cdot \hat{R} = kx\sin\vartheta\cos\varphi + ky\sin\vartheta\sin\varphi$$

Definisco a questo punto:

$$k_x \triangleq k\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$k_y \triangleq k\sin\vartheta\sin\varphi$$

in questo modo, il momento elettrico generalizzato si riconduce a:

$$\underline{P}_{\mathrm{e}} = \int_A J_{\mathrm{t}}\mathrm{e}^{jk_xx+jk_yy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Cosa significa ciò? Stiamo integrando con un tipico della trasformata spaziale di Fourier le funzioni di densità spaziale di corrente, o meglio le componenti trasversali delle correnti superficiali rispetto alla direzione di osservazione: questo significa, in altre parole, calcolare la trasformata doppia di Fourier (indicata, nella trattazione, come $\mathcal{F}_2$) delle densità superficiali trasversali di corrente. Consideriamo solo quelle superficiali, dal momento che l'intenzione è quella di integrare solo sull'apertura. Le correnti superficiali dunque sono:

$$\underline{J}_{\mathrm{S}} = \hat{\mathrm{n}} \times \underline{H}_{\mathrm{S}}$$

$$\underline{M}_{\mathrm{S}} = \hat{\mathrm{n}} \times \underline{E}_{\mathrm{S}}$$

In questo caso, dato il sistema di riferimento da noi definito, la normale alla superficie è semplicemente l'asse z: $\hat{\mathrm{n}} = \hat{\mathrm{z}}$. In questo modo, è possibile dire che, per esempio:

$$\underline{J}_{\mathrm{S}} = \hat{\mathrm{z}} \times \underline{H} = H_x \hat{\mathrm{y}} - H_y \hat{\mathrm{x}}$$

Questo si ottiene facendo il prodotto vettoriale alla solita maniera. Questo procedimento permette sostanzialmente di scalarizzare il problema.

Consideriamo a questo punto il teorema di equivalenza applicato in forma più semplice:

$$\underline{J}_{\mathrm{S}} = 2x\hat{\mathrm{z}}\underline{H}_{\mathrm{S}}$$

il "2" ovviamente deriva dal fatto che, avendo considerato un PEC come elemento richiudente la superficie, il campo magnetico è stato raddoppiato. L'integrale rappresentante il momento elettrico generalizzato dunque può essere pensato come trasformata doppia di Fourier delle componenti del campo magnetico alla superficie; definisco dunque per comodità le appena citate trasformate come:

$$g_x \triangleq \mathcal{F}_2 \left\{ H_{\mathrm{S},x} \right\}$$

$$g_y \triangleq \mathcal{F}_2 \left\{ H_{\mathrm{S},y} \right\}$$

dunque:

$$\underline{J}_{\mathrm{S}} = \hat{\mathrm{z}} \times \mathcal{F}_2 \left\{ \underline{H}_{\mathrm{S}} \right\} = g_x \hat{\mathrm{y}} - g_y \hat{\mathrm{x}}$$

Questa è la densità di corrente equivalente superficiale; nell'integrale di irradiazione, tuttavia, si ha qualcosa di questo genere:

$$\underline{E} = -\mathrm{j}\frac{Z_0}{2\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\int_A \underline{J}_{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\underline{r}'\cdot\hat{R}} \mathrm{d}S$$

quindi non ci interessano le correnti totali, bensì solo quelle trasversali; al fine di ottenere le correnti trasversali a partire da quelle note è necessario applicare l'operatore diadico identità trasversale al suddetto vettore, in modo da ottenerne la sola componente trasversale. Come noto, l'operatore diadico trasversale agisce secondo la seguente matrice:

$$\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

questo significa, considerando l'equazione scalare:

$$\underline{\underline{\mathcal{I}}}_{\mathrm{t}} \cdot \underline{J}_{\mathrm{S}} = \hat{\vartheta}\hat{\vartheta} \cdot (g_x \hat{\mathrm{y}} - g_y \hat{\mathrm{x}}) + \hat{\varphi}\hat{\varphi} \cdot (g_x \hat{\mathrm{y}} - g_y \hat{\mathrm{x}})$$

a questo punto è necessario ricordarsi i prodotti scalari $\hat{\vartheta} \cdot \hat{\mathrm{x}}$ e $\hat{\varphi} \cdot \hat{\mathrm{y}}$. Si può vedere che:

$$\hat{\vartheta} \cdot \hat{\mathrm{x}} = \cos\vartheta \cos\varphi$$

$$\hat{\vartheta} \cdot \hat{\mathrm{y}} = \cos\vartheta \sin\varphi$$

e stessa cosa con φ. Si ottengono dunque le seguenti componenti del campo elettrico:

$$E_\vartheta = 2A\Psi \cos\vartheta \left(g_x \sin\varphi - g_y \cos\varphi\right)$$

$$E_\varphi = 2A\Psi \left(g_x \cos\varphi + g_y \sin\varphi\right)$$

Questa cosa è stata fatta usando l'equivalenza con due correnti elettriche; è possibile fare lo stesso con la somma delle due correnti, o con due correnti magnetiche, e trovare risultati simili a questo. Nel caso si utilizzassero solo correnti magnetiche equivalenti, nella fattispecie, si avrà da fare la trasformata doppia di Fourier del campo elettrico superficiale, al fine di determinare le funzioni integrali f_x e f_y:

$$f_{x,y} = \mathcal{F}_2 \left\{E_{\mathrm{S},x,y}\right\}$$

Definizione dei versori di polarizzazione secondo Ludwig

Abbiamo introdotto la notazione da usare per rappresentare i campi elettrici all'apertura. Come noto dal capitolo introduttivo alla trattazione, tra le varie grandezze atte a qualificare il problema vi è anche una grandezza vettoriale, nota come "polarizzazione". La rappresentazione finora usata per esprimere i campi elettrici e magnetici è basata sugli angoli zenitale ϑ e azimutale φ, ma ciò può non essere utile al fine di definire le polarizzazioni diretta e incrociata. Se si ha un'apertura in cui il campo è in fase, nel caso in cui si consideri $\vartheta = 0$ (ossia sostanzialmente angolo tale da considerare la direzione assiale, la direzione normale al piano dell'apertura), si ha un qualcosa di indeterminato sotto il punto di vista della coordinata azimutale: sull'asse z non è possibile determinare φ, dal momento che, intuitivamente, se siamo sul "polo", qualsiasi coordinata azimutale è valida, ossia vi sono infiniti versori che vanno bene. Si provi geograficamente a capire la cosa: quando ci si trova al polo nord geografico, non ha senso parlare di longitudine, dal momento che qualsiasi valore di longitudine va bene per esprimere il punto in cui ci si trova. Questo significa, in altre parole, che è impossibile scrivere le componenti del campo secondo ϑ e φ, quando si è in $\vartheta = 0$. Questa cosa può essere problematica, dal momento che se il campo elettrico ha polarizzazione lineare verticale, esso non è rappresentabile mediante questi versori.

La soluzione per questo problema è quella di utilizzare un diverso set di versori, in grado di eliminare questo problema di indeterminazione. Ciò che si fa è usare i seguenti versori di riferimento per la determinazione delle polarizzazioni:

$$\hat{p} = \cos\varphi\hat{\varphi} + \sin\varphi\hat{\vartheta}$$

$$\hat{q} = \sin\varphi\hat{\varphi} - \cos\varphi\hat{\vartheta}$$

Si consideri per esempio il discorso della polarizzazione verticale: se lo guardo dal punto di vista del piano xz, il campo elettrico verticale ha una componente lungo φ; se lo guardo al piano yz, ho una componente secondo ϑ: non è molto utile dunque usare questo tipo di coordinate sferiche per definire la polarizzazione.

Quello che si fa è utilizzare le precedenti polarizzazioni di riferimento, definite mediante i vettori ausiliari prima introdotti. Questo dal momento che il versore $\hat{p}$, nell'intorno dell'asse z, è sempre parallelo a sè stesso, e stessa cosa vale per $\hat{q}$! Se prendiamo $\varphi = 0$ per esempio $\hat{p}$ coincide con $\hat{\varphi}$; sul piano yz, $\varphi = \pi/2$, dunque rimane $\hat{\vartheta}$!

questo discorso vale in realtà per tutti i valori di φ: per un ϑ molto piccolo, si ha che $\hat{p}$ è sempre diretto allo stesso modo, dunque va tutto bene. Resta il problema dell'indeterminazione, $\vartheta = 0$, ma a questo punto si può sfruttare un noto concetto matematico: quello di discontinuità eliminabile. Si ha che per valori piccoli di ϑ i limiti tendono tutti a un certo valore ben definito, e, per quanto per $\vartheta = 0$ ci sia il problema, si può imporre il prolungamento per continuità imponendo che:

$$f(\vartheta = 0) = \lim_{\vartheta \to 0} f(\vartheta)$$

Per indicare la polarizzazione diretta e incrociata non prendo più quelli di ϑ e φ ma questi due $\hat{p}$ e $\hat{q}$, i quali hanno continuità sull'asse z.

Noi potremmo anche calcolare le componenti con ϑ e φ, ma si avrebbe un problema: a seconda del piano che si considera, si trova diversa da zero una componente oppure l'altra componente, dunque si potrebbe avere qualcosa di strano. Si consideri per esempio un'apertura:

Se si calcola la componente E_φ sul piano orizzontale, si trova una certa funzione (dove sulla punta non è definita); se proviamo a calcolare sul piano verticale E_ϑ (per dunque $\varphi = \pi/2$), si trova una funzione diversa, anche in questo caso non determinata sulla "punta". Il problema è che sull'asse si trovano diverse da zero tutte e due le componenti; la cosa curiosa è il fatto che nel piano orizzontale la polarizzazione predominante è E_φ, in quello verticale E_ϑ, dunque non si capisce quale delle componenti sia quella predominante a seconda del piano: capire quale sia la polarizzazione diretta e quale quella incrociata è difficile.

Questa definizione di polarizzazione viene chiamata "terza definizione di Ludwig", derivante da un articolo scritto nel 1973 da questo signor Ludwig. Si hanno tre possibili definizioni:

- come prima definizione, utilizzare semplicemente gli assi cartesiani come vettori di polarizzazione; ciò funziona fino a quando siamo in un dintorno dell'asse z, dal momento che, allontanandosi da esso, accade che $\hat{\mathrm{x}}$ e $\hat{\mathrm{y}}$ non sono più vettori trasversali: hanno una componente radiale, e questo non è possibile per vettori di polarizzazione (dal momento che il campo irradiato ha solo componenti trasversali);

- come seconda si ha quella basata sui versori relativi agli angoli ϑ e φ; come già detto, essa soffre del problema duale, ossia non funziona bene nell'intorno dell'asse z per i motivi già ampiamente discussi;

- la terza definizione è quella introdotta; questo è particolarmente comodo dal momento che si utilizzano gli stessi versori che si utilizzano con la metodologia standard di misura.

2.1.1 Considerazioni aggiuntive sul guadagno

Si consideri a questo punto un'applicazione particolare: un'apertura con polarizzazione lineare. Facendo tutti i calcoli della situazione (svolgendo dunque l'integrale), si trova che generalmente la trasformata di Fourier non è una funzione a variabili separabili, dunque si avrà come risultato una funzione f funzione di ϑ e φ, ma non per questo essa è data dal prodotto di due funzioni ciascuna delle quali è dipendente da una sola delle due variabili. Si può tuttavia fare un ragionamento più fine, ragionando sulle proprietà del sistema di riferimento considerato: come detto, abbiamo una generica funzione $f(\vartheta, \varphi)$;

questa sarà periodica in φ, dal momento che, dopo 360°; l'angolo riparte da 0 e così anche la funzione con esso; per quanto riguarda ϑ, invece, si ha che esso può variare solo da 0° a 180°. L'idea potrebbe dunque essere quella di considerare ϑ temporaneamente costante, quindi avere una funzione variabile solo con φ, ma dunque periodica; come noto, una funzione periodica è però sviluppabile in serie di Fourier, ottenendo qualcosa del tipo:

$$f(\vartheta_{\text{costante}}, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)]$$

Sblocchiamo il ϑ: per ogni valore di ϑ nell'intervallo $[0; 180°]$ si ha una diversa serie di Fourier con la quale si può rappresentare la suddetta funzione; questo coincide col dire che, per ogni ϑ, si ha un certo set di a_n e b_n. In altre parole, si può dire che a_n e b_n sono funzioni di ϑ:

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(\vartheta) \cos(n\varphi) + b_n(\vartheta) \sin(n\varphi)]$$

Scegliendo dunque opportunamente il sistema di riferimento, per esempio l'asse x perpendicolare a una delle componenti del campo (o parallelo a essa), si trova che uno di questi termini sparisce in un caso, dunque per esempio

$$f_1 = \cos(n\varphi)$$

dunque si trova che:

$$f(\vartheta, \varphi) \sim a_n \vartheta \cos \varphi$$

ossia se l'apertura ha la polarizzazione lineare e se ha sufficiente simmetria nella distribuzione del campo sull'apertura (cosa abbastanza comune), possiamo approssimare l'espressione del campo irradiato dall'apertura in una dipendenza funzionale a variabili separabili. La dipendenza da ϑ è ancora da determinare, quella da φ è nota ed è un coseno. Si ha però qualcosa di simpatico:

Infatti, sull'asse x, ossia per $\varphi = 0$, si ha che $\hat{\varphi}$ è ortogonale a esso, dunque "diretto verso l'alto"; allo stesso modo però, sull'asse verticale (ossia per $\varphi = \pi/2$), si ha $\hat{\vartheta}$, il quale però è ancora una volta "verticale", dal momento che, per $\varphi = 90°$, si può vedere dal disegno che la proiezione del versore sull'asse x è ancora una volta nulla, dunque si ha la stessa cosa: in entrambi i casi, si ha un versore verticale. Questa è un'approssimazione che permette

Guadagno di un'apertura

Il fatto di avere a che fare con antenne ad apertura permette di calcolare la direttività massima, e dunque il guadagno, in un modo più semplice di quello presentato precedentemente. Si era visto, in precedenza, che:

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\int_{\Omega} d(\vartheta, \varphi) \mathrm{d}\Omega}$$

Il problema è che la funzione della direttività normalizzata al guadagno, d, spesso è una funzione molto oscillante, dunque il calcolo dell'integrale potrebbe essere complesso da fare. Per le antenne ad apertura, tuttavia, è possibile introdurre un ragionamento che potrebbe semplificarci la vita. Ripartiamo per un attimo dall'espressione di base:

$$D_{\max} = \frac{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}}{\frac{P_{\mathrm{irr}}}{4\pi}}$$

Per un'apertura non ho bisogno di calcolare il flusso di potenza alla sfera all'infinito: per determinare la potenza irradiata è semplicemente possibile calcolare il flusso della densità di potenza sull'apertura, ossia:

$$P_{\mathrm{irr}} = \int_A \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S} \mathrm{d}S$$

dove A è l'area dell'apertura; questo è molto più semplice da fare, rispetto a ciò che ci si preponeva normalmente.

In un'apertura, di solito la funzione di illuminazione è poco oscillante sia in ampiezza sia in fase, e fuori da essa si considera nulla. Riutilizzando un passaggio precedente:

$$D_{\max} = \frac{\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\max}}{\frac{P_{\mathrm{irr}}}{4\pi}} = 4\pi \frac{\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\max}}{P_{\mathrm{irr}}}$$

Come noto dalla teoria, si ha che:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S} = \frac{1}{Z_0} \left|\underline{E}\right|^2$$

dove $\underline{E}$ è il campo all'apertura. Riscriviamo tutte queste espressioni, ottenendo:

$$D_{\max} = 4\pi R \frac{\frac{\left|\underline{E}_{\max}\right|^2}{Z_0}}{\int_A \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S} \mathrm{d}S}$$

È apparsa una dipendenza dal campo elettrico; noi conosciamo anche questo, dal momento che possiamo utilizzare l'espressione relativa al campo di far field! Possiamo scrivere che:

$$|\underline{E}| = \frac{Z_0}{2\lambda R}\left|\int_A 2\underline{E}_{\mathrm{t}}\mathrm{d}S\right|$$

il "2" è il solito che deriva dall'applicazione della forma "sole correnti magnetiche" del teorema di equivalenza, dunque $\underline{E}_{\mathrm{t}}$ è il campo elettrico trasverso. Si deve usare questa formulazione precisa al fine di far apparire sia al numeratore sia al denominatore il campo elettrico trasverso, sotto segno di integrale. Si ha dunque, sostituendo tutto:

$$D_{\max} = \frac{4\pi R^2 \frac{1}{Z_0}\frac{1}{4\lambda^2 R^2}\left|\int_A 2\underline{E}_{\mathrm{A}}\mathrm{d}S\right|^2}{\frac{1}{Z_0}\int_A |\underline{E}_{\mathrm{A}}|^2\,\mathrm{d}S} =$$

$$= \frac{4\pi}{\lambda^2}\frac{\left|\int_A \underline{E}_{\mathrm{A}}\mathrm{d}S\right|^2}{\frac{1}{Z_0}\int_A |\underline{E}_{\mathrm{A}}|^2\,\mathrm{d}S}$$

Questa formula deve essere legata alla direttività, dunque totalmente dovrebbe essere adimensionata; vediamo che tuttavia si ha dipendenza da λ^{-2}, dunque sembrerebbe di avere a che fare con qualcosa che va come l'inverso di un'area, dimensionalmente. In realtà, al numeratore si ha l'integrale al modulo quadro, dunque, recuperando il fatto che l'integrale ha il significato geometrico di "area sottesa dalla curva integranda", si può pensare di avere a numeratore un'area al quadrato, al denominatore un'area, e dunque la formula risulta essere definitivamente adimensionata. Ricordando che vale la formula:

$$G = \frac{4\pi}{\lambda^2}A_{\mathrm{eq}}$$

risulta evidente che la frazione degli integrali sia collegata al concetto di area equivalente precedentemente introdotto.

2.1.2 Analisi di un'apertura rettangolare

Analizziamo a questo punto uno dei casi pratici che ci verrà incontro nel semplificarci i calcoli, al momento di parlare di antenne vere e proprie: l'apertura rettangolare.

L'ipotesi fondamentale è quella secondo cui il campo sia non nullo esclusivamente all'interno di un rettangolo: l'apertura rettangolare.

L'approccio che verrà utilizzato è basato sulla seguente idea: prima di tutto si determina un'espressione generale per la determinazione del campo all'apertura data una certa "illuminazione", ossia una certa funzione del campo trasversale che "illumina" l'antenna, quindi si prova a risolvere il problema per alcuni casi particolari di illuminazione. L'integrale sarà:

$$f_{x,y} = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} E_{x,y} \mathrm{e}^{jk_x x + jk_y y} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Molto comunemente, si ha a che fare con aperture in cui la distribuzione di campo di illuminazione è a variabili separabili; d'altra parte questa cosa è nota anche dalla teoria delle guide d'onda rettangolari: anche in questo caso si può pensare alle funzioni di campo come a variabili separabili. Si può dunque dire che:

$$E(x,y) = \sum_n E_{n,1}(x) E_{n,2}(y)$$

fare la trasformata doppia di Fourier di una funzione data dal prodotto di due funzioni in due variabili diverse coincide con il prodotto delle due trasformate di Fourier nei domini reciproci relativi a ciascuna variabile; questo significa che, se la funzione di illuminazione è a variabili separabili, è possibile scomporre un singolo problema complicato bidimensionale in due problemi più semplici monodimensionali.

Consideriamo a questo punto, fatta questa osservazione, alcuni casi particolari di illuminazione, utilizzati frequentemente nell'ambito delle aperture rettangolari.

Illuminazione uniforme

Il primo caso analizzato, nonchè quello probabilmente più semplice, è quello di una funzione di illuminazione uniforme, ossia tale per cui

$$\frac{E(x)}{E(0)} = costante, \quad |x| < \frac{a}{2}$$

Applicando dunque le proprietà della trasformata di Fourier, si può ricavare (ricordando quanto valgono k_x e k_y):

$$F(\vartheta, \varphi) = ab \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin\vartheta \cos\varphi\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin\vartheta \cos\varphi} \right] \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin\vartheta \sin\varphi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin\vartheta \sin\varphi} \right]$$

Questa è infatti la trasformata di Fourier di una "porta", che dà notoriamente luogo a un seno cardinale. Consideriamo a questo punto per la rappresentazione di ogni grafico il piano (u, v) precedentemente introdotto; ciò ci permette di riscrivere, semplicemente, la funzione come

$$F(u, v) = ab\frac{\sin\left(\frac{ua}{2}\right)}{\frac{ua}{2}}\frac{\sin\left(\frac{vb}{2}\right)}{\frac{vb}{2}}$$

u e v sono funzioni dell'angolo ϑ e dell'angolo φ. Questo significa che la funzione che rappresenta il momento elettrico generalizzato, dunque le caratteristiche di irradiazione vettoriali sull'apertura nella direzione in cui la funzione è costante, è un seno cardinale funzione di u e v. Questa $\sin(u)/u$ è una funzione oscillante con un massimo sulla discontinuità eliminabile $u = 0$; gli zeri di questa funzione sono gli zeri della funzione seno, dunque sono noti. Risolvendo l'equazione trascendente $\sin(u)/u$ uguale a un qualche termine, è possibile determinare le caratteristiche di questa funzione:

si può vedere che:

$$\vartheta_{3\text{dB}} \sim 50\lambda/a$$

questo si può trovare risolvendo l'equazione trascendente

$$\frac{\sin x}{x} = \sqrt{2}$$

l'angolo del primo zero è:

$$\vartheta_0 = 57\lambda/a$$

dove 57 è semplicemente un radiante, in gradi; si può vedere che i lobi secondari sono a -13 dB e a -17 dB.

Non è indispensabile, come già detto, conoscere il diagramma di irradiazione in tutti i suoi dettagli; è sufficiente conoscere questi numeri. Questi numeri riassumono ciò che si ha quando si ha un'illuminazione uniforme dell'apertura.

Illuminazione non uniforme

Si tratta di un caso più comune: quello in cui l'apertura è illuminata mediante un campo non costante; di solito in realtà si han funzioni non costanti ma anche poco oscillanti, come potrebbe essere un coseno (ossia l'autofunzione relativa al modo TE_{10} in una guida rettangolare). Si potrebbe dunque avere qualcosa di questo genere:

$$\frac{E(x)}{E(0)} = \cos\left(\pi\frac{x}{a}\right), \quad |x| < \frac{\pi}{a}$$

in questo caso si avrà, come trasformata di Fourier, qualcosa di un poco più complicato:

$$f(u) = \frac{4\pi}{a} \frac{\cos(ua)}{u^2 - \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2}$$

Si osservi che in questo caso la posizione del primo zero è spostata più avanti (circa a $u = 5$), dunque si ha un allargamento del lobo principale, ma il livello dei lobi secondari sarà più basso. Questa cosa, spiegata in un contesto particolare, in realtà è vera sempre: si può vedere che quando la funzione trasformanda non è costante, è "rastremata", ossia tende a zero agli estremi in modo graduale, la trasformata ha i livelli dei lobi secondari più bassi. D'altra parte, purtroppo, abbassando i lobi secondari allarghiamo il lobo principale, abbassando il guadagno massimo.

Considerando questo specifico caso, si ha:

$$\vartheta_{3\text{dB}} = 69^\circ \lambda/a$$

ossia, si ha un lobo principale più largo, come scritto precedentemente;

$$\vartheta_0 \sim 86^\circ \lambda/a$$

ampiezza del primo lobo secondario circa pari a -23 dB, $\nu \sim 0,81$; rispetto a prima, l'efficienza d'apertura è più bassa; con un'illuminazione uniforme, infatti prima essa era unitaria. Questo significa sostanzialmente che se intendiamo avere lobi secondari bassi, perderemo guadagno e perderemo efficienza di apertura, ossia per avere lo stesso guadagno dovremo avere aperture più grandi, a parità di funzione di illuminazione.

Concetto di tapering

Consideriamo a questo punto il concetto di "tapering", ossia di "rastremazione", applicato alle aperture rettangolari; in realtà questo concetto sarà poi applicabile anche ad aperture di altri tipi, come si vedrà in seguito.

Per una generica antenna si può definire un numero, detto tapering, t, come il rapporto tra il campo illuminante presente al centro e ai bordi:

$$t = \frac{\left|E\left(\frac{a}{2}\right)\right|}{E(0)}$$

Dunque, avere un tapering elevato significa che il rapporto dei campi è circa unitario, dunque che il campo è circa costante. Se $t \to 1$, si ha che i lobi secondari sono più alti, ma il fascio direzionale più stretto, ν più elevata, il guadagno più elevato. Cosa duale se t si riduce.

Questa definizione potrebbe essere ricondotta a una formula vista in precedenza; per quanto riguarda il guadagno, si ha che:

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda^2} \frac{\left| \int_A \underline{E}_{\mathrm{A}} \mathrm{d}S \right|^2}{\frac{1}{Z_0} \int_A \left| \underline{E}_{\mathrm{A}} \right|^2 \mathrm{d}S}$$

Nel caso $\underline{E}_{\mathrm{S}}$ è una funzione costante, al numeratore si ha A^2, al denominatore A, (dove A è l'area, ovviamente), dunque si ha la semplice formula dell'area geometrica.

Si vuol far notare un fatto: il criterio generale del tapering non assoluto, dal momento che esistono casistiche in cui il fatto che si abbia t bassi non implica per forza una diminuzione dei lobi: dipende sostanzialmente dal fatto che si arrivi a zero agli estremi, ma anche come ci si arrivi, con che tangente.

Consideriamo ora, al fine di parlare di tapering, due fondamentali esempi di funzioni di illuminazione.

- coseno sul piedistallo: si tratta di una funzione coseno al quale si aggiunge un "piedistallo", ossia una costante:

$$f = t + (1 - t) \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

  questa funzione può avere il coseno al quadrato o al cubo invece che il coseno, si possono trovare valori ancora più piccoli.

- distribuzione di Hamming: si tratta di una funzione particolare, un particolare compromesso:

$$f(x) = t + (1 - t) \cos^2\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

  se si calcolasse la trasformata di Fourier di questa funzione per determinati valori di t, si troverebbe qualcosa del tipo:

$$F(u) = t \frac{\sin u}{u} + (1 - t) \frac{\frac{\sin u}{u}}{1 - \left(\frac{u}{\pi}\right)^2}$$

  provando a plottare questa funzione per diversi valori di t, si potrebbe vedere che il valore che permette di ridurre al minimo i lobi è qualcosa di simile a $t = 0,14$: abbassando t sotto questo valore, si ha una crescita dei lobi; per quel valore, si ha tutto a circa - 43 dB, e ν abbastanza alta. Non solo: guardando vari valori di t, si può vedere che per certi il primo lobo secondario può essere più basso del secondo o del terzo: si ha un comportamento abbastanza particolare.

Ottenere esattamente il valore ottimo di tapering è nella pratica difficile, però sappiamo che t_{ottimo} è diverso da 0.

2.1.3 Effetti dell'errore di fase

Finora abbiamo considerato un'ipotesi implicita ma irrealistica: il fatto che la funzione di illuminazione sia una funzione reale. Se si ha una fase non costante nella funzione di illuminazione, bensì se si ha un qualcosa del tipo:

$$\underline{E}(x) = \underline{E}_0(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi(x)}$$

dove $\underline{E}_0$ e ϕ sono funzioni reali. L'obiettivo di questa sottosezione è semplice: determinare il comportamento del campo sull'apertura, date diverse funzioni $\phi(x)$.

Errore di fase lineare

Il caso più semplice è quello per cui la funzione $\phi(x)$ è una retta, ossia per cui si ha un errore di fase lineare:

$$\phi(x) = \alpha x$$

al fine di determinare l'effetto di questa cosa, è necessario applicare una particolare proprietà della trasformata di Fourier, ossia quella di traslazione nel dominio della frequenza: se un certo segnale trasformando ha un termine esponenziale lineare del tipo αx, allora si avrà una traslazione, nel dominio reciproco, del tipo:

$$u' \longrightarrow u - \alpha$$

in questo modo, la trasformata di Fourier del campo $E(x)$ (considerato scalarizzato) sarà la trasformata di $E_0(x)$, traslata però nel piano (u, v) di un certo fattore α. Questa cosa porta dunque ad avere uno spostamento angolare del fascio. È possibile determinare lo spostamento angolare massimo del fascio utilizzando la funzione inversa per il caso peggiore, ossia per la posizione del massimo della funzione nel nuovo dominio: $u = \alpha$:

$$\vartheta_{\max} = \arcsin\left(\frac{\alpha\lambda}{a\pi}\right)$$

Questa cosa può avvenire per esempio quando si considera un riflettore piano: quando si ha un'antenna che viene colpita da un'onda elettromagnetica piana che arriva da una certa distanza:

il campo elettromagnetico incide sulla superficie, genera delle correnti $\underline{J}_{\mathrm{S}}$, per le condizioni al contorno si ha una corrente $\hat{\mathrm{n}} \times \underline{H}$, e questa corrente dunque sarà proporzionale al campo incidente, il quale non sarà in fase: l'onda piana avrà la stessa ampiezza, ma la fase sarà diversa, dal momento che c'è una differenza di cammino: la fase di $\underline{J}_{\mathrm{S}}$ sarà pari a:

$$\angle \underline{J}_{\mathrm{S}} = kx \sin \vartheta_0$$

dove ϑ_0 è l'angolo di incidenza dell'onda sull'apertura. Ogni punto sarà con fase diversa a causa della differenza di cammino. Si avranno dunque due effetti:

- rotazione del diagramma di irradiazione di ϑ_{max};
- distorsione sulle ascisse del diagramma di irradiazione: essendovi dipendenza da $\sin \vartheta$, il quale ϑ però sarà funzione dell'ascissa x considerata, essendoci il ritardo di fase, per ogni punto si avrà un comportamento diverso: la u è infatti una funzione non lineare

Errore di fase quadratico

Nel caso si abbia un errore di fase quadratico, ossia un andamento parabolico, del tipo:

$$\phi(x) = \beta x^2$$

si ha qualcosa di più sgradevole. Questo è purtroppo un caso pratico: un'antenna a tromba in realtà sull'apertura ha un errore di fase quadratico, dal momento che la distribuzione di ampiezza è simile a quella di una guida d'onda rettangolare ma, dal momento che il fronte d'onda uscendo si incurva leggermente, ai bordi si ha un errore di fase leggermente quadratico. L'effetto di questo errore quadratico è molteplice:

- l'integrale non è più calcolabile analiticamente; si tratta di integrali di Fresnel, che sono noti, risolubili numericamente, ma non si tratta di funzioni esprimibili analiticamente;
- si ha un allargamento dei lobi secondari;
- i minimi si "riempiono", ossia tendono ad alzarsi;
- il fascio si allarga;

- di conseguenza ai tre punti precedenti, si ha un abbassamento del guadagno, dal momento che l'energia si trasferisce nei suddetti tre punti;

- si ha uno spostamento del centro di fase; ciò ora come ora potrebbe non sembrare una cosa grave, in realtà vedremo che è una cosa che dà assai fastidio.

Questo significa che si hanno molti svantaggi. Per $x \to 0$, si ha un errore sostanzialmente minimo, essendo noi sul minimo della parabola che determina l'errore quadratico; man mano che ci si allontana, l'errore si fa sempre più sentire, e si vede la cosa nei diagrammi sia del modulo sia della fase.

2.1.4 Analisi di un'apertura circolare

L'analisi del campo su un'apertura circolare è un po' diversa rispetto a quella di un'apertura rettangolare, soprattutto per le funzioni che entrano in gioco; essa richiede una matematica un poco più sofisticata rispetto a quella utilizzata, dal momento che si ha a che fare con trasformate integrali un poco meno conosciute di quella di Fourier tradizionale.

Il problema in questione ha simmetria cilindrica, di conseguenza ciò che si fa di solito è passare a coordinate di tipo polari cilindriche (è un problema planare): si passa da x e y a ϱ e φ'. Il punto di osservazione ha coordinate ϑ e φ, mentre sull'integrale abbiamo φ', che indica la variabile sull'apertura, dunque è una delle variabile di integrazione. L'integrale non sarà più eseguibile in maniera separabile, ma si dovrà sempre fare prima l'integrale interno, poi quello esterno, dal momento che si ha a che fare non più con somme, ma con prodotti, come vedremo tra breve.

Il ragionamento di partenza è sempre lo stesso: partire dalla trasformata doppia di Fourier di un campo elettrico, dunque avere qualcosa del tipo:

$$\underline{E}_{\mathrm{A}} = \int_A \underline{E} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k_x x + k_y y)} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Al solito si suppone che il campo sia solo all'interno dell'apertura A, essendo l'integrale effettuato solo nel suddetto dominio. Data però la simmetria cilindrica del sistema, è buona cosa passare per il seguente cambio di coordinate:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \varphi' \\ y = \varrho \sin \varphi' \end{cases}$$

in questo modo, l'integrale diventa:

$$\Longrightarrow \int_A \underline{E} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varrho k \sin\vartheta \cos\varphi \cos\varphi' + k\varrho \sin\vartheta \sin\varphi \sin\varphi'} \varrho \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\varphi'$$

Questo integrale è ovviamente più complicato di quello precedente, e nella fattispecie esso non è risolubile in forma chiusa. Come suggerito in precedenza, la tattica per risolverlo è basata sulla decomposizione di questo integrale in due integrali, considerando a il raggio dell'apertura e $\varphi' \in [0, 2\pi]$; applicando poi le formule delle somme degli angoli per il coseno, si ricava, considerando una distribuzione del campo di illuminazione costante, unitaria:

$$\int_A \Longrightarrow \int_0^a \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varrho k \sin\vartheta \cos(\varphi - \varphi')} \varrho \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\varphi'$$

A questo punto, al fine di avere una normalizzazione degli estremi di integrazione, si definisce la seguente variabile di appoggio r come:

$$r \triangleq \frac{\varrho}{a}$$

in questo modo, si ha:

$$\varrho = ar, \quad \mathrm{d}\varrho = a\mathrm{d}r$$

e dunque l'integrale si trasforma banalmente nel seguente:

$$a^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}akr \sin\vartheta \cos(\varphi - \varphi')} \varrho \mathrm{d}\varrho \mathrm{d}\varphi'$$

possiamo a questo punto definire la variabile u del piano (u, v), come:

$$u = ka \sin\vartheta$$

tutto questo termine è di fatto costante rispetto all'integrale. Facendo dunque prima l'integrale su φ', si trova che:

$$F(u, \varphi) = \int_0^1 r \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}u \cos(\varphi - \varphi')} \mathrm{d}\varphi' = 2\pi \int_0^1 r J_0(ur) \mathrm{d}r$$

Per arrivare a questo punto l'ipotesi utilizzata è stata quella secondo cui la funzione trasformanda fosse una $f(r)$ (al nostro punto considerata costante) sia a simmetria assiale, ossia indipendente dalla variabile di integrazione φ'; in questo modo non è stato necessario integrarla rispetto alla suddetta variabile, decomponendo gli integrali senza problemi ulteriori. Noi abbiamo utilizzato una funzione dunque costante, ma nel caso che si abbia una funzione della sola variabile r, dunque del solo raggio ϱ, si potrebbe avere il seguente integrale:

$$F(u,\varphi) = 2\pi \int_0^1 f(r) r J_0(ur) \mathrm{d}r$$

Questo particolare integrale è una trasformata integrale, in cui il kernel è costituito da $rJ_m(x)$: questa funzione integrale nei libri di matematica è detta "Trasformata di Fourier-Bessel", dal momento che nasce dalla trasformata di Fourier applicata su un dominio circolare e, come capita spesso avendo a che fare con l'integrazione su domini circolare, viene fuori una dipendenza dalle funzioni di Bessel, portandoci all'uso della FBT.

Come per la trasformata di Fourier, esistono delle tabelle che permettono di determinare le trasformate più note del suddetto operatore integrale; noi utilizzeremo alcune proprietà fondamentali al fine di fare i conti che ci competono. Nella fattispecie, si ottiene:

$$F(u) = 2\pi a^2 \frac{J_1(u)}{u}$$

Come i seni cardinali, anche le funzioni di Bessel (per ora si sta sempre e solo parlando di funzioni di Bessel di prima specie e di ordine intero m) hanno un comportamento simile a quello di un seno smorzato; esse hanno inoltre diverse proprietà ai limiti. Consideriamo funzioni di Bessel di ordine ν, dove l'ordine in questo caso è reale; esse sono, nella forma ottenuta dall'integrazione per serie dell'equazione di Bessel:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

Considerando $x \to 0$, si ha:

$$\lim_{x\to 0} J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$$

se si discretizza ν considerando solo ordini interi n:

$$\lim_{x\to 0} J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!}$$

dal momento che la funzione Γ di Eulero valutata negli interi coincide con il fattoriale. Si può dunque dire che, per $u = 0$, si abbia:

$$F(0) = 2\pi a^2 \frac{J_1(u)}{u} \sim 2\pi a^2 \frac{1}{u} \left(\frac{x}{2}\right)^1 = \pi a^2$$

che, guarda caso, è esattamente l'area dell'apertura.

Questo, semplicemente, è il risultato dell'integrale, supposta l'ipotesi di funzione costante all'apertura. Il risultato dell'integrale è funzione di u, dunque da $\sin\vartheta$, ma si noti che non si ha dipendenza da φ, ossia dalla coordinata azimutale. Questo è un risultato dell'ipotesi secondo cui l'apertura è simmetrica rispetto alla coordinata di integrazione φ', ossia della simmetria assiale.

Può essere interessante anche il limite per $x \to \infty$, ossia per $x \gg \nu$:

$$\lim_{x\to\infty} J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Questo fatto deriva dal fatto che $J_1(x)$ è $O(x^{-1/2})$ e poi, dal momento che si ha una funzione (nella nostra trasformata di Fourier-Bessel) del tipo $J_1(u)/u$, abbiamo che $F(u) \propto u^{-3/2}$. La distanza tra gli zeri tende, per argomenti grandi, grosso modo a π (essendo il limite un coseno).

La funzione in qualche modo può ricordare un seno cardinale, dunque l'irradiazione da apertura circolare potrebbe di sicuro ricordare (per quanto ci siano differenze che verranno risaltate in seguito) quella da apertura rettangolare: si ha un massimo, dunque un certo insieme di lobi secondari; è ovviamente anche possibile calcolare il livello del primo lobo secondario, che sarà dell'ordine dei - 17 dB. Il comportamento è dunque simile a quello dell'apertura rettangolare, con lobi secondari un pochino più bassi, per quanto non si possa di certo dire che per questo il comportamento delle aperture circolari sia migliore; questa cosa si può motivare in maniera abbastanza intuitiva.

Confronto generale tra aperture rettangolari e circolari

Da quanto detto finora, sembrerebbe che aperture rettangolari e circolari siano molto simili; nella verità, ciò non è assolutamente così. Cercheremo di evidenziare la cosa paragonando un'apertura quadrata illuminata in modo uniforme con un'apertura circolare illuminata in modo uniforme, confrontando le topografie dei lobi secondari (ossia cercando di evidenziarne la posizione e le caratteristiche). Consideriamo prima di tutto la trasformazione nel piano (u, v):

$$\begin{cases} u = \sin\vartheta\cos\varphi \\ v = \sin\vartheta\sin\varphi \end{cases}$$

Supponiamo per semplicità di avere una apertura quadrata, di lato a. Nel caso dell'apertura rettangolare, fissiamo l'origine del sistema di riferimento al centro dell'apertura; dal momento che l'apertura rettangolare è illuminata per ipotesi da una funzione di campo a variabili separabili, si ha:

$$F(u,v) = \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{2\lambda}u\right)}{\frac{\pi a}{2\lambda}u}\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{2\lambda}v\right)}{\frac{\pi a}{2\lambda}v}$$

ricordando che

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

si può identificare facilmente il fatto che la funzione presenta degli zeri (ricordando che gli zeri sono i punti di "divisione" tra un lobo e un altro) per

$$u = 2\frac{m\pi}{ka}, \quad v = 2\frac{m\pi}{ka}$$

I "2" e i vari 1/2 derivano dal fatto che, dal momento che l'origine del sistema di riferimento è quella prima definita, l'integrale si fa da $-a/2$ a $a/2$.

Il luogo degli zeri e le curve di livello relative ai vari lobi sono sostanzialmente determinate da questa griglia:

Ricordiamoci a questo punto come si comporta una funzione seno cardinale: essa ha un "lobo" principale il quale è largo il doppio di tutti gli altri (si ricordi che, essendo sostanzialmente un seno con un inviluppo iperbolico, la distanza tra gli zeri è costante, a differenza di ciò che capita in una funzione di Bessel per esempio), e poi vari lobi secondari. Questa cosa ha delle ripercussioni sul diagramma di irradiazione, dal momento che la $F(u,v)$ è proprio costituita dal prodotto di due sinc(), nelle due variabili u e v. Questo fatto comporta sostanzialmente il seguente comportamento:

- quando una delle due funzioni ha una delle variabili indipendenti nulle, ossia quando $u = 0$ o $v = 0$, si ha che il lobo occupa due "quadrati" della griglia;
- dal punto precedente si può intuire che quando $u = v = 0$, ossia quando si considera il lobo principale di irradiazione, si può vedere che esso e solo esso occupa quattro quadrati della "griglia";
- conoscendo le altezze (in dB) dei lobi secondari, è possibile determinare, come prodotto delle due altezze relative a due valori della variabile u e v come somma (in dB, o prodotto delle lineari) delle due. Per esempio, nel caso (tipico) in cui si abbiano lobi secondari da - 13 dB, si può subito dire che i lobi sulla "diagonale" siano da - 26 dB (ossia il prodotto dei due o, in dB, la somma).

Cosa ci dice questo ragionamento? Beh, qualcosa di molto interessante: i lobi sulle "diagonali" dell'apertura quadrata (o sulle "diagonali" delle aperture rettangolari più in generale) sono estremamente attenuati: si ha un lobo principale che (come è giusto che sia) è molto ampio, poi i lobi sulle rette $u = 0$ e $v = 0$ meno ampi, e sulle diagonali molto ridotti; questo deriva dal fatto che l'energia dei vari lobi, rispetto all'azimut, non è uniforme.

Questa cosa ha implicazioni molto interessanti: nel caso le specifiche di progetto dell'antenna siano tali da richiedere lobi estremamente bassi sui piani principali, è possibile soddisfarla mediante l'uso di un'antenna "romboidale".

Questa cosa potrebbe sembrare strana, ma non lo è per niente: se si fa in modo da scegliere come piani principali le diagonali, infatti, si riesce a ridurre l'energia spuria sui piani principali.

Se disegnassimo a questo punto la stessa cosa per un'apertura circolare, si avrebbe qualcosa di sostanzialmente diverso:

In questo caso capita qualcosa di, come già anticipato, radicalmente diverso: ora la potenza è distribuita in modo più uniforme rispetto all'azimut, e per questo motivo i lobi sono più bassi. Questo deriva dal fatto che il campo irradiato ha simmetria assiale (ossia è simmetrica rispetto alla variabile φ', quindi si ha ciò: lobo principale più o meno uguale, lobi secondari più bassi, ma energia distribuita in maniera più uniforme rispetto alla φ: i lobi secondari sono più simmetrici, e non si han più situazioni come le precedenti (dove quelli sulle diagonali sono più bassi di quelli assiali).

Tapering per l'apertura circolare

Precedentemente abbiamo visto che, per le antenne ad apertura rettangolare, una buona funzione di tapering potrebbe essere il coseno sul piedistallo. Per ragioni pratiche, ma anche per ragioni matematiche, una famiglia di funzioni interessante per il tapering nelle aperture circolari potrebbe essere quella delle "parabole elevate a potenza":

$$i(r) = (1 - r^2)^p$$

Si è detto che questa funzione è matematicamente interessante; questo fatto deriva dal fatto che trasformare le funzioni polinomiali (le potenze) mediante la FBT (trasformata di Fourier-Bessel, ossia la trasformata integrale alla base dello studio di queste funzioni) è estremamente semplice, grazie al fatto che la funzione di Bessel di prima specie, parte fondamentale del kernel della trasformata integrale, è sostanzialmente pensabile come una serie di potenze. Si ha, dalle proprietà della FBT:

$$F(u) = 2\pi a^2 \int_0^1 i(r) J_0(ur) r \mathrm{d}r =$$

$$= \pi a^2 \frac{2^{p+1} p! J_{p+1}(u)}{u^{p+1}}$$

aumentando p si aumenta il tapering: si abbassano i livelli dei lobi secondari ma si allargano le posizioni tra uno zero e il successivo. Si noti che, come noto, $J_{p+1}(u)$ nell'intorno di $u \to 0$ ha il solito andamento, dunque questa espressione tende a semplificarsi e a rimanere finita.

Questa famiglia di funzioni di illuminazione si può utilizzare per studiare casi ancora più generali: se la funzione è data numericamente (ossia deriva per esempio da una misura), come si può fare per farne la trasformata di Fourier-Bessel? Beh, è necessario utilizzare una famiglia di funzioni come questa, al fine di esprimere in forma analitica il risultato dell'integrale di irradiazione anche se la funzione integranda non è esprimibile in forma analitica. Si immagini nella fattispecie di avere come funzione integranda una generica $f(r)$, non nota in forma analitica. Si deve fare:

$$F(u) = \int_0^1 f(r) J_0(ur) r \mathrm{d}r$$

Al fine di effettuare l'operazione, si consideri il seguente cambio di variabili, orientato allo sfruttare la famiglia di funzioni "fortunate":

$$r \to x = 1 - r^2$$

data una $f(r)$, dunque, in seguito a questo cambio di variabili si avrà una $f(x)$, che, essendo la stessa funzione valutata in una variabile diversa portata da una trasformazione non lineare, sarà tendenzialmente l'inversa, "rovesciata e un po' distorta" (non è un semplice rovesciamento dal momento che la trasformazione non è lineare).

Supponendo che le condizioni sulla funzione ci siano favorevoli, quindi, sviluppo $f(x)$ in polinomi di Taylor, usando la ben nota relazione:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$

dove N è un certo numero, fissato da noi; nel caso la funzione sia molto oscillante, molto "ballerina", si potrebbe avere $N = 5$; nel caso la funzione sia costante, una buona approssimazione potrebbe già aversi per $N = 2$ e $N = 3$ (meglio quest'ultimo). Tornando alla vecchia variabile, lo sviluppo in serie di potenze diventa:

$$f(x) \longrightarrow f(r) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n \left(1 - r^2\right)^n$$

che, guarda caso, è proprio un insieme di funzioni che ci piacciono; questo dunque può essere facilmente trasformato secondo Fourier-Bessel, ottenendo:

$$F(u) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} a_n \left(1 - r^2\right)^n J_0(ur) r \mathrm{d}r$$

questo integrale può essere svolto scambiando i segni di somma e integrale; dal momento che la somma è finita, inoltre, non si hanno problemi a effettuare lo scambio, dal momento che in questi casi si ha la certezza di avere convergenza della serie:

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{N} a_n \int_0^1 \left(1 - r^2\right)^n J_0(ur) r \mathrm{d}r$$

di solito questo integrale viene indicato mediante una Λ.

2.1.5 Centro di fase di un'apertura

Di solito come campi di illuminazione abbiamo utilizzato funzioni reali; di tutte le domande che ci siamo posti su questa, tuttavia, non ne abbiamo ancora considerata una in particolare: qual è il punto potenziante, ossia il punto dal quale proviene il campo irradiato dall'apertura? Beh, se il punto di osservazione è a distanza abbastanza grande, l'antenna potrebbe essere considerata puntiforme, dunque il campo irradiato sarebbe un'onda sferica in cui il centro della sfera sarebbe il punto rappresentante l'antenna. In una situazione un po' meno approssimata, il centro della sfera rappresentante la superficie a fase costante del campo irradiato sarebbe di sicuro da qualche parte nell'apertura, ma dove nel dettaglio? Non sempre, e anzi quasi mai, al centro dell'apertura.

Nel caso dell'apertura rettangolare uniformemente illuminata, il campo ha un certo andamento, precedentemente descritto; la funzione tuttavia ha punti in cui l'ampiezza è positiva, altri in cui è negativa: questo significa che la fase, essendo collegata a una funzione a segni alterni, sarà a segni alterni: un po' sarà pari a 0°, un po' pari a 180°.

Questo significa che in realtà la sfera rappresentante la superficie a fase costante non è una sfera: sul lobo principale si avrà una certa fase, sul primo lobo secondario un'altra, e così via, con salti pari a π: si ha una superficie a fase costante "a gradini". Questo non è in realtà l'unico problema: quando si parla di fase, non si può dire se la fase sia 0 o 2π, dunque per esempio se la traslazione dei gradini sia verso il centro della sfera o verso l'esterno.

Preoccupiamoci del primo problema: dal momento che non è possibile occuparsi del centro di fase di tutto il diagramma di irradiazione, dato l'andamento a gradino, noi ci occuperemo solo di qualcosa di molto importante per i nostri scopi: il centro di fase relativo al solo lobo principale. In questo caso, dunque, la sfera coincide sostanzialmente con una sfera di raggio r, centrata nel centro dell'apertura; questo accade se l'apertura però è illuminata da una funzione reale, a fase costante.

Il problema purtroppo è che non tutte le distribuzioni sono a fase costante: molto frequentemente, come già detto, si potrebbe avere un errore di fase quadratico. Si ricordi per esempio il comportamento di un'antenna a tromba:

in questo caso l'errore è di tipo quadratico; infatti, volendo calcolare la distanza r dal centro di fase, si avrebbe, applicando il teorema di Pitagora:

$$r = \sqrt{x^2 + L^2}$$

dove L è la lunghezza assiale della tromba, x la distanza dall'origine. Sapendo che la fase va come $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}$, e che r ha un andamento dipendente da quello di x come secondo la radice quadrata (andamento dunque quadratico), si ha qualcosa che va come

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\sqrt{x^2+L^2}}$$

questo permette di intuire che la fase sull'apertura in realtà non è costante, e che dunque il centro dell'apertura non coincide con il centro di fase.

Proviamo a vedere cosa capita: se si ha una funzione trasformanda complessa, dunque a fase non costante, per le proprietà della trasformata di Fourier non si può garantire il fatto che la trasformata di questa sia una funzione reale o con proprietà particolari.

Si consideri un esempio in cui si ha un errore quadratico di fase; il modulo e la fase del campo illuminante avran un andamento del tipo:

questo è l'andamento di modulo e fase nel caso in cui l'illuminazione non sia uniforme: in questo caso, la fase non è più costante da nessuna parte nell'apertura! Neanche nel lobo principale! Si hanno vari cambi di concavità (per esempio nei punti $u = \pm 3$). Il fatto che la fase sia non costante implica il fatto che non ci sia una sfera a fase costante, dunque non sappiamo qual è il centro di fase, dal momento che per quanto riguarda esso si dovrebbe avere una zona a fase costante, legata ad una sfera a fase costante.

Vediamo che, in questo specifico caso, si ha una fase che tende a crescere allontanandosi dall'origine. Il centro di fase è quel punto tale per cui si riesce a non avere più questo fenomeno di crescita. Al fine di non avere più questo fenomeno, è necessario "spostare", sull'asse z, il punto considerato "punto potenziante": in altre parole, quello che si fa è non considerare più l'origine del sistema di riferimento sul piano dell'apertura. Se si sposta l'origine anche su questo asse, si ha un punto $\underline{r}'$ descrivente la posizione delle sorgenti del tipo:

$$\underline{r}' = x\hat{\mathrm{x}} + y\hat{\mathrm{y}} + d\hat{\mathrm{z}}$$

Questa cosa farà ridefinire il problema, dal momento che, quando si deve calcolare il prodotto scalare $\underline{r}' \cdot \hat{R}$, si ha un termine in più, dal momento che la componente lungo z non è più nulla. Ricalcolando dunque il prodotto scalare, si avrà:

$$k\underline{r}' \cdot \hat{R} = k_x x + k_y y + kd\cos\vartheta$$

ossia, in sostanza si ha tutto ciò che si aveva prima, con in più un termine moltiplicante i precedenti, ottenendo:

$$\underline{E}' = \underline{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kd\cos\vartheta}$$

Spostare dunque l'origine dall'apertura a un punto fuori dall'apertura a distanza d corrisponde a moltiplicare il risultato di prima con un fattore di questo tipo; questo è un fattore ad ampiezza unitaria, dunque l'ampiezza del campo non varia, tuttavia si ha uno sfasamento dipendente dall'angolo di osservazione ϑ.

Ci è consentita a questo punto l'introduzione di un termine di normalizzazione per il termine del campo, moltiplicando per esempio per un termine del tipo $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kd}$, ossia un termine di fase costante, indipendentemente dall'angolo di osservazione. In questo modo:

$$\underline{E}' = \underline{E}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kd(\cos\vartheta - 1)}$$

traslare di una fase costante infatti è assolutamente consentito; questa cosa ci verrà utile in seguito; tendenzialmente il primo vantaggio sta nel fatto che, per $\vartheta = 0$, l'incremento di fase è 0.

Vediamo:

questa funzione ha un comportamento opposto rispetto a quello della fase che si aveva nel problema precedente, ossia sempre costante nell'origine, ma poi decrescente all'aumentare di ϑ; questa cosa può essere utilizzata a nostro favore per compensare, dato un certo valore ben preciso di kd, questa crescita della fase, in modo da mantenere la fase risultante dalla variazione del sistema di riferimento circa costante, circa piatta. Questo significa che la fase del campo calcolato nel nuovo modo è circa costante, e che dunque, dato $\underline{O}'$ il nuovo sistema di riferimento, ottenuto traslando sull'asse z quello

$\underline{O}$ precedente, si potrà dire che il centro di fase, ossia il centro della sfera a fase costante relativa al lobo principale del diagramma di irradiazione, sia proprio in $\underline{O}'$.

Vale la seguente osservazione generale: nel caso in cui la fase abbia una concavità verso l'alto, come nel caso analizzato, allora $\underline{O}'$ è "dietro" $\underline{O}$, ossia verso l'interno dell'antenna; nel caso opposto, ovviamente, verso l'esterno.

Giunti a questo punto, come si determina nella pratica il centro di fase di un'apertura? Beh, prima di tutto, la prima cosa da fare è calcolare o misurare il campo all'apertura in modulo e fase rispetto a un certo punto di riferimento noto, per esempio posizionato sull'apertura. Fatto ciò, con che criterio si determina il centro di fase? Beh, semplicemente, ci si prepone l'obiettivo di compensare la concavità di $\angle \underline{E}$ fino a un certo angolo, richiedendo per esempio di avere fase nulla fino a un certo livello di ampiezza; un esempio potrebbe essere - 10 dB. Per fare ciò dunque, dati i diagrammi plottati, si determina l'angolo ϑ_0 corrispondente a un calo rispetto al massimo di 10 dB, quindi ci si prepone di avere una certa fase ϕ_0 massim in corrispondenza di questo ϑ_0; questo coincide col chiedere:

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{\phi_0}{2\pi \left[\cos \vartheta_0 - 1\right]}$$

Da qui è possibile effettuare una prima verifica di un'affermazione scritta poco fa: $\cos \vartheta - 1 \leq 0$, e $\phi_0 > 0$ (essendo la fase da compensare positiva); per la regola dei segni, dunque, $d < 0$, esattamente come detto prima.

Fatta questa osservazione, è possibile trovare una formula approssimata: supponendo infatti di volere il centro di fase nell'intorno dell'origine, per $\vartheta_0 \to 0$ si può effettuare lo sviluppo di Mac Laurin e quindi sviluppare nella seguente maniera:

$$\frac{d}{\lambda} \sim \frac{\phi_0}{2\pi \left[1 - \frac{x^2}{2} - 1\right]} = \frac{\phi_0}{\pi \vartheta_0^2}$$

La posizione del centro di fase, è dunque pari al valore della fase da correggere, diviso π moltiplicante il quadrato dell'angolo di osservazione. Questa formula poi si può ovviamente convertire in gradi. Possiamo dire che

$$\frac{\phi_0^{\text{rad}}}{(\vartheta_0^{\text{rad}})^2} = \frac{180}{\pi^2} \sim 18,24 \frac{\phi_0^\circ}{(\vartheta_0^\circ)^2}$$

Il centro di fase è tanto più all'interno dell'antenna quanto maggiore è l'errore di fase che si ha; questo sostanzialmente è legato a quanto la tromba è allargata (dal momento che più la tromba è "allargata", ossia tanto simile è x rispetto a L, tanto più Pitagora si fa sentire e meno possiamo confondere L con r).

Perchè ci serve tutto ciò? Per quale motivo ci siamo posti questo problema? Beh, ci interessa in uno specifico caso: quello delle antenne utilizzate come illuminatori di antenne a riflettore: la parabola, data una sorgente luminosa posizionata nel fuoco della parabola, riflette tutti i raggi parallelamente alla direzione di propagazione. Come vedremo quando parleremo di antenne a riflettore, l'illuminatore deve essere posizionato nel fuoco; dove sia il fuoco lo sappiamo bene, ma dove posizionare l'illuminatore no: ciò che si deve far coincidere con il fuoco dell'antenna a riflettore è proprio il centro di fase e, se ciò non è stato fatto correttamente, il guadagno dell'antenna cala enormemente; per questo motivo, la teoria ora introdotta sul centro di fase è assolutamente fondamentale.

2.2 Antenne a tromba

A questo punto passiamo ad analizzare il primo tipo di antenne vere e proprie: le antenne a tromba. Si tratta sostanzialmente di antenne realizzate mediante una guida d'onda di un qualche tipo, a partire dalla quale si ha una rastrematura che avanza per un certo intervallo spaziale fino ad arrivare all'apertura. Esistono molti tipi di antenne a tromba; i quattro tipi più comuni sono:

- trombe rettangolari; tra le raccomandazioni si ha che ciascuna dimensione sia almeno $a \sim 0,7\lambda$, in modo da avere monomodalità;
- trombe circolari; anche in questo caso si deve avere a che fare con la monomodalità; queste e le precedenti sono le antenne più "antiche" (risalenti agli anni '30). Purtroppo, per quanto "semplici" da progettare, queste antenne hanno un problema: la posizione del centro di fase infatti non è ben determinata, e in alcuni fasi è addirittura diversa nei piani; il diagramma di irradiazione è asimmetrico; la banda è limitata; tutto ciò porterà alla nascita delle successive antenne;
- trombe bimodali: vengono introdotte negli anni '60 e, come suggerisce il nome, sono trombe circolari nelle quali sono presenti più modi;
- trombe corrugate: sono abbastanza difficili da realizzare, essendovi presente una corrugazione al posto di una struttura liscia; vi sono però vantaggi notevoli quali una maggiore simmetria del diagramma di irradiazione, una bassa polarizzazione incrociata, una buona simmetria del diagramma di irradiazione.

2.2.1 Trombe rettangolari

Come noto, le caratteristiche direttive dell'antenna dipendono sostanzialmente dalle dimensioni dell'apertura; questo significa, in altri termini, che per avere un guadagno elevato sarebbe sufficiente avere un'apertura molto grande (in modo che il fascio diventi sempre più stretto), e che dunque per avere un guadagno elevato non basta avere una banale guida troncata.

È possibile aumentare le dimensioni partendo dunque dalla guida d'onda, effettuando una rastremazione come suggerito, arrivando fino alle dimensioni che si vuole per l'apertura, ottenendo una maggiore direttività; per ora sembrerebbe che si potrebbe aumentare quanto si vuole e con l'angolo di rastremazione desiderato le dimensioni dell'apertura, ma in pratica vedremo che ciò non è vero. La rastremazione infatti deve essere graduale, altrimenti come minimo l'effetto più banale che si potrebbe avere è introdurre modi superiori (causati dalla presenza di discontinuità), i quali, se la lunghezza della rastremazione è troppo corta, rischiano di propagarsi nello spazio libero. Dette a e b le dimensioni dell'apertura, a' e b' quelle finali della guida, si sa che il rapporto dei coefficienti deve essere minore di 2, al fine di mantenere un ordinamento dei modi favorevole (non introdurre per esempio il TE_{11}: $2b < a$. Anche la tromba, come la guida d'onda, deve essere monomodale: già la discontinuità di suo eccita modi, ma questi non devono essere in grado di andare avanti, di propagarsi, dunque vi deve essere una dimensione L tale da far attenuare sufficientemente i suddetti modi.

Come detto, si parte dunque dalla guida d'onda rettangolare, e vi si collega un tronco di piramide atto a raggiungere, a partire da a' e b', le dimensioni a e b. Come detto, bisogna fare una rastremazione graduale, sia sotto il punto di vista del non far propagare modi superiori all'interno della tromba, sia per cercar di ridurre l'errore di fase, causato come già detto dall'applicazione del teorema di Pitagora al campo sulla tromba.

Teoricamente la tromba rettangolare, se tutto funzionasse come vogliamo, dovrebbe avere come campo all'apertura solo il campo relativo all'autofunzione del TE_{10}, avendo qualcosa del tipo:

$$\underline{E} = E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \hat{\text{y}}$$

nella pratica, purtroppo, si avrà come suggerito un errore di fase, dipendente da vari fattori (e non ultima la lunghezza L della tromba), ottenendo purtroppo qualcosa del tipo:

$$\underline{E} \sim E_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(x,y)} \hat{\text{y}}$$

Si può avere dunque un errore di fase, causato da una differenza di cammino. Ci sono sostanzialmente dunque due casistiche da analizzare:

- errore di fase trascurabile;
- errore di fase significativo, non trascurabile.

Se si ha $\phi(x, y) \sim 0$, ossia un angolo di rastremazione molto piccolo, quindi una rastremazione graduale e di conseguenza una tromba lunga, si avrà un errore di fase massimo di questo tipo:

dove

$$\Delta\phi = k\delta$$

dove, dati L e $\frac{b}{2}$ cateti del triangolo modellante la tromba, $(L + \delta)$ ipotenusa si ha che:

$$(L + \delta)^2 = L^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

considerando il fatto che δ^2 è sicuramente molto piccolo, essendo la tromba rastremata in modo graduale sviluppando:

$$L^2 + \delta^2 + 2L\delta = L^2 + \frac{b^2}{4}$$

dunque

$$\delta = \frac{b^2}{8L}$$

dunque, $k\delta$ è:

$$k\delta = \frac{\pi b^2}{4\lambda L}$$

questa sarebbe la differenza di fase che si ha tra il centro e il bordo dell'apertura. Questa formula ci dice come dobbiamo operare: o riduciamo di molto b, o aumentiamo di molto L, al fine di ridurre l'errore di fase massimo: o trombe piccole, o trombe lunghe.

Il campo elettrico illuminante sarà sostanzialmente quello di una guida d'onda, dunque che varia come il coseno lungo la direzione x, e costante (e dunque pari a una porta) lungo la direzione y. Il campo irradiato $\underline{E}$ dunque sarà, con la solita approssimazione:

$$\underline{E} = \frac{E_0}{2\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathcal{F}_2\left\{\mathrm{rect}()\right\}\mathcal{F}_2\left\{\cos()\right\} =$$

$$= \frac{E_0}{2\lambda} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R} f_1(k_y) f_2(k_x)$$

$f_1(k_y)$ sarà il seno cardinale, f_2 la trasformata del coseno; si può pensare che quest'ultima sia la funzione che si utilizzerà per effettuare il tapering della funzione di illuminazione.

Tutto ciò, con un errore di fase circa nullo. Se poi si ha un errore di fase, la distanza δ non è più nulla, e si trova che al variare dell'angolo

$$\delta \sim \frac{(x, y)^2}{2L} \Longrightarrow \phi = k\delta$$

questa formula va applicata sia per il piano E, sia per il piano H (ossia per i due piani principali):

- per il piano verticale, ossia per $\varphi = \pi/2$, si ha:

  $$\phi(y) \sim \frac{\pi y^2}{\lambda L_E}$$

  dove il valore massimo ovviamente sarà in corrispondenza di $y = \frac{b}{2}$:

  $$\phi(y)|_{\max} \sim \frac{\pi b^2}{4\lambda L_E}$$

- per il piano orizzontale, ossia per $\varphi = 0$, si ha:

  $$\phi(x) \sim \frac{\pi x^2}{\lambda L_H}$$

  dove il valore massimo ovviamente sarà in corrispondenza di $y = \frac{a}{2}$:

  $$\phi(x)|_{\max} \sim \frac{\pi a^2}{4\lambda L_H}$$

Come mai queste due formule? Come mai si hanno le distanze L_H e L_E ? Beh, queste due sono le lunghezze assiali della piramide, della tromba; i due valori sono diversi perchè, come già detto, se si andasse a tagliare la piramide in due piani paralleli, non è detto che i rettangoli trovati siano simili, dal momento che la guida d'onda ha un rapporto base/altezza pari a circa 2, ma non è detto che la cosa valga anche per l'apertura: i piani potrebbero non intersecarsi nello stesso punto: si tratterebbe di una "piramide astigmatica". Si potrebbe per esempio partire da una guida quadrata (cosa che non capita mai), e finire in un'apertura rettangolare, dato questo "astigmatismo".

Caso di errore di fase non trascurabile: condizione di tromba ottima

Nel caso si avesse una fase che cresce, nel piano E si ha un innalzamento dei lobi secondari, un riempimento dei minimi e così via, come già visto: al solito, l'energia del lobo primario viene data ai lobi secondari, perdendo di fatto guadagno. Utilizzando la solita formula dell'area equivalente, convertita in dB, si ha:

$$G_0 = 10,08 + 10 \log_{10} \frac{ab}{\lambda^12}$$

dove 10,08 è semplicemente $4\pi\nu$, con $\nu \sim 0,81$. Se $\phi \neq 0$, si ha:

$$G = G_0 - L_e - L_h$$

dove L_e e L_h sono le perdite (non e lunghezze: L sta per “Losses”) che si hanno rispetto ai piani E e H. Considerando errori di fase non eccessivi, si possono calcolare le seguenti espressioni:

$$L_e = 16 \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)^2, \quad \frac{\delta}{\lambda} < 0,7$$

$$L_h = 7,2 \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)^2, \quad \frac{\delta}{\lambda} < 0,6$$

Queste formule derivano dalla letteratura, ottenute per interpolazione dei dati ottenuti, con un andamento quadratico; si tratta di formule che fittano piuttosto bene il comportamento reale, dunque di solito vengono utilizzate. Queste formule, se per esempio si ha $0,7$, portano a 7 o 8 dB di perdite: perdite dunque enormi.

Volendo un guadagno elevato, è necessario che L_e e L_h sian bassi, ma dunque che la fase sia piccola, che b sia piccolo (ma più di tanto ciò non si può chiedere, essendo il guadagno proporzionale all'area), e soprattutto la tromba molto lunga.

Proviamo a considerare una ipotetica tromba ad angolo di apertura variabile: quando si aumenta l'angolo di apertura della tromba, aumentando l'angolo di apertura aumentano anche le dimensioni, dunque l'area, dunque il guadagno; dopo un po', però, incomincia ad aumentare pure l'errore di fase: se esso non ci fosse, in scala logaritmica il guadagno continuerebbe a crescere linearmente. Purtroppo tuttavia per aperture troppo grandi, o meglio con un angolo di apertura troppo grande, l'errore di fase aumenta molto, e l'errore di fase, come scritto precedentemente, fa perdere notevolmente il guadagno: la perdita infatti è quadratica rispetto all'errore di fase, il quale a sua volta è quadratico rispetto alle dimensioni dell'apertura: rispetto all'angolo di apertura, dunque, si ha un errore di fase che va come la quarta potenza dell'angolo.

La curva avrà dunque un massimo, ossia un certo valore dell'angolo di apertura tale per quale il guadagno sarà il massimo; questa condizione è detta, per l'antenna a tromba, "condizione di tromba ottima". Si noti un fatto: la tromba ottima non è l'antenna perfetta per tutti gli usi, ma è semplicemente quella apertura che ottimizza il guadagno a parità di lunghezza assiale; non sempre è necessario massimizzare il guadagno: se per esempio serve un'antenna che copra un certo angolo fisso, per esempio 60°, anche il guadagno sarà fisso, dunque non sarà necessario fare ciò. La tromba ottima, dal momento che massimizza il guadagno, minimizza infatti il fascio, dunque è necessario fare attenzione alle specifiche.

La condizione di tromba ottima si ha per:

$$a = \sqrt{3\lambda l_h}$$

$$b = \sqrt{2\lambda l_e}$$

Le due sono diverse; questo deriva dal fatto che le funzioni di illuminazione sui due assi sono diverse, e dunque lo saranno anche le condizioni su a e b. Si noti che si hanno l_h e l_e: queste sono, secondo la convenzione, l'intera ipotenusa; quando si parla di lunghezze dunque, L_E e L_H indicano le lunghezze assiali, l_e e l_h le ipotenuse. Nella pratica, non si ha tutta questa distinzione: se si ha un piccolo errore di fase, infatti, $l \sim L$, ossia le due l minuscole e L maiuscole sono intercambiabili. Ciò sembrerebbe strano, dal momento che scambiare un cateto con un'ipotenusa non sembra il massimo della vita. Dimostriamo dunque la cosa, mostrando dove sta il punto critico: al solito, δ è esprimibile come:

$$\delta = \frac{b^2}{8L}$$

questa si può ricavare, sapendo che:

$$L^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (L + \delta)^2$$

se uso l'ipotenusa l come variabile indipendente, trovo:

$$l^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + (l - \delta)^2$$

da qua:

$$l^2 = \frac{b^2}{4} + l^2 + \delta^2 - 2\delta l$$

l'errore sta nel trascurare, come già fatto prima, δ^2; a tali condizioni:

$$\delta \sim \frac{b^2}{8l}$$

esattamente uguale a prima, sostituendo L.

Condizione di diagramma di irradiazione simmetrico

Un'altra condizione interessante è quella che permette la simmetria del lobo principale della tromba rettangolare. Nel piano $\varphi = \pi/2$, il primo zero si trova grosso modo per $u = \pi$, mentre per $\varphi = 0$ si trova a $u = 4,5$, ossia in un valore diverso, a causa del fatto che si ha a che fare con funzioni di illuminazione diversa. Se la tromba fosse quadrata, il primo zero non si troverebbe con lo stesso angolo: bisognerebbe infatti risolvere, al fine di trovare gli angoli associati agli zeri, le equazioni:

$$\frac{\pi R}{\lambda} \sin\vartheta \sim \pi$$

per trovare lo zero sull'asse verticale, e per l'asse orizzontale

$$\frac{\pi R}{\lambda} \sin\vartheta \sim 4,5$$

ovviamente, nonostante la tromba sia quadrata, data la differenza delle funzioni di illuminazione si avrà sicuramente che gli angoli associati agli zeri saranno diversi per piani diversi considerati: il diagramma di irradiazione, dunque, sarà non simmetrico. Questo deriva dal fatto che su un piano principale si ha tapering, sull'altro no, e dunque pure in una tromba quadrata si avrebbe fascio non simmetrico.

Volendo avere un fascio simmetrico (che, come vedremo, garantisce una migliore polarizzazione incrociata), è necessario allargare la dimensione per cui il fascio è più largo, in modo da stringere il fascio e dunque simmetrizzarlo. Volendo avere uno zero per lo stesso angolo, si può vedere che la dimensione a deve essere maggiore della dimensione b di un fattore circa pari a $3/2$:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{3}{2}$$

Questo in realtà vale per porre uguali gli angoli di zero, che però non sono così interessanti: quelli che di solito consideriamo interessanti sotto il punto di vista dello studio del diagramma di irradiazione, più che gli angoli degli zeri, sono gli angoli associati a una riduzione di 3 dB della potenza rispetto alla massima; facendo gli stessi ragionamenti per gli angoli a 3 dB, molto approssimativamente, si può vedere che la condizione di simmetria del fascio sia:

$$\frac{a}{b} \sim \frac{4}{3}$$

questo è il "numero magico" di solito fornito nella letteratura, al fine di avere un fascio simmetrico.

La tromba rettangolare è quella che più spesso si utilizza come riferimento nelle misure, grazie alle grandi proprietà di riproducibilità e grazie al fatto che esse si rispecchiano estremamente bene con i calcoli teorici. Purtroppo esse possono essere utilizzate solo per realizzare antenne con guadagni ridotti, dell'ordine del 20 o 25 dB, altrimenti la tromba diventa troppo lunga. È relativamente facile da realizzare, e per tutti questi motivi spesso si utilizza come illuminatore di antenne a riflessione. In questo caso specifico, si ricordi che non ha senso utilizzare una tromba ottima: un illuminatore deve per l'appunto illuminare un certo angolo fisso, dunque fare una tromba ottima non ha senso, dal momento che non si deve minimizzare il fascio, bensì soddisfare una certa specifica sull'angolo.

2.2.2 Trombe coniche

Parlando di trombe circolari non vi è molto da aggiungere rispetto al caso precedente: si ha in questo caso solo un grado di libertà, ossia il raggio della tromba. Un'antenna di questo tipo si può ottenere per esempio tornendo un pezzo di metallo; si ha un'antenna perfettamente simmetrica, ma il diagramma di irradiazione invece non sarà simmetrico, per una questione di modi: un'antenna a tromba conica è imparentata con una guida d'onda circolare, il cui modo fondamentale è il TE_{11}, che presenta una topografia di campo dissimmetrica (come vedremo meglio in seguito parlando di trombe bimodali): il rapporto tra il massimo del campo (al centro della tromba) e il minimo agli estremi è circa pari a 0,6, dunque poco taperato, sul piano verticale; nel piano orizzontale al contrario il campo è nullo ai bordi (andando secondo funzioni di Bessel), ottenendo qualcosa di decisamente più taperato: in altre parole, il fascio è stretto sul piano verticale, più largo su quello orizzontale.

Anche nel caso delle trombe coniche esistono formule approssimate per la determinazione del guadagno, in due situazioni (errore di fase trascurabile e significativo):

- nel caso in cui l'errore di fase è trascurabile, dunque $\phi \sim 0$, si ha:

$$\nu \sim 0,83$$

dunque un poco diversa da quella della tromba rettangolare; per quanto riguarda il guadagno, si può dimostrare, dalle formule già viste passate in dB:

$$G_0 = 20 \log_{10} \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right) - 0,8$$

- nel caso l'errore sia più significativo, dal momento che il cono è più pronunciato, si hanno perdite di guadagno più importanti, approssimabili mediante il seguente andamento quadratico (come nel caso della tromba rettangolare):

$$L \sim 13,8 \left(\frac{\delta}{\lambda} \right)^2$$

Il primo effetto dell'errore di fase in realtà non è tanto la riduzione del guadagno, quanto il fatto che i lobi secondari tendono a crescere.

Ciò che ci infastidisce in sostanza è la variazione della posizione dei massimi/minimi sull'asse delle ascisse: inoltre, sui piani E H si han discostamenti importanti. Ciò che si determina, da simulazioni o andamenti sperimentali, è il fatto che sarebbe necessario fare una tromba ellittica, con rapporto di ellitticità circa simile a 4/3 (più o meno in modo simile alla tromba rettangolare, per quanto il numero preciso sia diverso); negli anni '70 si è provato a progettare trombe coniche con piani quasi simmetrici, solo che realizzare una tromba ellittica sarebbe, nella pratica, estremamente complesso, dunque si è lasciato perdere; passare inoltre da una geometria circolare a una geometria ellittica complicherebbe notevolmente l'analisi, dal momento che le funzioni dei modi diventerebbero molto diverse, dunque anche sotto questo punto di vista l'idea è stata accantonata.

Simmetria e polarizzazione

Prima di parlare nel dettaglio di soluzioni alternative alle precedenti, per quanto più elaborate, si vuole introdurre un discorso assolutamente fondamentale. Come mai si vuole avere una tromba simmetrica? Beh, quando si parlava di polarizzazione incrociata, si è visto che la coppia dei versori di polarizzazione diretta $\hat{p}$ e incrociata $\hat{q}$ si possono scrivere, secondo la terza definizione di Ludwig, come:

$$\begin{cases} \hat{p} = \cos\varphi\hat{\varphi} + \sin\varphi\hat{\vartheta} \\ \hat{q} = \sin\varphi\hat{\varphi} - \cos\varphi\hat{\vartheta} \end{cases}$$

Come mai torniamo qua? Beh, si era anche visto, in precedenza, che il campo elettromagnetico potrebbe essere rappresentato come:

$$\underline{E} = E_0 \left[F_H(\vartheta)\cos\varphi\hat{\varphi} + F_E(\vartheta)\sin\varphi\hat{\vartheta} \right]$$

A questo punto è possibile valutare le polarizzazioni diretta e incrociata, proiettando questa funzione di campo sui versori appena visti:

$$E_{\text{diretta}} = F_H(\vartheta)\cos^2\varphi + F_E(\vartheta)\sin^2\varphi$$

$$E_{\text{incrociata}} = \sin\varphi\cos\varphi \left[F_H(\vartheta) - F_E(\vartheta)\right]$$

Cosa ci dice ciò? Beh, essendo la seconda la polarizzazione incrociata, è possibile vedere che essa è nulla nei piani principali, ma questo è un caso banale; più interessante è il fatto in cui $F_E = F_H$, ossia se si ha simmetria, in **modulo e fase**, del diagramma di irradiazione.

Come mai ci impuntiamo così tanto sul desiderio di avere una bassa polarizzazione incrociata? Beh, come già detto, se essa è trascurabile è possibile introdurre un riutilizzo di frequenza, ossia trasmettere nel canale il doppio dell'informazione, usando sia una polarizzazione verticale sia una polarizzazione orizzontale, ma questo ovviamente si può fare solo a patto che la cross polarization sia bassa, ossia se le due polarizzazioni sono ben disaccoppiate, eliminando fenomeni di interferenza.

Come si può fare per fare una tromba con bassa polarizzazione incrociata? Si deve sostanzialmente avere la possibilità di avere un tapering il più possibile uguale nei due piani, ossia avere simmetria rispetto alla variabile di integrazione φ' (ossia l'azimut considerato sul solo piano d'apertura): normalmente, una tromba circolare, in cui vi sia il suddetto TE_{11}, non realizza assolutamente questo obiettivo.

2.2.3 Tromba bimodale

Il problema da risolvere è quello dunque di uniformare l'illuminazione nei due piani principali. Per fare ciò, l'idea vincente è stata quella di combinare non un modo, bensì due: il TE_{11} e il TM_{11}.

Da dove salta fuori questa idea? Beh, prima di tutto consideriamo alcuni cenni riguardo la guida circolare: come noto, quando si studiano problemi al contorno, si finisce per arrivare alla ben nota equazione di Helmholtz:

$$\nabla_{\mathrm{t}}^2 \phi + k_{\mathrm{ti}}'^2 \phi = 0$$

questa è l'equazione differenziale la cui soluzione fornisce una funzione, il cui gradiente darà luogo alle autofunzioni modali. Per ottenere problemi differenziali di semplice risoluzione, l'idea è di solito quella di avere coordinate costanti al momento di esprimere le condizioni al contorno; in questo caso, dal momento che il dominio è circolare, ciò che si fa è passare l'equazione in un sistema di coordinate polari planari, e ciò che ne esce è una coppia di funzioni di questo tipo:

- per i modi TM,

  $$\phi = \cos(m\varphi) J_m(k_{mn}' \varrho)$$

  dove la condizione, essendo il modo TM, è di Dirichlet:

  $$\phi(a) = 0$$

- per i modi TE:

  $$\psi = \cos(m\varphi) J_m'(k_{mn}'' \varrho)$$

  dove la condizione al contorno in questo caso è di Neumann:

  $$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\nu} = 0$$

Le caratteristiche dei modi (quali per esempio la frequenza per cui essi iniziano a propagarsi nella struttura guidante) sono note a partire dalla conoscenza degli autovalori $k_{mn}(','')$, i quali per quanto riguarda una guida rettangolare sono notoriamente collegati agli zeri di funzioni sinusoidali/cosinusoidali, mentre in questo caso sono collegati agli zeri di una funzione di Bessel di prima specie o alla sua derivata.

Studiando gli andamenti delle funzioni di Bessel, si può vedere che il primo modo, ossia il modo fondamentale della struttura, è il TE_{11}, dal momento che è il primo zero che si incontra.

Siamo interessati, dei modi superiori, al modo TM_{11}, dal momento che è quello che meglio permette di "aggiustare" la topografia del campo elettromagnetico all'interno della struttura guidante, in modo da renderla più uniforme.

Il modo TM_{11} ha una topografia di questo genere:

essendo un TM, le linee di campo elettrico avranno anche una componente longitudinale, lungo z; si può vedere che dunque, per quanto riguarda l'asse verticale (ossia l'asse E), a metà della sezione trasversale, si ha un'inversione di segno, dal momento che le "freccette" cambiano di verso: quelle nelle zone periferiche sono direzionate nello stesso modo, quelle nelle zone centrali (vicino al centro della circonferenza rappresentante la sezione trasversale) nel verso opposto. Per quanto riguarda invece il piano orizzontale, ossia il piano H, si ha un insieme di linee di campo dall'intensità sostanzialmente uguale a quella normale: sono sempre nella stessa direzione; come condizione al contorno ai bordi il campo tangenziale sarà nullo, dunque campo orizzontale che si annulla ai bordi. Nel piano E ho un cambio di segno e un campo non nullo ai bordi, nel piano H campo nullo ai bordi e solito andamento.

Se si disegna la topografia del modo fondamentale anche per il TE_{11}, si ha:

Si può vedere che l'ampiezza ha un andamento di questo genere.

L'idea della tromba bimodale è quella di far sommare le due topografie di campo. Si ottiene che:

- nel piano H le due funzioni sono molto simili, dunque la funzione risultante dalla somma sarà taperata allo stesso modo delle due funzioni sommate;

- nel piano E (che si ricorda essere il piano verticale), i campi dei due modi nella parte centrale si sommano, nella periferia si sottraggono; scegliendo un peso conforme per le due topografie (dal momento che, essendo le equazioni di Maxwell lineari, tutto ciò si riconduce a una combinazione lineare), si riesce ad avere un campo risultante con topografia taperata allo stesso modo del piano H, ottenendo dunque la tanto agognata simmetria del diagramma di irradiazione.

A questo punto resta una domanda: al fine di avere un modo, servono due condizioni: il fatto che esso sia eccitato, e il fatto che esso sia propagato. Al fine di eccitare un modo, è necessario introdurre una discontinuità nella struttura guidante, discontinuità che ecciterà un certo numero di modi superiori. Per eccitare il modo TM_{11} l'idea che si attua è la seguente:

Si introduce in questo modo una discontinuità di questo tipo. Un problema però sta nel fatto che tra il TE_{11} e il TM_{11}, in mezzo vi stanno altri modi, ed essi non devono essere eccitati: la tromba bimodale deve coinvolgere solo i due modi introdotti. Questo fatto viene evitato proprio mediante l'uso di una discontinuità di questo tipo: essa infatti, per come è fatta, eccita solamente i modi con lo stesso indice azimutale, dal momento che questa è una discontinuità simmetrica, ossia è un gradino in ϱ, nella coordinata radiale, ma non in φ; in una discontinuità di tipo radiale si ha dunque sempre lo stesso indice azimutale, ma non si eccitano modi con diversi indici radiali. I TE_{1n} e TM_{1n} non vengono eccitati, dunque non possono neanche propagarsi.

Questa cosa si può intuitivamente vedere nella seguente maniera: ogni volta che si deve calcolare l'effetto di un modo rispetto all'intero campo elettromagnetico, quello che si fa sostanzialmente è considerare un integrale di proiezione, applicando il metodo di Gram-Schmidt:

$$\underline{e}_{\text{modale}} = \int_0^{2\pi} \int_0^a J_m(k'_{mn}\varrho)\cos(m\varphi) J_{m'}(k'_{m'n'}\varrho)\cos(m'\varphi)\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varrho$$

ossia, si considera un modo con pedici (m, n) e (m', n'); il fatto che $n \neq n'$ non comporta problemi dal momento che va a modificare le funzioni di Bessel, ma il fatto che $m \neq m'$ invece ci aiuta, dal momento che in questo caso fa ottenere un integrale non nullo solo secondo un risultato moltiplicato per la delta di Kronecker: solo quando i due indici sono uguali (dal momento che i coseni sono tra loro ortogonali per $m' \neq m$).

Il fatto di poter introdurre questo secondo modo permette dunque di effettuare un tapering anche sul solo piano E. Se il coefficiente di peso del secondo modo è circa pari a 0,4 (poco di meno), i lobi principali corrispondono abbastanza, sia in modulo sia in fase (fino a quando il lobo principale si abbassa di circa 10 dB, dunque di un buon valore). Inoltre, risultato aggiuntivo a nostro favore, i lobi secondari sono sempre molto ridotti: nel lobo principale c'è una maggiore efficienza di fascio, ossia un rapporto più favorevole tra energia nel lobo principale e nel fascio.

Il problema principale di questo tipo di antenna a tromba è la banda: se si fa un gradino tale da passare dalla guida d'onda circolare, la quale permette un solo modo fondamentale, a un nuovo raggio per il quale si fa passare anche l'altro modo, si deve avere un gradino molto grande: le due k_t sono piuttosto diverse. La realizzazione pratica dunque di questa antenna richiederà qualcosa di un poco più complicato. Quello che si fa prima di tutto è introdurre una leggera rastremazione molto graduale, poi si porta la guida d'onda a dimensioni tali da poter permettere il modo fondamentale e i primi due modi superiori; questi verranno poi attenuati da un tratto di guida d'onda, prima di fare un ulteriore salto, che in questo caso sarà quello che permetterà l'eccitazione del solo modo TM_{11}, che verrà dunque eccitato di qui in poi, e propagato. Facendo questa cosa qui, si riesce a evitare di distorcere eccessivamente il diagramma di irradiazione.

Si noti che i due modi si propagano con velocità di fase diverse, dunque è necessario che essi si combinino alla bocca con la stessa fase, in modo che si possano sommare e che non vadano in controfase; si introduce dunque una sezione finale di rifasamento, in modo tale da far combinare in fase le due componenti di campo.

Il fatto che si abbia una sola configurazione giusta per le velocità di fase, a meno di non andare in controfase, limita la banda dell'antenna.

2.2.4 Tromba corrugata

La tromba bimodale è stata proposta in America, da Potter negli anni '60; in Europa negli anni '70 è stata elaborata una cosa molto diversa, al fine di risolvere i problemi delle trombe rettangolari/circolari: la tromba corrugata. Si tratta di un'antenna molto complicata sia da analizzare sia da realizzare, dal momento che basata sulla seguente idea:

La superficie ha dei solchi azimutali, la cui profondità è variabile. I solchi dovranno essere per ipotesi di larghezza piccola rispetto alla lunghezza d'onda: se ho 30 GHz di frequenza (per esempio), avrò 1 cm di λ; i solchi dovranno essere dell'ordine di 0,1 mm (per esempio: non son numeri precisi).

Il motivo per cui si usa una caratteristica di questo tipo deriva dalle condizioni al contorno: questa tromba è metallica, dunque la condizione al contorno deriva dal fatto che il campo elettrico tangenziale è nullo. Il problema è che imporre una condizione al contorno del genere su un contorno seghettato è estremamente complicato: sarebbe bello trovare delle condizioni al contorno globali, macroscopiche, su una superficie di questo tipo: tra zona corrugata considerata come una singola zona, e l'aria (essendo i solchi piccoli si ha un'interazione molto elevata).

Si può vedere che in una situazione di questo genere non è possibile ottenere modi puramente TE o puramente TM: per essi esiste solo la soluzione identicamente nulla, dunque la soluzione banale: in una struttura del genere esistono i modi ibridi, ossia modi con una parte TE e una parte TM: questi due tipi di modi si mescolano tra loro, con una certa costante γ che ne indica il rapporto; particolarità è il fatto che i due tipi di modi, in questo caso, hanno la stessa velocità di propagazione. Un caso molto importante è quello del cosiddetto "modo ibrido bilanciato", come vedremo.

Condizioni al contorno

Come detto tutta l'analisi e il progetto che si desidererebbe fare di questo tipo di antenna è fondato su un tipo di condizioni al contorno, macroscopiche, basate dunque su di un modello tendenzialmente semplificato. L'idea è quella di considerare dunque un modello di questo genere:

Si considera una struttura di questo tipo, dove t è lo spessore di un dente, h la sua altezza dalla fine della superficie esclusivamente metallica, g la distanza tra due denti. Per questo tipo di problema si usa un sistema di coordinate (r, ϑ, φ), di coordinate in realtà cartesiane ma che vengono utilizzate con questa nomenclatura per abitudine. L'ipotesi di base per questo tipo di analisi è:

$$\begin{cases} t \ll g \\ g \ll \lambda \end{cases}$$

ossia, dente più piccolo del solco, solco più piccolo della lunghezza d'onda.

Il campo parallelo al solco, E_φ, è certamente nullo: si ha infatti sostanzialmente a che fare, per le ipotesi appena proposte, una guida d'onda sotto taglio, dal momento che per avere una guida propagante un campo elettromagnetico si deve avere che la sua dimensione a sia maggiore di $\lambda/2$ (all'incirca); in questo caso è sostanzialmente impossibile avere propagazione del campo in questa direzione; questo, per quanto riguarda l'interno della guida; essendo il materiale che compone la guida metallo, per le condizioni al contorno anche qui, su questo asse, la componente di campo sarà nulla.

Per quanto riguarda la componente perpendicolare alla parete, quella lungo r, si ha che non si hanno pareti laterali, dunque il campo elettromagnetico si propaga come in una guida la cui larghezza è infinita (essendo il "pettine" molto largo); questo solco ha poi profondità h, il che equivale avere, sull'asse z della linea di trasmissione equivalente della guida, un corto circuito; supponendo che sia tutto in aria, si ha un'impedenza caratteristica della medesima pari a Z_0, dunque è possibile fare il seguente ragionamento: dal momento che si ha propagazione come secondo una guida a parete trasversale illimitata, si ha un modello sostanzialmente simile a quello delle onde piane, per il quale dunque vale la relazione di impedenza tra campo elettrico e campo magnetico:

$$E_r = Z_T H_\varphi$$

questa Z_T è coincidente, in ambito di linee modali equivalenti, all'impedenza vista per $z = h$ a partire dal punto considerato, ossia dalla discontinuità tra fine dei denti e pura aria. Ciò che si ha è una linea modale equivalente chiusa, per $z = 0$, su di un corto circuito. La formula che permette di ottenere l'impedenza vista ai capi della linea equivalente, la quale va a coincidere con la relazione tra campo elettrico perpendicolare e H_φ, è:

$$Z_T = jZ_0 \tan(kh)$$

dove $k = k_0$.

Si potrebbe dimostrare che con queste condizioni al contorno il campo in questione è nullo. Questo deriva da una serie di annullamenti a catena derivanti.

Parentesi matematica

Quanto appena detto si dovrebbe dimostrare prendendo l'equazione di Helmholtz e risolvendola dopo averla convertita in coordinate sferiche, dal momento che si ha a che fare con una guida fondamentalmente conica, la quale si rappresenta discretamente bene in coordinate sferiche ($\vartheta =$ costante). Come si può vedere, ∇^2 si trasforma in un operatore diverso, e le funzioni che conseguono dal passaggio di coordinate sono per la coordinata azimutale φ ancora una volta seni e coseni, ma per le coordinate r e soprattutto ϑ qualcosa di nuovo: in ϑ si avranno delle equazioni di Legendre, alle quali sono associate, come soluzioni, le cosiddette "funzioni associate di Legendre", indicate come $P_n^\nu(\cos\vartheta)$. In r, invece, si trova l'equazione sferica di Bessel, la quale è in qualche modo simile all'equazione di Bessel, e dà in uscita le funzioni sferiche di Bessel, di solito indicate come $j_\nu(k\varrho)$: si tratta sostanzialmente di funzioni di Bessel ordinarie di ordine semi-intero.

Dall'analisi dei modi TE si può vedere che si trovano delle funzioni H, dette "funzioni di Hankel": queste sono combinazioni lineari delle soluzioni dell'equazione di Bessel J_n, già nota, e $Y_n(x)$, detta "funzione di Neumann" o "funzione di Bessel di secondo tipo". Il motivo per cui normalmente non appare Y_n è il fatto che essa, per $x \to 0$, tende a ∞, e dunque non può essere soluzione di un problema in cui si ha anche l'origine nel problema (quale per esempio una guida circolare; nel caso di un coassiale, invece, per i modi surmodati si potrebbe avere anche essa). Si ha:

$$H_n^{(1,2)}(x) = J_n(x) \pm \mathrm{j}Y_n(x)$$

dove j è ovviamente l'unità immaginaria.

Il motivo per cui si sta parlando di ciò può essere interessante dal momento che le funzioni di Hankel hanno un significato fisico molto importante, molto più di quello delle funzioni di Bessel: esse infatti, asintoticamente, si comportano come delle onde cilindriche; quando le funzioni di Hankel derivano invece dalle funzioni sferiche di Bessel, si comportano come onde sferiche; oltre ad avere ciò, si ha qualcosa di altrettanto interessante: la funzione di primo tipo di Hankel è un'onda progressiva, quella di secondo tipo regressiva.

Dal momento che tutto ciò deriva da equazioni differenziali, e che per esse vale il teorema di esistenza e di unicità, se tutto è identicamente nullo sul contorno, la soluzione è identicamente nulla; quello che possiamo fare dunque è sommare i modi TE e TM con pesi arbitrari, ottenendo componenti E_ϑ e E_φ funzioni sia di modi TE, sia di modi TM. γ è il suddetto coefficiente di mescolamento.

Nel caso in cui $\gamma = 1$, si ha il cosiddetto modo ibrido bilanciato, che è una situazione particolarmente interessante sotto il nostro punto di vista dal momento che, se $\gamma = 1$, le due parentesi quadre diventano identiche, dunque la dipendenza da ϑ è la stessa per le due componenti, e E_ϑ e E_φ son uguali a meno del fattore dei seni: si ha una perfetta simmetria, a livello teorico, della descrizione del campo sull'apertura. Ciò genererà il fatto che l'integrale verrà fatto solo in ϱ e non in φ', come detto in precedenza, e dunque si ha diagramma di irradiazione simmetrico.

Per avere un modo ibrido bilanciato, la condizione che si ha è quella per cui l'espressione di $jZ_0 \tan kh$ ha il denominatore che va a 0, dunque le quadre a infinito, e tutti i termini cooperano a rendere simmetrica sull'apertura il campo. Questo si ha, quando $h = \lambda/4$: semplicemente, regolando dunque la profondità del solco in questa maniera.

Questa antenna presenta diversi vantaggi: permette di avere un'ottima simmetria, dunque è ottimo quando servono buone prestazioni e bassa polarizzazione incrociata; inoltre, anche aumentando l'errore di fase, il comportamento resta regolare: il guadagno si abbassa, dal momento che il fascio si allarga, ma i lobi secondari tendono a rimanere bassi. Un altro vantaggio di questo genere di antenne è il fatto che essa è a larga banda, ossia ha una banda circa del 50%; questa cosa potrebbe sembrare strana, dal momento che in realtà si ha un solco che deve essere $\lambda/4$.

Vediamo questa cosa, in concomitanza con alcune note sulla realizzazione pratica di questo tipo di antenna. Prima di tutto, è necessario ricordare quale sia l'andamento della Z_T al variare dell'angolo considerato, ossia di h: dire che si ha variazione con kh significa che si varia sia con h, sia con la frequenza f; bisogna dunque identificare quale sia la zona ottima sotto il punto di vista del comportamento dell'antenna.

Come noto, la tangente ha un andamento di questo tipo. Avere una guida corrugata significa introdurre tendenzialmente una discontinuità, dal momento che si ha prima una normale guida d'onda, poi la parte corrugata che, secondo il modello "macroscopico" da noi inserito, ha un comportamento ben diverso. L'idea potrebbe essere quella di adattare le due sezioni, introducendo una transizione più graduale. L'idea potrebbe dunque essere quella, a intuito, di introdurre prima solchi più corti, per poi terminarli in quelli da $\lambda/4$; questa è una pessima idea, dal momento che in realtà solchi più corti hanno un comportamento di tipo induttivo. Quando si ha a che fare con un comportamento di tipo induttivo, si ha che il campo tende ad addensarsi ai bordi, cosa non molto felice, dal momento che di solito per avere tapering si vuole un campo basso ai bordi; per questo, sarebbe più utile avere una superficie di tipo capacitivo. Ciò che si deve fare per avere effettivamente una condizione non tanto di ibrido bilanciato (se non per la frequenza più fortunata), quanto una di superficie capacitiva (che fa funzionare più o meno bene l'antenna), al fine di introdurre una corrugazione graduale l'idea contro-intuitiva ma corretta è quella di fare qualcosa del genere:

Si fa un solco più largo, nella fattispecie di solito fino a $\lambda/2$, il quale sicuramente non sarà induttivo; poi si tende a stringerli, fino ad arrivare al fatidico $\lambda/4$. Per allargare la banda è necessario fare in modo che il solco più lungo sia a $\lambda/2$ per la frequenza più alta, in modo che la frequenza possa solo diminuire rispetto al suo valore; se quindi si diminuisce f, fino ad arrivare a $\lambda/4$ per la frequenza minima, si ha l'assoluta certezza di rimanere in regione capacitiva.

Con una cosa del genere di sicuro non si riesce ad avere di sicuro una banda di un'ottava: si riesce a fare qualcosa del tipo:

$$\frac{f_{\max}}{f_{\min}} \sim 1,5$$

ossia, da 7 a 11 GHz, o cose di questa portata.

2.3 Modelli di calcolo approssimato del campo elettromagnetico

L'obiettivo di questa sezione è quello di introdurre metodi semplificati in grado di permettere la reirradiazione di un oggetto, come potrebbe essere un paraboloide. Verranno introdotti alcuni metodi, primo dei quali sarà l'ottica geometrica.

2.4 Ottica geometrica

Si tratta, come si può immaginare leggendo il titolo della sezione, di un modello semplificato per il calcolo del campo elettromagnetico, valido quando le dimensioni sono molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda λ dell'onda elettromagnetica (o, pure, molto piccole, nel caso si voglia considerare un'analisi per campo vicino). Si può vedere, con ipotesi semplificative, che è possibile ricavare le stesse leggi che gli ottici hanno ricavato per i fenomeni ottici, applicate al più vasto ambito dell'elettromagnetismo (che, al giorno d'oggi, racchiude l'ottica a tutti gli effetti come solo una delle proprie branche).

Le ipotesi semplificative che utilizzeremo sono sostanzialmente le seguenti:

- le superfici di fase per E e H sono le stesse;
- le ampiezze dei campi variano lentamente rispetto alla fase (ragionevole: la lunghezza d'onda nelle frequenze che abbiamo sono molto piccole, dunque con spostamenti spaziali minime la fase varia di centinaia di gradi).

Si consideri dunque un'espressione dei campi elettromagnetici in modulo e fase del tipo:

$$\underline{E}(\underline{P}) = \underline{E}_0(\underline{P})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\psi}$$

$$\underline{H}(\underline{P}) = \underline{H}_0(\underline{P})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\psi}$$

dove

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{\mathrm{c}}$$

Queste espressioni sono il prodotto di un vettore per uno scalare: il solo termine di ampiezza, e il solo termine di fase. k_0 è la costante di propagazione nel vuoto. ψ è la superficie a fase costante, dimensionata in metri (m); k_0 sarà ovviamente m^{-1}.

Consideriamo a questo punto le equazioni di Maxwell del rotore:

$$\begin{cases} \nabla \times \underline{E} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\underline{H} \\ \nabla \times \underline{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon\underline{E} + \underline{J}_{\text{conduzione}} \end{cases}$$

Si sostituiscano, in queste equazioni, le espressioni dei campi elettrico e magnetico; dal momento che si ha a che fare con operatori differenziali, imparentati con le derivate (in un contesto multidimensionale), tendenzialmente valgono le solite regole per la derivazione:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\psi}\nabla \times \underline{E}_0 + \underline{E}_0 \times \nabla\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\psi}\right\} = -\mathrm{j}\omega\mu_0\underline{H}$$

sviluppiamo l'espressione:

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\psi}\nabla \times \underline{E}_0 - \mathrm{j}k_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\psi}\underline{E}_0 \times \nabla\psi$$

dal momento che il gradiente dell'esponenziale è uguale a un esponenziale, moltiplicato per l'argomento, differenziando ancora la funzione di superficie, ottenendo questa espressione. Si sfrutta a questo punto l'ipotesi secondo cui la variazione dell'ampiezza è quasi nulla: questa sostanzialmente coincide col dire che, quando vi si applica un operatore differenziale, collegato al significato di "quantificazione della variazione", questo darà un risultato nullo. Si ottiene dunque:

$$\nabla\psi \times \underline{E}_0 - \frac{\omega\mu}{k_0}\underline{H}_0 \sim 0$$

dualmente, si può ricavare, operando nella stessa maniera:

$$\nabla\psi \times \underline{H}_0 - \frac{\omega\varepsilon}{k}\underline{E}_0 \sim 0$$

a questo punto si può ricavare dalla prima $\underline{H}_0$, sostituire nella seconda, e ottenere:

$$\underline{H}_0 = \frac{k_0}{\omega\mu}\nabla\psi \times \underline{E}_0$$

sostituendo questa nella seconda:

$$\nabla\psi \times (\nabla\psi \times \underline{E}_0)\frac{k^2}{\omega^2\mu\varepsilon} - \underline{E}_0 = 0$$

Si può recuperare a questo punto da un formulario la seguente espressione:

$$\underline{A} \times \underline{B} \times \underline{C} = \underline{B}\,(\underline{A} \cdot \underline{C}) - \underline{C}\,(\underline{A} \cdot \underline{B})$$

applicando questa, si ottiene:

$$(\underline{E}_0 \cdot \nabla\psi)\,\nabla\psi\underline{E}_0 - |\nabla\psi|^2\,\underline{E}_0 + n^2\underline{E}_0 = 0$$

da dove viene tutto ciò: n^2, ossia il coefficiente di rifrazione al quadrato, deriva dal fatto che k è in realtà k_0, ossia la costante di propagazione del vuoto; ciò fa ottenere:

$$\frac{k_0}{\omega^2\varepsilon\mu} = \frac{1}{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}}$$

dal momento che molto frequentemente $\mu_\mathrm{r} = 1$, si ottiene ciò.

Recuperiamo le equazioni della divergenza, dalla equazioni di Maxwell: dal momento che, come detto, applicare operatori differenziali ai campi coincide con l'ottenere variazioni trascurabili, si ha:

$$\nabla\psi \cdot \underline{E}_0 = 0$$

dunque:

$$|\nabla\psi|^2\,\underline{E}_0 = n^2\underline{E}_0$$

dal momento che il campo elettrico è non nullo, si può "semplificare" e ottenere:

$$|\nabla\psi|^2 = n^2$$

Questa è la cosiddetta "equazione dell'eiconale", e la funzione ψ è detta "funzione eiconale". Dalla dimostrazione, è stato possibile dedurre alcune cose:

- $\underline{E}_0$ e $\underline{H}_0$ sono vettori trasversali rispetto a $\nabla\psi$, ossia al gradiente della funzione eiconale; il gradiente, per le proprietà del gradiente, è normale alla superficie, ossia alla grandezza di cui si calcola il gradiente; $\underline{E}$ e $\underline{H}$ saran trasversali a esso;

- abbiamo trovato questa equazione, detta equazione dell'eiconale, che è l'equazione che lega la variazione della superficie a fase costante con l'indice di rifrazione; se sappiamo come varia l'indice di rifrazione nel mezzo e abbiamo un primo fronte d'onda, riusciamo a ricostruire le posizioni dei fronti d'onda successivi e dunque a determinare idee sulla propagazione;

- a partire dalle equazioni di Maxwell modificate, si può vedere che:

  $$k_0\underline{E}_0 \times \nabla\psi = \omega\mu\underline{H}_0$$

  questo significa che $\underline{H}_0$ è perpendicolare a $\underline{E}_0 \times \nabla\psi$, dunque i tre vettori $\underline{E}_0$, $\underline{H}_0$, $\nabla\psi$ rappresentano una terna ortogonale.

Quest'ultima osservazione permette di trarre conclusioni anche di tipo energetico: siccome $\underline{E} \times \underline{H}$ è parallelo a $\nabla\psi$, il flusso di potenza sarà perpendicolare alle superfici di fase.

2.4.1 Definizione di raggio

Prima di andare avanti con le definizioni di ottica geometrica, fondamentale è introdurre la definizione di raggio. Data una superficie di fase ψ_1 e un punto su di essa, si può tracciare la sua normale $\hat{n}$; il fronte d'onda si sposterà lungo la normale di un certo spazio in un certo tempo, arrivando in un altro punto, appartenente a una ψ_2; traccio la normale qua, e così via all'infinito. Si trova una successione di punti dati dall'intersezione della normale alla superficie con il fronte d'onda successivo; se il mezzo è non omogeneo, le superfici di fase successive sono sostanzialmente arbitrarie, dunque il fronte d'onda potrebbe variare e le normali incurvarsi. Il raggio è il luogo delle normali alle superfici di fase passante per un punto, nella superficie di fase originaria. Nel caso di mezzo non omogeneo, il raggio non è una retta (di solito). In mezzi omogenei, è una retta.

Il raggio è una linea che varia la propria direzione a seconda del mezzo, della disomogeneità del mezzo. È possibile ricavare una relazione tra le caratteristiche del mezzo e il raggio di curvatura del raggio (dove per raggio di curvatura si intende, come si dirà in seguito, il raggio della circonferenza osculatrice il luogo del raggio dell'onda elettromagnetica).

Si può vedere che il raggio è sempre diretto nella direzione in cui il gradiente dell'indice di rifrazione è positivo, e questa è la generalizzazione di noti principi di ottica; si pensi al fenomeno di rifrazione:

Dati tre mezzi, posposti al vuoto con tre coefficienti di rifrazione $n_{0\div 3}$, dove $n_0 < n_1 < n_2 < n_3$, dunque con gradiente dell'indice di rifrazione positivo verso destra, mandando un raggio su n_0 verso destra, il raggio rifratto tenderà ad abbassarsi, raggiungendo asintoticamente (con l'aumentare di n) la curvatura del gradiente; questa cosa si può vedere dalla seconda legge di Snell, dal momento che:

$$n_0 \sin \vartheta_{\text{incidente}} = n_1 \sin \vartheta_{\text{rifratto}}$$

e da qua recuperando le ipotesi sugli n_i il risultato è ovvio.

Questa cosa è interessante perchè permette di avere un'idea su come funziona la propagazione su mezzi stratificati; un esempio duale a questo è quello dell'atmosfera, in cui si ha un gradiente positivo verso il basso del coefficiente di rifrazione (a causa della maggior presenza di particelle, di umidità e così via); questa cosa ha delle implicazioni importanti sulla propagazione delle onde elettromagnetiche per esempio sull'atmosfera! Se dunque si manda un raggio inclinato nell'atmosfera, questo tende a inclinarsi verso il basso; questo fa sì che le onde elettromagnetiche non si propaghino in modo equilibrio, ma vadano dietro l'orizzonte: l'orizzonte elettromagnetico è diverso da quello geometrico.

Esistono in realtà altre condizioni per cui il raggio sia rettilineo, nonostante il mezzo non sia omogeneo: nel caso in cui infatti si abbia un mezzo tale per cui $\nabla\psi$ è parallelo a ∇n, dove n è ovviamente il coefficiente di rifrazione, si ha comunque la suddetta condizione.

2.4.2 Tubo di flusso

Una volta definito il concetto di raggio, è possibile passare alla definizione di un secondo concetto fondamentale per lo studio dell'ottica geometrica: quello di "tubo di flusso".

Come detto precedentemente, i raggi sono sostanzialmente linee di flusso dell'energia; si considerino dunque due superfici di fase ψ_1 e ψ_2, le quali potrebbero per esempio essere le equazioni di un piano o di una sfera, dunque consideriamo sulla ψ_1 una linea chiusa e tracciamo un raggio da tutti i punti considerati su di essa; ora non si ha più una linea, ma una superficie, chiusa anch'essa: questa assomiglia sostanzialmente a un tubo. Questa sorta di tubo viene chiamata "tubo di flusso", e si può vedere che attraverso le pareti laterali di questo non vi è flusso di potenza, dal momento che il vettore di Poynting è parallelo al raggio, quindi calcolare il flusso del vettore di Poynting attraverso questa superficie del tubo porterebbe a un risultato nullo: non vi sono raggi che vanno nella direzione della normale al tubo, quindi il prodotto scalare con $\hat{\mathrm{n}}$ sarebbe nullo. Si consideri a questo punto la seconda superficie, ψ_2, e considerando il tubo di flusso che va a finire su questa vi sarà un altro contorno, tendenzialmente differente dal precedente. Da questo concetto, è possibile dire che se il mezzo è senza perdite, il flusso del vettore di Poynting $\underline{S}$ attraverso questa superficie è nullo. Come mai? Beh, si considerino tre contributi di superficie: la superficie S rappresentante il tubo vero e proprio, le "pareti" del tubo; A_1, ossia l'area della linea chiusa su ψ_1; A_2, ossia l'area della seconda linea chiusa, su ψ_2; per queste aree, la normale è definita normalmente verso l'esterno; si consideri una variante al disegno e al problema, secondo cui tutte le normali sarebbero definite nello stesso verso, per esempio tutte "verso destra" invece che come da norma verso l'esterno del flusso; da una situazione per cui si ha che $\hat{\mathrm{n}}_1 \sim \hat{\mathrm{n}}_2$, nel senso che sono equiverse, si ha qualcosa del tipo$\hat{\mathrm{n}}_1 \sim -\hat{\mathrm{n}}_2$, ossia di verso opposto. Fatte queste ipotesi, si può dire che:

$$\int_{S+A_1+A_2} \underline{S} \cdot \hat{\mathrm{n}} \mathrm{d}A = 0$$

questo, dal momento che il mezzo è senza perdite; scomponendo questo integrale, si può dire qualcosa del tipo (tenendo conto che l'integrale su S è nullo):

$$\int_{A_1} \underline{S} \cdot \hat{\mathrm{n}}_1 \mathrm{d}A = \int_{A_2} \underline{S} \cdot \hat{\mathrm{n}} \mathrm{d}A$$

Questa formula rappresenta il concetto della conservazione dell'energia nei tubi di flusso; ciò ci permette di capire come cambi il campo lungo il raggio: dato un mezzo omogeneo in cui i raggi siano rette, considerando una superficie elementare e un raggio centrale, passante per un certo punto P_1, su ψ_1 considero due segmenti infinitesimi $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ che identificano un'area pseudorettangolare (non rettangolare dal momento che ψ_1, nel caso più gnerale, potrebbe essere una superficie curva.

Come si è accennato precedenza, dato un punto P_1, è possibile identificare per esso il raggio di curvatura della superficie nel suddetto punto. La cosa purtroppo non è semplice come per il caso della semplice curva: nel caso di una curva, si può pensare al raggio di curvatura come a quel segmento che rappresenta il raggio della miglior circonferenza rappresentante la curvatura della funzione nel suddetto punto; in altro modo, si può dire, data $\hat{\tau}$ la direzione della retta tangente a un punto di una curva, n̂ la sua normale, dati un punto P e un punto $P + \mathrm{d}P$ adiacente (nel senso di infinitesimamente vicino) a P, l'intersezione delle due rette sulle direzioni delle due normali è proprio questo centro di curvatura. In una superficie non sferica si ha tuttavia che un punto può essere attraversato da curve la cui curvatura è diversa, dunque la cui circonferenza osculatrice è diversa: vi saranno infiniti raggi, e diversi centri per la circonferenza, dunque il problema in questo caso non è molto ben definito.

Quello che si fa è considerare diversi centri, associati a diversi raggi; un buon criterio potrebbe essere quello di considerare un $\varrho_{\max}$ e un $\varrho_{\min}$ di curvatura, in modo che si possano determinare i centri nelle situazioni limite. Si definiscono i "raggi principali di curvatura" come quelli massimo e minimo; le direzioni di questi vengono dette "direzioni principali"; si può dimostrare che queste due siano tra loro ortogonali.

Per comprendere meglio questo concetto si può utilizzare un concetto geometricamente simile: il cilindro. Un cilindro si può tagliare con piani a diversa angolazione rispetto all'asse: se il piano è ortogonale all'asse, allora ciò che si ottiene sarà un cerchio; man mano che si tende ad avere un angolo meno pronunciato, si ottiene un cono sempre più "ripido", per poi avere, quando piano e asse sono paralleli, una retta. Nel caso del cilindro, $\varrho_{\min}$ è il raggio del cilindro, $\varrho_{\max}$ è ∞, dal momento che è la retta.

Ripartiamo dai ragionamenti introdotti su ψ_1, e scegliamo $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ come corrispondenti con le direzioni principali (quelle dunque per cui si han raggi minimo e massimo); in questa maniera, si ha:

$$\mathrm{d}x_1 = \varrho_{1,1}\mathrm{d}\alpha$$

Cosa significa ciò? Per la superficie ψ_1 (pedice "1" indica la superficie ψ_1), si può dire che l'ampiezza dell'intervallo $\mathrm{d}x_1$ sia pensabile come a un raggio $\varrho_{1,1}$ (primo pedice per la superficie, secondo per discriminare il raggio minimo da quello massimo), moltiplicato per un certo angolo $\mathrm{d}\alpha$; stessa cosa si può dire per l'altro raggio, $\varrho_{1,2}$, in cui in questo caso il pedice 2 indica che si parla dell'altro raggio, ma sempre associato alla ψ_1:

$$\mathrm{d}y_1 = \varrho 1, 2\mathrm{d}\beta$$

dove dβ è un altro angolo. Si può in questa maniera calcolare l'area come:

$$\mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1 = \varrho_{1,1}\varrho_{1,2}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

Questo è quanto per ψ_1; cosa si può dire per ψ_2 ? Sostanzialmente, la stessa cosa:

$$\mathrm{d}x_2 = \varrho_{2,1}\mathrm{d}\alpha$$

$$\mathrm{d}y_2 = \varrho 2, 2\mathrm{d}\beta$$

alcune osservazioni: considerando che gli angoli si preservino, si ha questa espressione; i raggi sono variati, però si può considerare il fatto che dal punto P_1 nella area infinitesima ψ_1 si considera il punto P_2 nell'area infinitesima ψ_2; se tutto è omogeneo, prolungando i raggi, che sono rettilinei per ipotesi, si ottiene che:

$$\mathrm{d}x_2 = (\varrho_{1,1} + p)\,\mathrm{d}\alpha$$

$$\mathrm{d}y_2 = (\varrho_{1,2} + p)\,\mathrm{d}\beta$$

dal momento che i ϱ ora sono comuni, chiamiamoli semplicemente ϱ_1 e ϱ_2 (non è più necessario discriminarli per le superfici); si ha dunque:

$$\mathrm{d}x_2 = (\varrho_1 + p)\,\mathrm{d}\alpha$$

$$\mathrm{d}y_2 = (\varrho_2 + p)\,\mathrm{d}\beta$$

dunque

$$\mathrm{d}A_2 = (\varrho_1 + p)(\varrho_2 + p)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

A cosa è servito tutto ciò? Beh, siamo interessati per esempio a fare considerazioni energetiche, dal momento che stiamo facendo ragionamenti sui tubi di flusso; come noto, si ha che:

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}^*$$

ma, dalle relazioni viste precedentemente, essendo il campo magnetico derivante da quello elettrico a partire da un prodotto esterno, per la relazione di impedenza, si ha che:

$$\underline{H} = \frac{1}{Z_0}\hat{\mathrm{n}} \times \underline{E}$$

si ha che:

$$|\underline{S}| = |\underline{E}|^2 \frac{1}{Z_0}$$

però si ha che:

$$\hat{\mathrm{n}} \cdot \underline{S} = |\underline{S}|$$

l'integrale di flusso dunque si riconduce banalmente alla seguente espressione: il vettore di Poynting è semplicemente quello valutati nei punti P_1 e P_2, dunque, riprendendo la relazione integrale:

$$\int_{A_1} \underline{S} \cdot \hat{\mathrm{n}}_1 \mathrm{d}A = \int_{A_2} \underline{S} \cdot \hat{\mathrm{n}} \mathrm{d}A$$

questa diventa semplicemente l'area, moltiplicata per i vettori di Poynting nei punti P_1 ($|\underline{S}_1|$) e P_2 ($|\underline{S}_2|$), ottenendo:

$$\frac{1}{Z_0}|\underline{E}_1|^2 \varrho_1\varrho_2 \mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta = \frac{1}{Z_0}|\underline{E}_2|^2 (\varrho_1 + p)(\varrho_2 + p)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta$$

semplificando il semplificabile, si può ricavare banalmente:

$$|\underline{E}_2| = |\underline{E}_1|\sqrt{\frac{\varrho_1\varrho_2}{(\varrho_1 + p)(\varrho_2 + p)}}$$

Questa è la relazione tra le ampiezze dei campi lungo un raggio. Questa relazione riguarda di fatto il solo modulo del campo; cosa si può dire rispetto alla fase? Beh, la fase è sostanzialmente legata, come visto precedentemente, alle superfici; si era infatti detto che:

$$\underline{E}(\underline{P}) = \underline{E}_0(\underline{P})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\psi}$$

$$\underline{H}(\underline{P}) = \underline{H}_0(\underline{P})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\psi}$$

si può vedere, dalla prima, che i due campi saranno:

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_{0,1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\psi_1}$$

$$\underline{E}_2 = \underline{E}_{0,2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0\psi_2}$$

dunque, è possibile semplicemente estendere la precedente formula, dicendo che:

$$\psi_2 - \psi_1 = p$$

dunque

$$\underline{E}_2 = \underline{E}_1 \sqrt{\frac{\varrho_1 \varrho_2}{(\varrho_1 + p)(\varrho_2 + p)}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 p}$$

Si noti che si ha qualche problema: se $p = -\varrho_1$ o $p = -\varrho_2$ (cosa possibilissima visto che questa formula funziona anche "andando indietro": si devono calcolare campi elettromagnetici in qualsiasi direzione), si hanno delle singolarità. Se nella fattispecie si passa per i centri, dunque, il denominatore va ad annullarsi, la funzione esplode, e si trovano valori del campo elettromagnetico estremamente elevati, cosa che non ha senso sotto il punto di vista fisico. Questi punti sono detti "punti di caustica", e sono i punti per i quali l'ottica geometrica non è più un modello valido per il calcolo del campo elettromagnetico. Questi punti rappresentano l'intersezione tra raggi adiacenti.

Può capitare, in determinati casi, che $\varrho_1 = \varrho_2$: questo accade quando il fronte d'onda è localmente sferico; in questi casi si ha un fuoco, e ∞^2 raggi.

La formula appena vista può essere utilizzata anche a grande distanza, ossia per $p \to \infty$; in questa situazione:

$$|\underline{E}_2| \sim \frac{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}}{p} |\underline{E}_1|$$

Questa formula ci dice due cose:

- il campo a grande distanza si comporta come un'onda sferica;
- l'intensità del capo è proporzionale alla radice del prodotto dei due raggi di curvatura; nota la forma d'onda dunque si può capire dove c'è più campo o meno campo.

Nel caso l'onda fosse piana, i tubi di flusso sarebbero tutti paralleli tra loro, dal momento che tutte le normali sarebbero parallele alla superficie piane; essendo i tubi paralleli, non si avrebbe attenuazione, dal momento che le sezioni dei tubi di flusso sarebbero costanti. Si potrebbe dire che la densità di potenza sia inversamente proporzionale alla sezione dei tubi di flusso: più si allargano i tubi di flusso, meno densità di potenza si ha; questo è ovvio, dal momento che se la densità di potenza è costante, si allarga l'area, e flusso si riduce.

Vediamo, sotto un altro punto di vista, questa leggi: sembrerebbe che il campo in un punto dipenda solo dal campo in un altro punto; precedentemente si era parlato di integrale di irradiazione, attribuendovi un significato fisico prossimo a quello del principio di Huygens-Fresnel: il campo era pensabile come dato da un contributo di infinite ondine. I due concetti in realtà non sono discordi, a patto di introdurre ovviamente delle approssimazioni; questa cosa si può dimostrare, per esempio, mediante metodi di risoluzione approssimata di integrali complessi, come il metodo di fase stazionaria.

2.4.3 Metodo di fase stazionaria

Si consideri una funzione complessa, e si supponga di doverne fare l'integrale definito; per semplicità, si supponga che il dominio di integrazione sia un semplice intervallo $[a, b]$:

$$\int_a^b A(x)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi(x)}\mathrm{d}x$$

dove A è la funzione dell'ampiezza, ϕ la funzione rappresentante l'andamento della fase. Su queste funzioni, reali, si fanno le seguenti ipotesi:

- si ipotizza il fatto che $\phi(x)$ vari rapidamente;
- si ipotizza il fatto che $A(x)$ vari lentamente.

Queste ipotesi sono assolutamente ragionevoli a frequenza elevata, dal momento che le lunghezze d'onda λ sono piccole, dunque per variazioni anche piccole dello spazio si hanno comunque variazioni di diverse lunghezze d'onda, facendo dunque fare diversi giri alla fase.

Si consideri un andamento della fase, in questo intervallo, di questo tipo:

si hanno sostanzialmente due tipi di andamenti: o punti stazionari, ossia massimi o minimi relativi, o andamenti lineari.

Dal momento che si ha a che fare con un'operazione di integrazione, è possibile suddividere l'intervallo di integrazione in diversi contributi. Ciò che si può fare dunque potrebbe essere dividere le ordinate rappresentanti la fase in intervalli di 2π, ossia di un "giro" della fase, identificando, a partire da un certo riferimento arbitrario a meno del quale si può definire la variazione di fase, il valore della fase in ciascun punto dell'intervallo. Si consideri un sottointervallo $[x_1, x_2]$, per cui l'ampiezza è circa costante (come secondo ipotesi), e la fase vari in maniera circa lineare; questo significa che:

$$\phi(x) \sim \alpha(x - x_1)$$

dove

$$\alpha = \frac{2\pi}{x_2 - x_1}$$

si introduca a questo punto un cambio di variabile: $\psi = \alpha(x - x_1)$, in modo che:

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\mathrm{d}\psi$$

l'integrale diventa:

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\mathrm{d}\psi = 0$$

ossia, si ha la somma di tanti vettorini che formano un giro completo, annullando l'integrale.

Cosa abbiamo imparato? Sostanzialmente, dove la fase è fortemente variabile, l'integrale vale 0. Questo, dal momento che supponiamo che la fase è ad andamento lineare, significa che per ogni intervallino in cui la variazione di fase è lineare, è possibile dire che il contributo all'integrale sia nullo.

Si ha a questo punto la seconda situazione, quella per cui si ha un punto stazionario per la fase; in questa situazione, come vedremo, l'integrale non è più nullo. Quello che si fa per approssimare i contributi di questi integralini è supporre che l'andamento della fase in queste zone sia di tipo quadratico; dato x_s il punto di stazionarietà della fase, si ha:

$$\psi(x) \sim \beta(x - x_\mathrm{s})^2$$

con un opportuno cambio di variabili, dunque, si ottiene un integrale del tipo:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta x^2}\mathrm{d}x$$

si supponga a questo punto di approssimare questo calcolo al seguente: invece che integrare nel solo intervallino, lo si faccia per l'intera retta reale:

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta x^2}\mathrm{d}x$$

Questo è un integrale noto, dal momento che è un integrale di Fresnel. Il passaggio è giustificabile ragionando sul fatto che un integrale di quel tipo è rappresentabile come:

$$\int_{-t}^{t} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta x^2} \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{t} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta x^2} \mathrm{d}x$$

focalizziamoci sul solo integrale ignorando il 2; si può espandere secondo la formula di Eulero l'esponenziale, ottenendo qualcosa del tipo:

$$\int_{0}^{t} \left(\cos \beta x^2 + \mathrm{j} \sin \beta x^2\right) \mathrm{d}x$$

si può dimostrare che la funzione integrale sia del coseno sia del seno con argomento quadratico han un andamento oscillante attorno a un certo valore che tende a regime piuttosto rapidamente; spesso si tende a mostrare queste funzioni integrali anche in ambito bidimensionale, su di un diagramma polare, ottenendo la cosiddetta "spirale di Cornu". Il fatto di avere dunque argomenti di integrazione sufficientemente larghi permette di approssimare bene l'integrale con un integrale di Fresnel estendendo come detto gli estremi di integrazione alla retta reale.

Cosa emerge da questo teorema? Nel calcolo dell'integrale di irradiazione come quello che siamo abituati a fare, sappiamo dire che il contributo principale di questo integrale deriva dai punti in cui la fase è stazionaria. Applicando il principio di Huygens-Fresnel, considerando una superficie di fase e un punto di osservazione, e andando a vedere l'espressione dell'integrale di irradiazione, applicando il teorema di equivalenza sulla superficie avrò su di essa varie correnti, ne calcolerò l'irradiazione nei vari punti, e si trova che il punto di stazionarietà è proprio quello dove c'è la normale della superficie: il punto da cui passa la normale alla superficie è quello a distanza minima, e quindi è proprio il punto dove passa il raggio: il punto il cui campo sarà quello più significativo.

Manca purtroppo un'osservazione: cosa accade agli estremi a e b? Beh, non è purtroppo detto che agli estremi la fase abbia fatto un giro completo, e dunque che la fase termini proprio su un multiplo di 2π; si parla degli estremi come di "punti di stazionarietà del secondo ordine". Come vedremo in seguito parlando di propagazione, anche questi punti danno luogo alla generazione di un campo, ma con significato fisico leggermente diverso: i punti di prima specie sono legati al significato fisico dell'ottica geometrica, mentre gli altri a campo diffratto, o "scatterato".

Supponendo di avere uno spigolo in mezzo al punto per cui si ha diffrazione, dal punto P_1 parte un insieme di raggi, alcuni dei quali colpiranno l'ostacolo, ottenendo uno scattering del campo; al punto P_2 vi saranno dunque due contributi di campo: quello principale direttamente derivante da P_1, e quello diffratto dall'ostacolo. La cosa più interessante è quella di considerare però un punto P_3 coperto dall'ostacolo: come si può vedere, in questo caso in questo punto non si avrebbe campo diretto, ma si avrebbe comunque campo: questo è campo scatterato, diffratto dall'ostacolo. Per questo punto dunque non esiste un punto di stazionarietà del primo tipo, dal momento che la fase avrebbe un andamento completamente monotono. Questo significa che l'integrale non è nullo, ma si hanno altri contributi, che derivano solamente dagli "estremi".

2.4.4 Principio di Fermat

A questo punto si vuole introdurre, in ambito elettromagnetico, un teorema noto in ambito ottico com "Principio di Fermat".

Dati due punti P_1 e P_2, come si può immaginare, esistono infiniti cammini che li possono collegare. Di tutti i cammini, il cammino ottico è definito come:

$$\int_{l_{P_1 \to P_2}} n \mathrm{d}l$$

dove n è l'indice di rifrazione funzione del punto; a seconda del percorso considerato, l'integrale di linea varia il proprio valore. Il principio di Fermat afferma che il cammino ottimo reale è quello minimo, ossia quello per cui la linea di integrazione si riconduce a un banale intervallo:

$$\int_{P_1}^{P_2} n \mathrm{d}l$$

dunque a una retta (quantomeno, tutto ciò, per un mezzo omogeneo; per un mezzo non omogeneo non si ha per forza un intervallo, ma un cammino). Questo principio può essere applicato in diverse maniere.

Un risultato noto che si potrebbe ricavare mediante questo principio sono le leggi di Snell (o di Descartes, a seconda della letteratura considerata).

Di tutti i possibili raggi, qual è quello che percorre il cammino minimo per andare da P_1 a P_2, passando per la superficie? Consideriamo per esempio due raggi adiacenti: le condizioni che rendono stazionaria la differenza tra i due cammini sono sostanzialmente coincidenti con l'imposizione del differenziale della funzione "differenza" dei cammini nulla. Si ha:

$$p = R_1 + R_2$$

in un caso. Nell'altro caso, ossia quello in cui si considera il punto adiacente, si avrà che:

$$\mathrm{d}R_1 = \mathrm{d}R \sin \vartheta_{\mathrm{i}}$$

dove $\mathrm{d}R$ è lo spostamento infinitesimo sulla superficie di riflessione, ϑ_{i} l'angolo di incidenza, e $\mathrm{d}R_1$ l'incremento nel percorso di incidenza, supposto che il punto P_1 sia a una distanza tale da poter pensare che l'angolo di incidenza sia uguale sia sul punto R sia sul punto $R + \mathrm{d}R$. Per quanto riguarda l'angolo riflesso:

$$\mathrm{d}R_2 = \mathrm{d}R \sin\vartheta_{\mathrm{r}}$$

dunque:

$$\mathrm{d}R = \mathrm{d}R \sin\vartheta_{\mathrm{i}} - \mathrm{d}R \sin\vartheta_{\mathrm{r}}$$

al fine di trovare il minimo è necessario, come noto dall'analisi, annullare la derivata, il differenziale, e dunque ottenere banalmente:

$$\sin\vartheta_{\mathrm{i}} = \sin\vartheta_{\mathrm{r}}$$

questa è la nota prima legge di Snell. Per la seconda legge di Snell, ossia per la legge della rifrazione, si può fare qualcosa di simile: in questo caso il cammino totale è:

$$n_1 R_2 + n_2 R_2$$

si può fare lo stesso ragionamento, trovando:

$$n_1 p_1 + n_2 p_2 + \mathrm{d}R n_1 \sin\vartheta_{\mathrm{i}} - \mathrm{d}R \sin\vartheta_{\mathrm{t}}$$

annullando il differenziale:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\vartheta_{\mathrm{t}}}{\sin\vartheta_{\mathrm{i}}}$$

Quelle viste finora sono possibili applicazioni del principio di Fermat, ma di sicuro non è per ricavare le leggi di Snell che lo abbiamo ripreso; il principio di Fermat in pratica è utile al fine di determinare i punti di riflessione in casi complessi, ossia data una superficie arbitraria. Questo può essere utilissimo in casi pratici, nella fattispecie quando si intende studiare antenne a riflettore, ossia antenne in cui una antenna fungente da illuminatore "illumina" l'antenna irradiandovi sopra un campo elettromagnetico, per poi vedere cosa torna indietro.

Si supponga di avere qualcosa del genere:

Data una antenna a tromba come illuminatore, generatrice del campo primario, come si fa a studiare il campo irradiato? Esistono diversi metodi, e uno di questi è proprio quello di utilizzare l'ottica geometrica: dato un piano, mediante il teorema di equivalenza vi si calcolano sopra i campi, si passa alle correnti equivalenti e dunque si studia l'irradiazione. Per calcolare i campi su questo piano, tuttavia, risolvere integrali è decisamente improponibile: quello che si fa è ricorrere all'appena spiegata ottica geometrica, ossia avere un certo campo diretto, campi riflessi, e usare questo metodo approssimato per ottenere risultati ragionevoli.

2.4.5 Introduzione alle antenne ad apertura

Il nostro input, cioè quello che conosciamo, è il tipo di superficie che abbiamo a che fare, e quale sia l'onda incidente sulla superficie riflettente; quello che vorremmo conoscere è l'onda riflessa, della quale si vorrebbero conoscere:

- le direzioni dei raggi;
- i raggi principali di curvatura (al fine di poter applicare la formula dell'ottica geometrica e capire come il campo si attenua lungo il raggio);
- la direzione della polarizzazione.

Ciò caratterizza il fronte d'onda in uscita dal sistema.

Aver a che fare con una superficie curva, come spesso si ha, porta altri problemi: una superficie di riflessione piana infatti non "deforma" i fronti d'onda.

A seconda del punto di incidenza infatti cambia la normale, dunque l'angolo di incidenza, dunque cambierà la direzione di riflessione; il raggio incidente non andrà più dunque in posizione simmetrica rispetto a quella incidente o, meglio, lo sarà ma rispetto alla normale interessata.

Vogliam conoscere:

- il punto di riflessione, che si può conoscere per esempio mediante il principio di Fermat;
- la superficie e il coefficiente di riflessione sulla superficie;
- i raggi principali di curvatura sul riflettore;
- i raggi principali di curvatura dell'onda incidente;
- la direzione del raggio incidente;
- la polarizzazione dell'onda incidente.

Definizione della superficie di riflessione; superfici di rivoluzione

Tutto ciò è collegato all'onda incidente, alla superficie riflettente, all'interazione tra onda incidente e superficie.

Si parla continuamente di superficie; cosa si usa, però, come superficie? Beh, sostanzialmente, l'idea è quella di utilizzare un modello di tipo quadratico per la rappresentazione della superficie in questione; questo dunque potrebbe essere rappresentato mediante un'equazione di questo genere:

$$z = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right)$$

Questa semplicemente è l'espansione di Taylor (tridimensionale) della superficie; non vi sono termini del primo e del secondo ordine dal momento che si considera, al fine di poterli annullare, un sistema di riferimento definito nella seguente maniera:

- origine del sistema di riferimento posizionato sul punto P sulla superficie considerata;
- versore dell'asse $\hat{\text{z}}$ coincidente con la normale alla superficie nel punto P, $\hat{\text{n}}$.

In questo modo, per questioni di sistema di riferimento, i termini di ordine 0 e 1 sono nulli.

Di tutte le superfici di riflessione possibili, un caso sicuramente molto interessante è quello delle superfici di rivoluzione, ossia superfici che si ottengono ruotando una certa linea piana intorno a un asse. Data per esempio una linea sul piano xz, ruotandola, si ottiene qualcosa di questo tipo:

i punti a z costante sono detti "paralleli"; quelli a φ costante sono detti meridiani; si noti che, per i paralleli, i centri di curvatura non sono i centri dei paralleli: nel caso rappresentato sembrerebbe di sì, ma in generale il parallelo è perpendicolare all'asse z, ma la sua normale non lo è se non occasionalmente.

Dato un punto P sulla superficie, al fine di determinare i raggi principali di curvatura si tratta la normale, si tira un punto adiacente, si determina l'intersezione di due normali adiacenti, e questo si fa solo per la linea meridiana, non per tutta la superficie.

Per il parallelo, il centro di curvatura non è il centro del cerchio: il cerchio infatti è perpendicolare all'asse, dunque il centro di curvatura non può essere perpendicolare all'asse, dal momento che deve essere sulla normale alla linea. Si può ricavare che, guardando queste superfici parallele dal punto di vista dell'asse z, si vede ciò:

Si può identificare un punto P e un punto $P + \mathrm{d}P$; in questo caso ci si sposta lungo il parallelo, dunque il punto adiacente sarà, su di una circonferenza, un punto vicino. Essendo questa una superficie di rivoluzione, essa si fa ottenere prendendo una linea meridiana e facendola ruotare intorno all'asse; questo suggerisce che le normali alla linea meridiana si intersecano tutte sull'asse. Il centro di curvatura nella direzione ortogonale alla linea meridiana, ossia sulla direzione del parallelo, sarà l'intersezione tra la normale e l'asse del sistema. Sarà dunque il raggio del parallelo, diviso per il seno dell'angolo tra l'asse z e la normale, α:

$$R_2 = \frac{\varrho}{\sin\alpha}$$

(quando $\alpha = 90°$ viene 1, dunque è così). Si possono dunque determinare per queste superfici i raggi principali.

Per superfici di tipo più generale (ma sempre di rotazione), si può avere qualcosa di questo tipo:

$$z' = f(\varrho)$$

dove f è la funzione che esprime la superficie, e ϱ è la coordinata radiale:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

a partire da qua, è possibile determinare, definita:

$$g(\varrho) = 1 + f'(\varrho)$$

i raggi principali di curvatura:

$$R_1 = \frac{g^{\frac{3}{2}}(\varrho)}{f''(\varrho)}$$

$$R_2 = \frac{\varrho g^{\frac{1}{2}}(\varrho)}{f'(\varrho)}$$

Queste sono formule di geometria differenziale, che si possono ricavare dai libri di matematica. In questo caso, R_1 è il raggio di curvatura del profilo, R_2 il raggio di curvatura del meridiano (essendo il meridiano una delle direzioni principali). Se un riflettore è dunque una superficie di rivoluzione, mediante queste formule è possibile determinare immediatamente i raggi di curvatura principali. del suddetto riflettore.

Calcolo informazioni sul fronte d'onda riflesso

Vogliamo a questo punto determinare le caratteristiche del fronte d'onda riflesso note l'onda incidente e la superficie riflettente. I calcoli si possono fare in ogni caso; il calcolo che considereremo noi è quello in cui si fa coincidere una direzione delle direzioni principali dell'onda incidente e della superficie riflettente. Questo significa che:

in questo caso si richiede per esempio che il versore $\hat{x}$ dell'onda incidente e della superficie riflettente coincidano: si sceglie come piano del foglio una delle direzioni principali, e l'altra sarà quella ortogonale. Supporre che una delle direzioni principali coincida tra onda incidente e onda riflessa, significa supporre che il fronte d'onda avrà lo stesso (per il nostro esempio) $\hat{x}$ nell'onda incidente e nell'onda riflessa. Questo è un caso per esempio comune nel caso dell'onda sferica: nel caso dell'onda sferica parlare di direzioni principali non ha senso dal momento che sono tutte uguali, dunque si può scegliere come piano uno dei due, essendo $\hat{x}_i$ e $\hat{y}_i$ arbitrari. Considerando questa ipotesi, dobbiamo seguire tre step:

1. data la sorgente S, determinare il campo incidente nel punto R del riflettore: $\underline{E}_i(R)$;

2. dato il campo incidente sul riflettore $\underline{E}_i(R)$, determinare il campo riflesso, nel medesimo punto R, dal riflettore: $\underline{E}_i(R) \rightarrow \underline{E}_r(R)$; campo incidente e campo riflesso, tra loro, hanno una relazione dipendente dalla polarizzazione, e dal materiale del riflettore; nel caso il materiale sia metallico, il coefficiente di riflessione vale 1 o -1 (a seconda della polarizzazione dell'onda incidente);

3. dato $\underline{E}_r(R)$, determinare il campo riflesso in un punto di osservazione P.

Prima di tutto, proviamo a determinare i coefficienti di riflessione: nel caso più generale di materiali particolari, sarebbe necessario ragionare con le formule di Fresnel e determinare i coefficienti, dunque fare lo studio con le linee di trasmissione equivalenti; in questo caso, si può fare semplicemente il seguente discorso:

La condizione al contorno, in ogni caso, è quella che richiede che:

$$\hat{n} \times \underline{E} = 0$$

ossia, che il campo tangenziale alla superficie, essendo essa metallica, sia nullo. Si hanno due situazioni:

- nel caso di polarizzazione TE, si ha un campo incidente direzionato verso il verso uscente del foglio; questo significa che, affinchè il campo sulla superficie sia nullo, la direzione del campo elettrico riflesso sarà la stessa di prima, ma il verso sarà opposto; questo ci dice che $\Gamma = -1$;
- nel caso di polarizzazione TM, quella che si deve annullare è semplicemente la componente longitudinale del campo elettrico, dunque $\underline{E}_{\mathrm{r}} = \underline{E}_{\mathrm{i}}$, e dunque $\Gamma = 1$.

Fino a qua, dunque, abbiamo risolto i primi due punti; il terzo punto, ossia quello di determinare il campo elettrico derivante dalla riflessione in un punto di osservazione P è in realtà quello più complicato, ed è per questo che è fondamentale l'uso dell'ottica geometrica.

Le formule che si possono usare sono le seguenti:

$$\underline{E}_{\mathrm{r}}(P) = \underline{E}_{\mathrm{r}}(R)\sqrt{\frac{\varrho_1\varrho_2}{(\varrho_1 + p)(\varrho_2 + p)}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kp}$$

dove, si noti, i ϱ_i, nell'ambito del punto 3, sono i raggi di curvatura dell'onda riflessa, che dunque non sono noti: se per i raggi di curvatura dell'onda incidente infatti si può immaginare di aver tutto noto, per quella riflessa non è assolutamente pensabile qualcosa del genere, al punto in cui siamo arrivati.

Una formula che può tornare utile per determinare il campo, data un'antenna A, in un punto P, potrebbe anche essere la seguente: noto che

$$|\underline{S}| = \frac{|\underline{E}|^2}{Z_0}$$

e che

$$\underline{S} = \frac{P_{\mathrm{T}}G_{\mathrm{T}}(\vartheta, \varphi)}{4\pi R^2}$$

allora, si può determinare il modulo del campo come:

$$|\underline{E}| = \sqrt{\frac{Z_0 P_{\mathrm{T}} G_{\mathrm{T}}}{4\pi R^2}} \sim 5,5\frac{\sqrt{GP}}{R}$$

ricordando che $Z_0 = 120\pi\ \Omega$, e approssimando.

Tutto ciò vale per i primi due step ma, per il terzo, come già detto, ci servono i raggi di curvatura, ottenibili, come noto dalla definizione, come l'intersezione delle normali di due punti adiacenti. Prima di tutto è buona cosa definire il problema in maniera anche grafica:

Si possono identificare tre angoli fondamentali, dettanti l'incremento, rispetto agli angoli di partenza (ϑ_{i} e ϑ_{r}) che si hanno considerando il punto adiacente ($R + \mathrm{d}R$) invece che il punto R. L'obiettivo della dimostrazione è quello, prima di tutto, di determinare $\mathrm{d}R$, ossia l'infinitesima distanza tra i due punti adiacenti, come legata a tre angoli, e ai rispettivi raggi.

Descriviamo il problema: mediante la congiunzione delle prosecuzioni delle due normali nei due punti si può identificare C_{s}, ossia il centro di curvatura della superficie. Questo sarà approssimativamente uguale per il collegamento tra C_{s}, R e $R + \mathrm{d}R$, e chiamiamo ϱ_{s} il raggio collegante questi punti, $\mathrm{d}\psi$ l'angolo che si forma tra R, C_{s} e $R + \mathrm{d}R$. A partire dalla sorgente S, si possono identificare due raggi: uno che va da S al punto R del riflettore, l'altro a $R + \mathrm{d}R$; in questo caso, l'angolo differenza è $\mathrm{d}\vartheta_{\mathrm{i}}$ (essendo un angolo che va a variare l'angolo di incidenza rispetto alla normale su R, ϑ_{i}; ϱ_{i} è il suddetto raggio, collegante S a R. Si fa quindi una cosa analoga per quanto riguarda ciò che collega il punto di osservazione del campo riflesso P e R: se il raggio partisse da $R + \mathrm{d}R$ esso sarebbe più incurvato, dal momento che per la legge di Snell si deve avere $\vartheta_{\mathrm{r}} = \vartheta_{\mathrm{i}}$, però in questo caso ϑ_{i} è diverso dal momento che la normale del punto $R + \mathrm{d}R$ è diversa da quella del punto R; la congiungente dei due raggi (che sarà tendenzialmente all'interno della superficie) riflessi darà luogo al centro di curvatura del raggio riflesso, C_{r}, la cui distanza dal punto R è il raggio ϱ_{r}.

Mediante considerazioni goniometriche, è possibile identificare immediatamente il fatto che:

$$\mathrm{d}R = \varrho_{\mathrm{s}}\mathrm{d}\psi$$

ossia, il segmento congiungente R e $R + \mathrm{d}R$ è semplicemente approssimabile con il raggio, moltiplicandolo per l'angolo suddetto. Cerchiamo a questo punto altri modi di determinare $\mathrm{d}R$: un altro modo è a partire da φ_{i}; infatti, si può vedere che, supponendo che i raggi ϱ_{i} e il raggio che parte da un'ipotetica sorgente a grande distanza (dunque approssimabile come piana) siano, grazie alla grande distanza, paralleli, che si può legare il segmento che distanzia i due raggi (per ipotesi paralleli), pari a $\varrho_{\mathrm{i}}\mathrm{d}\vartheta_{\mathrm{i}}$ a $\mathrm{d}R$ come:

$$\varrho_{\mathrm{i}}\mathrm{d}\vartheta_{\mathrm{i}} = \mathrm{d}R\cos\vartheta_{\mathrm{i}}$$

In maniera assolutamente analoga, ragionando in modo assolutamente analogo con i raggi riflessi, si può infine trovare:

$$\varrho_{\mathrm{r}}\mathrm{d}\vartheta_{\mathrm{r}} = \mathrm{d}R\cos\vartheta_{\mathrm{r}}$$

Infine, manca un'ultima relazione: una relazione tra gli angoli. Quando passiamo da un raggio incidente a un raggio adiacente, vediamo che il raggio riflesso ha un angolo, nel caso in cui si sia in $R + \mathrm{d}R$, la seguente cosa: la normale, come si può vedere, si è ruotata dell'angolo $\mathrm{d}\psi$; questo angolo agisce in realtà due volte: sia aumentando l'angolo di incidenza, sia aumentando l'angolo di riflessione; si avrà dunque:

$$\mathrm{d}\vartheta_{\mathrm{r}} = \mathrm{d}\vartheta_{\mathrm{i}} + 2\mathrm{d}\psi$$

A questo punto, in quest'ultima equazione, sostituiamo le equazioni appena trovate:

$$\mathrm{d}\vartheta_{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{d}R\cos\vartheta\ pr}{\varrho_{\mathrm{r}}}$$

$$\mathrm{d}\vartheta_{\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{d}R\cos\vartheta_{\mathrm{i}}}{\varrho_{\mathrm{i}}}$$

$$\mathrm{d}\psi = \frac{\mathrm{d}R}{\varrho_{\mathrm{s}}}$$

dunque:

$$\frac{\mathrm{d}R\cos\vartheta_{\mathrm{r}}}{\varrho_{\mathrm{r}}} = \frac{\mathrm{d}R\cos\vartheta_{\mathrm{i}}}{\varrho_{\mathrm{i}}} + \frac{2\mathrm{d}R}{\varrho_{\mathrm{s}}}$$

il chè, tenendo conto che $\vartheta_{\mathrm{i}} = \vartheta_{\mathrm{r}}$ per la prima legge di Snell, riconduce alla seguente equazione:

$$\frac{1}{\varrho_{\mathrm{r}}} = \frac{1}{\varrho_{\mathrm{i}}} + \frac{2}{\varrho_{\mathrm{s}}\cos\vartheta_{\mathrm{i}}}$$

Si hanno delle formule che legano gli inversi dei vari raggi; dalla geometria, è noto che l'inverso di un raggio di curvatura è proprio detto "curvatura"; la cosa ha senso, dal momento che maggiore è l'inverso del raggio, maggiore sarà la curvatura (dal momento che a raggi più piccoli corrispondono circonferenze di curvatura maggiore, più "stretta").

Tutto ciò vale per il piano di incidenza, ossia per quel piano definito come il piano della normale e del raggio di incidenza. Nel piano perpendicolare al piano di incidenza, si può dimostrare, con gli stessi ragionamenti "girando la figura", che:

$$\frac{1}{\varrho_{\mathrm{r}}} = \frac{1}{\varrho_{\mathrm{i}}} + \frac{2\cos\vartheta_{\mathrm{i}}}{\varrho_{\mathrm{s}}}$$

infatti, considerando questa configurazione:

Si ha che i raggi in questo caso si cercano nella direzione ortogonale, e non più nella direzione prima utilizzata; ripetendo gli stessi passaggi, si dovrebbe poter trovare la formula appena scritta.

2.5 Metodi per l'analisi delle antenne a riflettore

Una volta terminata l'ottica geometrica, si può passare all'applicazione dell'ottica geometrica: un'analisi delle antenne a riflettore. Per dire due parole su di esse, si tratta di antenne tipicamente direttive, la cui superficie è tipicamente metallica (a parte casi particolari, come quelli dei satelliti, in cui per esempio si costruisce in fibra di carbonio); si ha un'antenna, detta "illuminatore" (o "feed"), che deve inviare un certo campo a un'altra apertura, in questo caso formata da una superficie, la quale rifletterà il campo, reirradiandolo. Il campo totale è dunque dato dalla somma di due componenti ma, se il riflettore è fatto secondo gli standard, il campo sarà prevalentemente quello scatterato.

Al fine di determinare il campo, esistono diverse tecniche; la prima potrebbe essere quella di determinare il campo a partire dall'integrale di irradiazione:

$$\underline{E}_{\mathrm{S}} = -\mathrm{j}\frac{Z_0}{2\lambda}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\int_A J_{\mathrm{t,S}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\underline{r}'\cdot\hat{R}}\mathrm{d}S$$

Il problema a questo punto è quello di conoscere l'integrando, nella fattispecie la J_{S}; esse dovranno in qualche modo essere determinate.

Una prima ipotesi che si introduce per lo studio del problema è quello di considerare l'illuminatore molto piccolo, dunque confrontabile a una teorica sorgente puntiforme; data questa ipotesi, è possibile applicare la formula:

$$E_{\mathrm{p}} = 5,5\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr}}{r}\sqrt{G(\vartheta,\varphi)P_{\mathrm{T}}}$$

Mediante questa formula, si può vedere come il campo si trasmette dall'illuminatore all'apertura, posta a distanza r da esso. Determinato il campo incidente, tuttavia, è necessario determinare le correnti, al fine di poterle integrare, introducendole nell'integrale di irradiazione; al fine di calcolare le correnti, ci sono almeno tre metodi (in realtà di più, noi ne presenteremo tre e useremo due): uno esatto, due approssimati.

Il metodo esatto sarebbe quello di risolvere un'equazione integrale: dato un punto e un $\underline{E}_{\mathrm{incidente}}$, le condizioni al contorno chiedono che:

$$\hat{\mathrm{n}} \times \underline{E}_{\mathrm{totale}} = 0$$

dove però $\underline{E}_{\mathrm{totale}}$ è dato dalla somma del campo incidente sulla superficie e quello generato dalle ipotetiche correnti superficiali presenti su di essa; dal momento che noi siamo interessati proprio a queste, questo metodo potrebbe piacerci. Dobbiamo scrivere che:

$$\underline{E}_{\text{totale}} = \underline{E}_{\text{incidente}} + \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\int_A \underline{\underline{G}} \cdot \underline{J}_{\mathrm{S}} \mathrm{d}S$$

Dove il secondo termine è il campo calcolato in modo esatto, mediante la funzione diadica di Green. Per la condizione al contorno:

$$0 = \hat{\mathrm{n}} \times \underline{E}_{\text{incidente}} + \frac{\mathrm{j}}{\omega\mu}\hat{\mathrm{n}} \times \int_A \underline{\underline{G}} \cdot \underline{J}_{\mathrm{S}} \mathrm{d}S$$

$\underline{\underline{G}}$ è nota, $\underline{J}_{\mathrm{S}}$ è l'incognita. Questa equazione prende il nome di "EFIE": Electric Field Integral Equation. È un metodo esatto, ma anche estremamente complicato.

2.5.1 Ottica fisica

Una formulazione approssimata per la determinazione delle correnti superficiali noto il campo incidente è l'ottica fisica. Essa è sostanzialmente basata su alcune ipotesi, la più importante delle quali è approssimare la superficie di incidenza del campo con il piano ad essa tangente; in questo modo, è possibile calcolare le correnti indotte tramite il campo magnetico, come:

$$\underline{J}_{\mathrm{S}} = \hat{\mathrm{n}} \times \underline{H}_{\text{totale}}$$

A questo punto analizziamo un secondo cosa c'è da fare, nel caso di onde TE e onde TM:

- per le onde TM, si ha che, data un'onda di questo genere incidente su di un piano metallico, si ha:

$$\underline{H}_{\text{totale}} = 2\underline{H}_{\text{incidente}}$$

- per le onde TE invece si ha:

$$\underline{H}_{\text{totale}} = 2\underline{H}_{\text{incidente}} \cos\vartheta_{\mathrm{i}}$$

Il fatto di approssimare con il piano tangente a essa la superficie, permette di utilizzare questo tipo di approccio. Ciò può essere più o meno accettabile, a seconda delle situazioni che capita di studiare. In totale, si può scrivere:

$$\underline{H}_{\text{totale}} = 2\hat{\mathrm{n}} \times \underline{H}_{\text{incidente}}$$

Questo modello, detto “ottica fisica”, fa approssimare la corrente della superficie curva con quella del piano tangente, purchè non si sia vicino ai bordi: quello che si avrebbe ai bordi, nel caso si volesse applicare l’ottica geometrica, sarebbe un andamento pressochè costante di densità di corrente, che poi si dovrebbe annullare appena usciti dal bordo, con una discontinuità spaziale; una cosa del genere, fisicamente, non ha senso. Il fatto che questa cosa non funzioni si può vedere anche sotto un altro punto di vista: quando siamo sul bordo, il raggio di curvatura non è definito, dal momento che i bordi non hanno un raggio di curvatura. Inoltre, se noi andassimo a vedere la distribuzione delle correnti su un semipiano, con un’onda incidente obliquamente, si han due casi, TE e TM:

- nel caso TM si ha che la corrente superficiale ai bordi tende a decrescere in maniera “smussata”: se si fa lo studio esatto della corrente sulla superficie le correnti nell’intorno del bordo tendono a 0 in questa maniera; questa cosa accade in frazioni di lunghezze d’onda, dunque l’errore si limita a una parte molto piccola della superficie.

- nel caso TE, si ha qualcosa di opposto: le correnti in questo caso, essendo equiverse al campo elettrico, quello che si vede è che le correnti tendono a crescere e a divergere (con però un’ordine di divergenza molto debole, come $1/\sqrt{\varrho}$, ottenendo una cosa diversa; questo capita dal momento che le correnti sono parallele al bordo, e tendono ad addensarsi, portando a questo tipo di comportamento.

C’è ancora un effetto, per entrambi i casi: anche “dietro” alla superficie in realtà si formano delle correnti, dal momento che le correnti indotte fanno da sorgenti loro stesse; si ha la corrente più “a punta”, divergente, accumulata, nel caso in cui essa sia parallela al bordo; nel caso sia perpendicolare, si ha ovviamente il contrario.

Se le antenne studiate sono sufficientemente grandi, questi errori sono sufficientemente trascurabili. L’ottica fisica fornisce risultati sufficientemente simili a quelli esatti, però bisogna comunque fare degli integrali, i quali spesso vanno calcolati numericamente, dal momento che bisogna “sommare” tutti i contributi sulla superficie parabolica, volta per volta approssimata localmente come un piano. Questi integrali non sono tutto sommato così semplici da calcolare, dal momento che le antenne a riflettore di solito non sono piane: di sicuro non sarà una cosa semplice come una trasformata di Fourier.

Questo metodo utilizza in parte l’ottica geometrica: si calcolerà il campo incidente mediante l’ottica geometrica, supponendo che la sorgente sia puntiforme (e dunque emetta un’onda sferica).

2.5.2 Metodo delle aperture

Il terzo metodo che viene utilizzato per risolvere questo tipo di problema è il metodo delle aperture. Questo metodo è fondamentalmente basato sull'applicazione del teorema di equivalenza in una posizione opportuna, in prossimità dell'antenna a riflettore. Si può avere qualcosa di questo genere:

Invece di calcolare il campo direttamente sulla superficie del paraboloide, la quale potrebbe essere addirittura fornita solo in forma numerica e non analitica, quello che si può fare è individuare un piano in maniera tutto sommato arbitraria, applicare su di esso il teorema di equivalenza, ottenendo:

$$\underline{J}_{\mathrm{S}} = \hat{\mathrm{n}} \times \underline{H}$$

$$\underline{M}_{\mathrm{S}} = \underline{E} \times \hat{\mathrm{n}}$$

Dal momento che il problema è stato in questo modo approssimato/ricondotto a un problema planare, in questa maniera gli integrali si riconducono a normali trasformate di Fourier, come prima. Noti dunque i campi elettromagnetici su queste superfici, è possibile, nota la normale al piano al quale si va ad applicare il teorema di equivalenza, determinare queste fatidiche correnti.

Come si fa però a determinare i campi che vi sono su questa superficie? Beh, fino a quando si parlava di aperture rettangolari, trombe o cose di questo genere, era tutto facile: si avevano delle ipotesi che adesso sarebbero irrealistiche, come quella di avere topografie di campo sostanzialmente approssimabili con quelle di monomodalità di una guida rettangolare/circolare; quello che si può fare ora per calcolare questi campi incidenti invece è usare ancora una volta l'ottica geometrica: considereremo un fascio di raggi che emerge dal nostro illuminatore, calcoleremo il campo incidente sulla superficie, il campo riflesso dalla superficie, e i raggi di curvatura dell'onda riflessa con le formule viste precedentemente (quelle dipendenti dai vari $\varrho_{\mathrm{i,r,s}}$), sperando che la superficie sia orientata ragionevolmente, in maniera da non dover ricorrere alle forme generali delle suddette formule.

Noto il campo incidente (e dunque anche il campo riflesso, essendo esso, nel punto di riflessione, semplicemente uguale e opposto a quello incidente, per le condizioni al contorno applicate alle onde piane TE e TM), quando questo campo riflesso incomincia a propagarsi, esso incomincia ad attenuarsi secondo i raggi di curvatura dell'onda riflessa, non più ovviamente di quella incidente.

Note finali

Questi sono i metodi generali che si possono usare per affrontare questo problema, ossia il problema della re-irradiazione da parte di un riflettore. Quale dei due metodi è meglio? Mah, in realtà sono, sotto certi punti di vista, validi entrambi: l'ottica fisica è un poco più accurata rispetto al metodo delle aperture, dal momento che il metodo delle aperture approssima il campo ma solo fino al piano scelto; il metodo delle aperture inoltre ha uno step in più, dal momento che:

1. prima richiede di calcolare il campo incidente sul piano nel quale si applica il teorema di equivalenza;
2. poi richiede di applicare le condizioni al contorno per ottenere il campo riflesso;
3. infine richiede di integrare.

Nell'ambito dell'ottica fisica gli step sono solamente due, dal momento che:

1. prima si determina il campo incidente sulla superficie (che in questo caso non sarà piana);
2. poi si integra direttamente questo.

Sembrerebbe più semplice il secondo metodo, ossia l'ottica fisica, però c'è da dire che tra integrare su un piano e integrare su una superficie, c'è una grossa differenza: nel caso dell'ottica fisica sicuramente l'integrale sarà molto più complicato da fare.

Vi sono in realtà delle relazioni tra un metodo e l'altro, nel senso che non è del tutto vero il fatto che l'integrale va fatto su una superficie strana per forza: matematicamente in certi casi è possibile trovare una trasformazione che permetta la trasformazione dell'integrale su una superficie, semplificando la cosa.

2.6 Antenne a paraboloide

A questo punto, dati tutti i metodi introdotti, l'obiettivo è quello di studiare quello che probabilmente è il più noto e utilizzato tipo di radiatore: l'antenna a paraboloide. Un paraboloide è una superficie ottenuta facendo ruotare attorno a un asse una parabola.

Esistono diverse equazioni per rappresentare un paraboloide, a seconda per esempio del sistema di coordinate che si vuole considerare. Usando per esempio il set di coordinate polari cilindriche (ϱ, φ, z), si ha:

$$z = \frac{\varrho^2}{4f}$$

f non è un parametro arbitrario, bensì è la distanza focale dal paraboloide. Da questa formula è possibile trarre alcune conclusioni: dato per esempio $\varrho = f$, si ha:

$$z = \frac{f^2}{4f} = \frac{f}{4}$$

Altro punto notevole è quello passante per il piano focale: per piano focale si intende il piano che passa per il fuoco, la cui normale è ẑ. In questo caso si può vedere che, se $z = f$, si ha:

$$f = \frac{\varrho^2}{4f}$$

dunque

$$\varrho = 2f$$

Questo significa che il piano focale interseca il paraboloide, ottenendo un raggio pari a $2f$.

Queste conclusioni sono state tratte sull'equazione del paraboloide espressa in un sistema di coordinate cilindriche; può essere più interessante, per i nostri scopi, esprimere questa equazione in coordinate sferiche, ossia mediante le coordinate $\varrho, \vartheta, \varphi$: in questo modo potremmo collegare le caratteristiche dell'illuminatore, che dipendono da ϑ e φ, con quelle del paraboloide.

Al fine di rappresentare in questo modo l'equazione, torna utile ricordare la definizione geometrica di parabola: la parabola è il luogo dei punto equidistanti da una certa retta (detta "direttrice") e da un certo punto (detto "fuoco"). Chiamando ϑ l'angolo formato tra fuoco e paraboloide considerato sul piano ξ identificato dall'asse della parabola e da $\hat{\varrho}$, ϱ è la proiezione sull'asse della parabola su ξ, si può vedere che la distanza r tra il punto proiettato sull'asse e la direttrice è pari a:

$$r = 2f - r\cos\vartheta$$

Dunque, si può esprimere l'equazione del paraboloide in forma sferica come:

$$r = \frac{2f}{r\cos\vartheta}$$

Questa è una delle equazioni che ci servono; un'altra equazione utile è quella per cui, data ϱ la suddetta distanza di un punto della parabola dall'asse, si ha:

$$\varrho = r\sin\vartheta$$

ma dunque, riprendendo l'equazione di prima:

$$\varrho = \frac{2f\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}$$

A questo punto recuperiamo un po' di trigonometria; come noto, si può dire che:

$$\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}$$

$$\sin\vartheta = 2\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

dunque:

$$\varrho = \frac{2f\sin\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

quindi

$$\varrho = 2f\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Come vedremo tra breve, questa formula spesso risulta essere molto importante.

2.6.1 Applicazione del metodo delle aperture

Nel caso della parabola, vi sono proprietà molto interessanti che la rendono di fatto estremamente appetibile come funzione di base per la rivoluzione, al fine di realizzare una superficie riflettente. Esistono proprietà interessanti che dicono, per le coniche, che i segmenti tracciati da un fuoco e rimbalzanti sulla conica finiscono, formando lo stesso angolo rispetto alla normale, nell'altro fuoco.

Mettendo dunque una sorgente di raggi in un fuoco F_1, tutti questi raggi finiranno in F_2. Per la parabola vale una cosa molto simile, tenendo però conto del fatto che il secondo fuoco della parabola è all'infinito: facendo i conti, si può dimostrare che se dal fuoco della parabola invio un raggio, questo viene riflesso parallelamente all'asse della parabola.

Ciò che si potrebbe fare è andare a calcolare con le formule il raggio riflesso: dato un raggio incidente, si può calcolare la normale alla superficie, l'angolo tra la suddetta normale e il raggio incidente, e per qualsiasi punto della superficie si potrebbe vedere che quello che viene fuori è un raggio parallelo all'asse, a $\hat{z}$. Se tutti i raggi riflessi sono dunque diretti verso $\hat{z}$, il fronte d'onda riflesso sarà sostanzialmente un piano, dunque l'onda che emerge dall'illuminatore come un'onda sferica viene distorta in un'onda riflessa piana. In altre parole, facendo i conti per l'onda riflessa, si potrebbe vedere che la curvatura $\frac{1}{\varrho_{\mathrm{r}}}$ verrebbe nullo, dal momento che il fascio sferico viene "collimato" in un'onda piana.

Possiamo dunque buttare giù due conti; il campo incidente sulla superficie andrà come la formula vista precedentemente:

$$\underline{E}_{\text{incidente}} = 5,5\sqrt{G(\vartheta,\varphi)P_{\mathrm{T}}}r$$

dove

$$r = \frac{2f}{1+\cos\vartheta}$$

è quello ottenuto precedentemente studiando la parabola. Il campo incidente sulla parabola sarà dunque:

$$\underline{E}_{\text{incidente}} = 5,5\frac{\sqrt{G(\vartheta,\varphi)P_{\mathrm{T}}}}{2f}(1+\cos\vartheta)$$

r rappresenta la distanza tra il punto in cui si mette l'illuminatore e il punto in cui il campo incide; il campo non inciderà alla stessa maniera sul paraboloide dal momento che, essendo esso una superficie curva, vi saran dei punti in cui il campo incide avendo percorso meno spazio, e punti in cui incide avendo percorso uno spazio maggiore. Questo ϑ è l'angolo di incidenza sul paraboloide: il termine tra parentesi tonde può valere al più 2, di solito al minimo 1 (dal momento che non si usano di solito $\vartheta > 90°$ come discuteremo in seguito). Il termine tra parentesi è detto "attenuazione spaziale": aumentando la distanza percorsa con l'aumentare dell'angolo, si ha un'attenuazione maggiore.

Quando si va a calcolare il campo sull'apertura, il campo su di esso incidente avrà un'attenuazione diversa a seconda del punto sull'apertura, dunque sul ϑ; i raggi riflessi, invece, non verranno più attenuati. Su di una superficie metallica, si sa per certo che:

$$|\underline{E}_{\text{incidente}}| = |\underline{E}_{\text{riflesso}}|$$

(infatti il coefficiente di riflessione o è 1 o è -1). L'apertura però noi ce l'abbiamo in funzione di ϱ: qui interviene dunque la relazione vista prima, che dice per esempio che:

$$\vartheta = 2\, \mathrm{a}rctan\left(\frac{\varrho}{2f}\right)$$

(invertendo quella vista precedentemente).

Campo incidente e campo riflesso possono dunque essere espressi mediante queste coordinate senza problemi, semplicemente applicando questa relazione.

Una proprietà molto interessante, quella che forse potrebbe essere quella che rende il paraboloide un'antenna così interessante, è il fatto che la fase è costante. Ci sono due motivi (collegati ovviamente) per cui si può dire ciò a cuor leggero:

- essendo il fronte d'onda piano, è ovvio dire che la superficie a fase costante sarà proprio un piano, dunque sui piani la fase sarà costante;
- osservando la geometria della superficie, essendo essa molto imparentata con la parabola, ha anche le stesse proprietà: se andiamo a calcolare il cammino dal fuoco a un piano qualunque perpendicolare all'asse passante per il punto di riflessione, si può vedere che il cammino è costante; il cammino totale, dato dalla somma del cammino di incidenza a quello di riflessione, è sempre uguale.

Ciò rende l'antenna parabolica estremamente gradita: le aperture a fase costante sono quelle a massima direttività, a massima efficienza; il diagramma di irradiazione se si ha un errore di fase quadratico si degrada violentemente, ma con un'antenna di questo genere gli errori di fase sono estremamente ridotti, non quadratici, dunque si ha questo effetto estremamente interessante.

Secondo il modello che utilizziamo, basato sull'ottica geometrica (per il calcolo del campo), il campo si considera non nullo solamente all'interno del cilindro che chiude il paraboloide. Questa cosa in realtà non è del tutto vera: l'illuminatore potrebbe mandare dei raggi anche al di fuori del paraboloide, e in questo caso la potenza associata a questi raggi sarebbe di fatto dispersa, dal momento che questi raggi non potrebbero essere riflessi dal paraboloide e quindi ridurrebbero l'efficienza. La potenza dispersa per questo motivo viene detta "potenza di spill-over".

Ridurre lo spill-over di sicuro non è una cosa negativa, ma non bisogna neanche esagerare, per più motivi; vediamo. Per studiare il campo sull'apertura è necessario usare una funzione del tipo:

$$\underline{E}_{\text{apertura}} = \frac{V_0 \underline{F}(\vartheta)}{2f}(1 + \cos\vartheta)$$

questo è sostanzialmente collegato con il MEG, dunque con l'integrale di irradiazione. L'andamento della fase è implicito, dentro $\underline{F}$, la quale è collegata con il guadagno. V_0 è una costante, dimensionata in volt.

Un illuminatore normalmente si realizza mediante un'antenna a tromba; se su di essa vi è un grosso errore di fase, il diagramma di irradiazione dell'illuminatore ha i soliti problemi: guadagno ridotto, lobi secondari più alti, minimi riempiti. Si ricordi che i minimi hanno un campo sostanzialmente in opposizione di fase con quello del lobo principale (essendo la fase "a gradini"); questo deve far intuire che la regione irradiata dai lobi secondari (che di solito è quella periferica del diagramma di irradiazione) non deve assolutamente finire nel paraboloide: essendo il campo in controfase con quello del lobo principale, al momento di integrare i contributi di campo si otterrebbe una riduzione del campo causata per l'appunto dalla presenza di questa controfase, riducendo di fatto l'efficienza dell'antenna; non bisogna **mai** mandar contributi dei lobi secondari sul riflettore.

Una regola pratica è quella di far coincidere l'angolo di apertura del riflettore con il lobo principale dell'illuminatore, considerando come angolo di apertura dell'illuminatore quello per cui il lobo principale si abbassa di $10 \div 15$ dB. Ciò che cambia questo potrebbe essere il tapering: si può ridurre il guadagno, variando tutto.

$$\vartheta_{\text{max,riflettore}} \sim \vartheta_{\text{apertura,illuminatore}}$$

Detto ciò si trova che:

$$\underline{E}_{\text{apertura}} = \underline{E}_{\text{r}}(P')\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k(2f - r')}\hat{\mathrm{y}}$$

Grazie al fatto che si ha sempre percorso lo stesso percorso per arrivare a uno qualsiasi dei piani a fase costanti, la fase totale del campo non cambia.

Prima si è scritto che:

$$\underline{E}_{\text{apertura}} = \frac{V_0 \underline{F}(\vartheta)}{2f}(1 + \cos\vartheta)$$

Il campo sull'apertura ha dunque due contributi di attenuazione; uno è la già discussa attenuazione spaziale, l'altro è il termine legato a $F(\vartheta)$ (considero solo il termine scalare), proporzionale a $\sqrt{G}$. Riportando, in scala logaritmica (dB), questi due termini su di un grafico, si può vedere qualcosa del tipo:

a 90° il termine di attenuazione spaziale è circa pari a - 6 dB (riduzione a 1/4 del valore originale); $F(\vartheta)$ è invece una funzione meno nota, dal momento che essa dipende dall'illuminatore (e infatti è detto "attenuazione dell'illuminatore", o "attenuazione di feed"), nella fattispecie dal suo diagramma di irradiazione. L'attenuazione spaziale dunque in queste condizioni è di pochi decibel, mentre quella dell'illuminatore non deve essere troppo bassa: se si limitasse a un livello di pochi dB l'attenuazione dell'illuminatore, vorrebbe dire che avrei tanto spill-over, dal momento che buona parte dell'energia del lobo principale, per ridurre l'attenuazione, sarebbe buttata fuori dal paraboloide, riducendo l'efficienza; l'attenuazione totale arriva, come detto prima a $10 \div 15$ dB, in totale trovando qualcosa di simile a 20 dB in caso peggiore.

Scriviamo a questo punto un'espressione in grado di valutare il valore normalizzato (per esempio al valore massimo) del campo all'apertura:

$$\frac{\underline{E}_{\text{apertura}}(P)}{\underline{E}_{\text{apertura}}(0)} = \frac{\frac{V_0 F(\vartheta)}{r}}{\frac{V_0 F(0)}{f}} = \sqrt{\frac{G_{\text{f}}(\vartheta)}{G_{\text{f}}(0)}}\frac{f}{r'}$$

Dove il valore massimo è quello sull'origine.
ossia:

$$\frac{\underline{E}_{\text{apertura}}(P)}{\underline{E}_{\text{apertura}}(0)} = \sqrt{\frac{G_{\text{f}}(\vartheta)}{G_{\text{f}}(0)}\frac{f}{r'}\frac{1+\cos\vartheta}{2}}$$

In questo modo è evidente vedere quali sono i due contributi del tapering sull'apertura: l'attenuazione di feed e l'attenuazione spaziale.

L'attenuazione del feed finora è stata espressa come una funzione dell'angolo ϑ, ma, dal momento che mi serve conoscerla sull'apertura, sarebbe molto comodo averla in funzione del raggio ϱ; purtroppo, come visto precedentemente, il legame tra ϱ e ϑ è non lineare; si può comunque usare anche ϱ.

Si ricordi sempre e comunque che il lobo secondario non va assolutamente inserito nel diagramma di irradiazione, dunque, visto che lo ignoriamo, possiamo approssimare il lobo principale (ignorando il secondario) con una funzione quadratica. Il campo risultante avrà dunque, come ampiezza, quella del campo di partenza, sottraendovi la somma delle due attenuazioni.

Si vuole a questo punto trovare la relazione tra il diametro dell'apertura e l'angolo complessivo; per fare ciò, utilizziamo la già nota:

$$\varrho = 2f \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$$

Ci serve il raggio massimo, che però sarà ovviamente $D/2$, dove D è il diametro della suddetta circonferenza massima dell'apertura; dunque:

$$\frac{D}{4f} = \tan\left(\frac{\vartheta_{\max}}{2}\right)$$

Da qui si può ottenere D, $\vartheta_{\max}$, quello che si vuole:

$$\vartheta_{\max} = 2\, arctan\left(\frac{D}{4f}\right)$$

Il rapporto fuoco su diametro è una grandezza caratteristica del riflettore: essa è un parametro che permette di dimensionare il riflettore. Questo dal momento che, per quanto le dimensioni siano diverse, se il rapporto fuoco su diametro è diverso, le antenne sono simili e posso usare lo stesso illuminatore per alimentarle.

Quando si ha un riflettore parabolico simmetrico, nei casi pratici si vedrà che f/D non è fortemente variabile, ma varia all'incirca da 0,25 a 0,5; questa cosa deriva da due tipi di osservazioni, che ci indicano come mai ci limitiamo a questi valori.

- Il limite superiore è dato dal fatto che se il rapporto fuoco su diametro è maggiore di $0,5$, il semiangolo di apertura è abbastanza piccolo, dunque servirebbe come illuminatore un'antenna a fascio stretto, e dunque un illuminatore grande; ciò potrebbe diventare un ostacolo significativo per l'onda riflessa dal paraboloide, e dunque si avrebbero effetti diffrattivi importanti. A 0,5 si han 53°.

- Per 0,25 si han esattamente 90° di apertura; trovare illuminatori per un rapporto fuoco su diametro inferiore significherebbe richiedere illuminatori che abbiano un semiangolo di apertura ancora più grande, che si trovino all'interno del volume di apertura del riflettore, che irradi con un angolo di apertura superiore a 90° a fase costante; fare ciò è estremamente difficile perchè ogni illuminatore ha lobi principali e secondari, e per tutti questi problemi si han problemi realizzativi. Se si aumenta inoltre il semiangolo di apertura, l'attenuazione spaziale deve essere valutata sopra i 90° prima definiti come limite, e dopo di essi essa inizia a crollare molto più rapidamente, diventando un fenomeno estremamente importante; si avrebbe dunque per l'antenna finale un tapering troppo forte, riducendo eccessivamente l'efficienza.

I valori standard, quelli normalmente utilizzati, per il tapering, sono intorno ai 6 dB per il termine di attenuazione spaziale (anche un poco inferiori), e poi $20 \log_{10} F(\vartheta_0)$: questo termine dipende dalla relazione tra l'angolo di apertura del riflettore e l'illuminatore. In altre parole, è necessario identificare anche per quanto concerne lo spillover un concetto di efficienza: maggiore è il campo di illuminazione irradiato al di fuori della superficie del paraboloide, peggiore sarà lo spillover.

Precedentemente, quando si parlava di trombe, si era definita l'efficienza di apertura come:

$$\nu_{\mathrm{a}} = \frac{1}{A_{\mathrm{geometrica}}} \frac{\left| \int \underline{E} \mathrm{d}S \right|^2}{\int \left| \underline{E} \right|^2 \mathrm{d}S}$$

Questa formula semplicemente dice quanta dell'area effettiva dell'antenna, ma non tiene conto in alcun modo dello spillover: è un termine di efficienza, ma non è assolutamente tutto, per quanto concerne le antenne a riflettore. Se un riflettore viene illuminato in modo quasi uniforme, la sua efficienza di apertura è sicuramente elevata, ma si rischia di perdere efficienza su un altro fronte, ossia sotto il punto di vista dello spillover.

$$\nu_{\mathrm{s}} = \frac{\int_0^{\vartheta_0} \left| F(\vartheta) \right|^2 \sin \vartheta \mathrm{d}\vartheta}{\int_0^{\pi} \left| F(\vartheta) \right|^2 \sin \vartheta \mathrm{d}\vartheta} = \frac{\text{potenza racchiusa nel cono dell'illuminatore}}{\text{potenza totale}}$$

Questo, ammettendo che il riflettore sia simmetrico.

Dove ϑ_0 è l'angolo massimo del riflettore.

Vogliamo a questo punto analizzare queste due efficienze, però con un riflettore ad angolo (o diametro) variabile; si avranno due funzioni di questo tipo:

Man mano che si aumenta l'angolo massimo del riflettore l'efficienza di apertura diminuisce, dal momento che aumentando l'area a parità di campo incidente ovviamente si avrà meno area illuminata; dualmente, però, migliora l'efficienza di spillover, dal momento che tutto il campo è racchiuso nel paraboloide; dal momento che ci sono i lobi secondari, tuttavia, non si arriverà mai esattamente a efficienza di spillover unitaria. La curva risultante sarà data dal prodotto delle due ν, dunque sarà una funzione presentante un massimo e tenderà a 0 agli estremi. L'efficienza risultante presenta un massimo di valore circa pari a 0,5, ma tutto ciò dipende dall'illuminatore. Per studiare l'illuminatore, serve conoscere $F(\vartheta)$; un modo per studiare l'illuminatore è basato sull'approssimare la suddetta funzione con una funzione nota. Il problema sostanzialmente a questo punto è il fatto che di solito la funzione nota approssima piuttosto bene il comportamento del lobo principale, ma i lobi secondari non sono rappresentati. Volendo per esempio usare una funzione $\cos^{\alpha}(\vartheta)$, si ottengono al crescere di α coseni sempre più stretti; per tutte le funzioni di questa famiglia vale sempre il fatto che $\cos(0) = 1$, ma dove si annulli il coseno dipende da α; calcolando lo spillover con la formula di ν_{s}, quello che si vede è che per $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, possiamo supporre che esso valga un certo livello (o 0, o un certo livello costante).

Tutto dipende in sostanza dal tipo di illuminatore; se noi tuttavia approssimassimo l'illuminatore con una famiglia di funzioni di questo tipo, potremmo vedere che il massimo valore di ν, dove $\nu \triangleq \nu_{\mathrm{s}}\nu_{\mathrm{a}}$ (come detto in precedenza), sarebbe intorno a 0,8, almeno teoricamente. Questo 0,8 si ha per un valore di tapering circa pari a - 10 dB.

Riportando una funzione della ν in funzione del tapering in dB, si avrebbe qualcosa di questo genere:

la curva non è molto ripida, e si ha questo massimo. Questa cosa è tendenzialmente quasi uguale per ogni valore di f/D.

Finora sembra che l'unica cosa importante sia la ν, dunque il guadagno; questo purtroppo non è vero, dal momento che un altro parametro fondamentale da tenere sotto controllo è l'ampiezza dei lobi secondari. Si può disegnare una curva cha rappresenta l'andamento del livello dei lobi secondari, in funzione del tapering:

la scala può partire da -5 dB di tapering, andando avanti: a -5 dB di tapering (valore non ottimo neanche sotto il punto di vista del guadagno) si hanno -21 dB di lobi secondari; a -10 dB (valore ottimo per il guadagno) -24 dB circa; con -30 dB di tapering, si han circa -30 dB di lobi secondari; questa funzione tendenzialmente non dipende molto dal rapporto f/D, almeno fino a $-11 \div -12$ dB; di lì in poi, si hanno variazioni non troppo importanti. Per ridurre i lobi secondari devo avere un tapering più pronunciato, arrivando per esempio a -14 dB, valore per cui la ν scende relativamente poco; impegnarsi troppo però sui soli lobi secondari, in un'antenna a riflettore, tuttavia, è sciocco, dal momento che al di sotto di una certa soglia è impossibile ridurre il campo fuori dal lobo principale, a causa della presenza dell'effetto del bloccaggio (il fatto che vi siano elementi davanti all'apertura parabolica che portano ad avere diffrazione del campo riflesso).

Finora si sta parlando del primo lobo secondario; cosa si può dire sugli altri lobi secondari? Nella pratica, non si ha solo la specifica sul primo lobo secondario, bensì su tutti: chi commissiona l'antenna (o comunque gli standard) fornisce una "maschera", ossia un profilo che l'intero diagramma di irradiazione deve seguire.

Una caratteristica abbastanza generale di queste antenne è la loro grossa dimensione: di solito queste antenne sono molto grandi rispetto alla lunghezza d'onda λ. Si parla di riflettori che facciano qualche λ, a cose che fan anche 2000λ o più (come dei radiotelescopi). Ricordando la fondamentale formula di passaggio da area geometrica/efficace a guadagno:

$$G = \nu \left(\frac{\pi D}{\lambda} \right)^2$$

si può convertire in dB, ottenendo:

$$G|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \left(\pi \frac{D}{\lambda} \right) + 10 \log \nu$$

nel caso in cui $D = 2000\lambda$, si ha un guadagno di 76 dB circa; di solito, ν in dB vale dai -2 ai -3 dB, dunque si hanno, in totale, sui 73 dB di guadagno, con un'antenna di quelle dimensioni. Le antenne di cui si parla sono molto grandi, con guadagni molto elevati, dunque l'efficienza è comunque importante: sembrerebbe che aumentando le dimensioni delle antenne tutto vada a posto, ma in realtà l'energia che si va a perdere va a finire da altre parti: nei lobi secondari; bisogna dunque prestare attenzione anche a ciò: se l'antenna è di grandi dimensioni, avremo un lobo principale (stretto) e tanti lobi secondari. Se ogni lobo secondario tiene più o meno due gradi, per arrivare a 180° si avranno un mucchio di lobi.

Si richiede dunque qualcosa del genere:

Di solito, le maschere che si forniscono sono funzioni del tipo:

$$29 - 25 \log_{10} \vartheta$$

o

$$32 - 25 \log_{10} \vartheta$$

Queste sono le funzioni che si possono avere, per esempio, come maschere; si noti che queste maschere si riferiscono ai livelli assoluti di ampiezze dei lobi: non si ha il guadagno normalizzato a 1, bensì al suo valore originale, G_{max}.

Proviamo, come esercizio, a considerare un'apertura quadrata di lato a illuminata uniformemente; si cerchi l'inviluppo dei lobi secondari nei piani principali, al fine di poter effettuare un confronto con le funzioni di maschera trovate.

Come noto, l'apertura rettangolare illuminata uniformemente va sostanzialmente modellata mediante una porta, e la sua funzione $F(\vartheta)$ sarà la trasformata di Fourier di una porta:

$$F(\vartheta) = \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta}$$

La funzione di guadagno sarà questa, al quadrato, moltiplicata per il guadagno massimo $G_{\max}$:

$$G(\vartheta) = G_{\max}\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta}\right|^2$$

Per determinare il guadagno massimo, è possibile usare la formula:

$$G_{\max} = \frac{4\pi}{\lambda^2}a^2$$

dunque

$$G(\vartheta) = \frac{4\pi}{\lambda^2}a^2\left|\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta}\right|^2$$

La funzione oscillante è quella al numeratore, dunque l'inviluppo sarà semplicemente tutto il resto:

$$G_{\text{inviluppo}} = \frac{4\pi}{\lambda^2}a^2\left|\frac{1}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\vartheta}\right|^2$$

Dal momento che siamo interessati solo ai lobi secondari, possiamo considerare $\vartheta > 0$; inoltre, fino a 30°, possiamo dire che il seno di ϑ sia confondibile con ϑ stesso:

$$\sin\vartheta \sim \vartheta$$

dunque:

$$G(\vartheta) \sim \frac{4}{\pi\vartheta^2_{\text{radianti}}}$$

ricordando che:

$$\vartheta_{\text{gradi}} = \frac{180}{\pi}\vartheta_{\text{radianti}}$$

si ottiene:

$$G(\vartheta_{\text{gradi}} \sim \frac{360^2}{\pi^3\vartheta^2_{\text{gradi}}} \xrightarrow{\text{dB}} 36,21 - 20\log_{10}\vartheta_{\text{gradi}}$$

Data dunque l'apertura quadrata appena analizzata, la formula è abbastanza simile a quella vista precedentemente. Se l'antenna è invece piccola, capita che i lobi sono molto più larghi; se si ha guadagno elevato, si avranno i lobi molto più stretti, ma dunque, a parità di angolo considerato, molti più lobi.

2.6.2 Tipi di illuminatori

L'illuminatore è un'antenna, che deve avere però particolari caratteristiche: al fine da irradiare bene l'apertura, il lobo principale deve essere abbastanza largo; per non introdurre elisioni del campo, inoltre, i lobi secondari devono essere decisamente bassi; il centro di fase, infine, deve essere facilmente determinabile. Un'antenna che soddisfa tutte queste caratteristiche potrebbe per esempio essere l'antenna a tromba. Il guadagno di questa antenna deve comunque essere ridotto, dal momento che l'antenna non può assolutamente essere grandi: dimensioni ragionevoli sono dell'ordine della lunghezza d'onda. Ovviamente, con trombe piccole, non ha senso fare una tromba ottica.

Sembrerebbe che la soluzione per tutti i problemi sia la tromba, ma in realtà vi sono casi in cui non si può usare: se si usano frequenze basse, è necessario utilizzare, come illuminatori, dei dipoli. Per dipolo non si potrà utilizzare quello fondamentale, dal momento che esso è omnidirezionale, dunque irradia in maniera inadatta. Una delle soluzioni più utilizzate per la realizzazione di illuminatori a bassa frequenza è quella dei "dipole-disk": si tratta di illuminatori realizzati mediante un dipolo, solitamente risonante a mezz'onda, polarizzato con un coassiale rigido che esce dal vertice del paraboloide, praticando un foro; dopo questo dipolo, a una distanza circa pari a $0,25\lambda$, si introduce un disco, un "piattello".

Questo sistema può essere studiato applicandovi il principio delle immagini: se approssimo il piattello con un piano di massa, su di esso la carica viene rovesciata; per massimizzare dunque l'irradiazione di queste cariche verso il riflettore, si posiziona tra dipolo e riflettore una distanza pari a $\lambda/2$, in maniera da rifasare il campo che va ad incidere sull'apertura. Questa configurazione può essere utile, quando si è al di sotto di qualche GHz.

Si noti che questo piattello, come anche la tromba di prima, è un diffrangente: esso di fatto blocca il campo elettromagnetico che viene riflesso dall'apertura, creando delle zone d'ombra. Studieremo a questo punto questo problema, fornendo modelli che lo caratterizzino.

Un altro tipo di illuminatore potrebbe essere basato sulla sostituzione del piattello con un piano di massa alternativo, realizzato mediante dipoli un poco più lunghi di quelli precedentemente introdotti come generatori: ciò è estremamente poco ingombrante, e dunque riduce i problemi di bloccaggio.

Generalmente si cerca, in queste situazioni, di fare i conti in maniera tale che essi non si trovino in una regione di funzionamento induttiva, dunque potrebbero risultare non eccessivamente lunghi.

Ulteriore alternativa è quella di prendere una guida d'onda (invece che un coassiale), troncarla, e rastremarla in altezza, tagliandone un pezzo e ripiegandola; sotto il punto di vista della costante di propagazione e del modo fondamentale non cambia nulla, dal momento che le caratteristiche del modo fondamentale dipendono dalla dimensione a e non da b. Si inserisce in questa fessura così fatta una laminetta, la quale, essendo perpendicolare al campo elettrico, non lo intercetterà, e su questa metteremo dei dipoli (uno alla frequenza di risonanza, uno poco più lungo), e questi saranno gli illuminatori. Si sega via una parte della guida, la si schiaccia, e in questo modo si introduce un leggero tapering in altezza. Il motivo per cui si ribassa la guida è per fare in modo che, in questo modo, si fa in maniera tale che l'energia irradiata dai bipoli non possa tornare indietro.

2.6.3 Bloccaggio

Come detto, per illuminare l'antenna è necessario avere un illuminatore; questo tuttavia, dopo aver illuminato l'antenna, sarà colpito dai raggi riflessi da questa, ma dunque questi verranno "bloccati" dall'illuminatore, che non li lascerà per l'appunto propagarsi nello spazio libero assieme agli altri.

Esistono due categorie di bloccaggio:

- bloccaggio centrale, ossia quello dovuto all'illuminatore;
- bloccaggio dovuto ai supporti che sostengono l'illuminatore.

Sembra sciocco ma, a tutti gli effetti, l'illuminatore, essendo anch'esso un'antenna, richiede dei supporti; anche essi tuttavia avranno dimensioni fisiche non nulle, dunque anche essi agiranno come dei diffrangenti. Essi hanno però effetti diversi tra loro: il bloccaggio centrale è dovuto a un blocco tutto sommato compatto; quello dei supporti invece è dovuto a elementi lunghi e stretti, che dunque daranno luogo a un effetto diverso sia nelle modalità sia nella quantità.

Bloccaggio centrale

Analizziamo a questo punto il primo di questi due fenomeni. Un metodo per analizzarlo, è basato semplicemente sul metodo delle aperture; dato un paraboloide, si ha un qualcosa di questo genere:

Si avrebbe una distribuzione dell'illuminazione di questo tipo, non uniforme, dal momento che l'illuminatore potrebbe per esempio essere una tromba circolare di diametro d, mentre l'apertura un paraboloide di raggio D. Per un raggio maggiore di $d/2$, non si hanno problemi; se il raggio è invece minore di $d/2$, i raggi riflessi vengono diffratti dall'illuminatore. Questo significa che si avrà un campo nullo, un buco.

Il campo dell'apertura sarà esprimibile in questa maniera:

$$\underline{E}_{\mathrm{a}} = \underline{E}_{\mathrm{a0}} - \underline{E}_{\mathrm{ab}}$$

dove $\underline{E}_0$ è la distribuzione di campo che si avrebbe senza l'elemento bloccante, $\underline{E}_{\mathrm{b}}$ il campo di bloccaggio. Proviamo a ragionare per ora qualitativamente, quindi solo in seguito effettuare calcoli più quantitativi. Si dovrà fare la trasformata di Fourier dei due termini, ottenendo (in funzione di ϑ):

$$\underline{E}(\vartheta) = \underline{E}_0(\vartheta) - \underline{E}_{\mathrm{b}}$$

Senza bloccaggio, il diagramma di irradiazione ha la solita forma; supponendo di non avere errore di fase, si ha irradiazione a segni alterni, ossia a intervalli alterni si cambia il segno. Il campo di bloccaggio, come si può dimostrare, è un campo quasi uniforme, dal momento che è limitato a un'area molto piccola; questo può essere pensato come una sorta di "campo irradiato da una tromba molto piccola": il campo sarà caratterizzato da un lobo principale a guadagno basso e molto largo, che si va a sottrarre al campo $\underline{E}_0$. Il risultato qualitativamente sarà il seguente:

$\underline{E}_0$ a segni alterni subisce una sottrazione e un'addizione, dal momento che $\underline{E}_{\mathrm{b}}$ sostanzialmente, essendo molto largo, per un bel po' di lobi ha sempre lo stesso segno, dunque, dal momento che è un campo che si sottrae dall'altro, nel lobo principale e in tutti i lobi secondari pari si sottrae, in tutti i lobi secondari dispari si aggiunge, ottenendo qualcosa di questo genere:

Per angoli grandi, poi, dal momento che i lobi secondari tendono ad abbassarsi con una certa rapidità rispetto al variare di ϑ, tendenzialmente potrebbe rimanere anche solo più il campo di bloccaggio, che diviene quello prevalente. Addirittura si potrebbe avere una riduzione tale da non poter più far contare i lobi secondari, facendoli "perdere".

Proviamo a questo punto a quantificare questo discorso: stiamo supponendo di avere a che fare con una tromba circolare come illuminatore; dobbiamo calcolare la perdita di guadagno. Come noto, nelle trombe circolari, il campo va studiato effettuando la trasformata di Fourier-Bessel (FBT), dunque:

$$\underline{E} = -\frac{\mathrm{j}2\pi}{2\lambda R}\mathrm{e}^{\cdot \mathrm{j}kR}\int_0^a \underline{E}_{\mathrm{a}} J_0(ur)r\mathrm{d}r$$

dove $a = \frac{D}{2}$. Integrando:

$$= \mathrm{j}kE_0\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}kf}\left(\frac{D}{2}\right)^2\frac{J_1(u)}{u}$$

Per quanto riguarda il campo di bloccaggio, si deve fare un ragionamento simile: il campo che risente dell'effetto del bloccaggio sarà semplicemente il campo di prima, in cui l'integrale si fa a partire dalla fine del blocco diffrangente:

$$\underline{E} = -\frac{\mathrm{j}2\pi}{2\lambda R}\mathrm{e}^{\cdot \mathrm{j}kR}\int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \underline{E}_{\mathrm{a}} J_0(ur)r\mathrm{d}r$$

si può a questo punto effettuare un cambio di variabili; dato

$$\beta \triangleq \frac{d}{D}$$

si ottiene:

$$\underline{E} = -\frac{\mathrm{j}2\pi}{2\lambda R}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}\int_0^\beta J_0(ur)r\mathrm{d}r$$

dunque, posso definire r' come:

$$r' \triangleq \frac{r}{\beta}$$

in modo che:

$$r = \beta r' \qquad \mathrm{d}r = \beta \mathrm{d}r'$$

In questo modo l'integrale diventa:

$$\beta^2\int_0^1 J_0(\beta u r')r'\mathrm{d}r'$$

questo è esattamente uguale a quello di prima, con però il β: è la trasformata Fourier-Bessel della funzione; si ottiene:

$$\beta^2\frac{J_1(\beta u)}{\beta u}$$

alla fine della fiera, si ottiene come campo irradiato:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 - \underline{E}_\mathrm{b} = \mathrm{j}kE_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2kf} \left(\frac{D}{2}\right)^2 \left[\frac{J_1(u)}{u} - \left(\frac{d}{D}\right)^2 \frac{J_1(\beta u)}{\beta u}\right]$$

dove β è detto "rapporto di bloccaggio", e, normalmente, $\beta \ll 1$; questo significa che il primo termine è quello già noto, e il secondo è un termine molto simile in cui però si ha una funzione di ampiezza molto ridotta (di un fattore β), e allo stesso tempo riscalata sulle ascisse, nel senso di "allungata", "espansa".

Si può vedere che:

$$\frac{\underline{E}(0)}{\underline{E}_0(0)} = 1 - \beta^2$$

ossia, il campo totale diviso il campo non bloccato. A questo punto è possibile valutare la variazione del guadagno, come:

$$\Delta G = 20 \log_{10}(1 - \beta^2)$$

usando l'espansione di Taylor al primo ordine:

$$\sim 10 \log(\mathrm{e})\beta^2 \sim -8,68\beta^2$$

Questo vale nel caso si consideri come modello l'illuminazione uniforme. Cosa si può dire per la "realtà", ossia nel caso l'illuminazione fosse non uniforme? Nella realtà l'andamento sarà taperato, dunque si ha che il bloccaggio agisce comunque nella zona centrale, dove il campo è tendenzialmente costante; le cose peggiorano, dal momento che il campo sull'asse è più largo e ridotto, dunque, se vado a sommare il $-8,68$ a una cosa più piccola, ho perdite ulteriori:

$$\Delta G = 10 \log_{10} \left(\frac{G(0)}{G_0(0)}\right)$$

dove

$$G_0 = G_{00}\nu$$

e G_{00} indica il guadagno che si ha nell'illuminazione uniforme. Quello che capita in questo caso è che si ha un peggioramento circa di fattore 2 in dB, dunque:

$$\Delta G \sim -8,68 \times 2\beta^2 \sim -17\beta^2$$

Questo deriva dal fatto che nel caso non taperato il guadagno è circa volte al doppio del guadagno che si ha nel caso taperato. Volendo fare dei conti, si può vedere che 17 è un numero grande, ma β è comunque molto piccolo: se $\beta = 0,1$, si ha comunque una riduzione di 100 volte rispetto a 17, dunque si arriva a circa $0,17$ dB, che son pochi. Si considera ancora tollerabile un fattore di bloccaggio β fino a 0,1 dB; questo non toglie che, se si può fare di meglio, è tutto guadagnato.

Sul primo lobo secondario, l'effetto del bloccaggio può essere piuttosto importante: di per sè il campo di bloccaggio, che siamo sull'asse o sul primo lobo secondario, è la stessa cosa, tuttavia per il fatto che il lobo è secondario, esso sarà molto più basso del lobo principale, dunque il campo di bloccaggio avrà un valore molto simile ad esso. Detto s il livello del primo lobo secondario, il livello del primo lobo secondario L_1 sarà una cosa del tipo:

$$L_1 = sE_0 + E_b$$

Sappiamo che E_0 è il primo termine della parentesi quadra, e che E_b è $E_0\beta^2$; dunque:

$$L_1 = sE_0 + \beta^2 E_0$$

dunque, rispetto a E_0,

$$\Delta L_1 = \frac{L_{1,\text{con bloccaggio}}}{L_{1,\text{senza bloccaggio}}} = \frac{E_0(s+\beta^2)}{E_0 s} = \frac{s+\beta^2}{s} = 1 + \frac{\beta^2}{s}$$

In decibel:

$$= 8,68\frac{\beta^2}{s}$$

dove ΔL_1 è il rapporto in decibel, s il rapporto in lineare dei lobi secondari. Si noti che questa formula ha al denominatore s; questo significa che tanto minore sarà s, ossia tanto più attenuati saranno i lobi secondari, tanto peggio sarà alla fine ΔL. ΔL_1 rappresenta infatti l'incremento che si ha, per i lobi secondari, a causa del bloccaggio centrale; tanto minori sono i lobi secondari, tanto maggiore sarà la loro crescita. Se poi l'illuminazione non è uniforme, il risultato finale, in dB, va ancora moltiplicato per 2.

Un'osservazione: finora noi abbiamo supposto dia vere a che fare con illuminatori realizzati mediante aperture circolari; cosa si fa, nel caso in cui l'apertura sia rettangolare? In questo caso, che calcoli si devono fare, per valutare la riduzione del guadagno? Sull'asse, contano semplicemente le aree: il termine $(1 - \beta^2)$ viene fuori semplicemente da calcoli fatti sulle aree; il fatto che le aree che irradiano sono in rapporto β^2, porta a questa cosa. Dal momento che da una tromba rettangolare a una tromba circolare gli errori di fase non cambiano molto, ciò che si potrà fare è uno studio equivalente, per cui:

$$\frac{d}{2} = \sqrt{\frac{ab}{\pi}}$$

Questo, per quanto concerne la direzione assiale. Una tromba rettangolare di dimensione $a \times b$ dunque irradia, secondo questa formula, come una tromba circolare la cui d è quella della formula appena scritta.

Bloccaggio dei supporti

In questo caso la situazione è più complessa: prima, per quanto riguarda il bloccaggio centrale, abbiamo semplicemente considerato il fatto che, dove c'è l'illuminatore, si ha una zona d'ombra, come si può vedere applicando l'ottica geometrica (questa è l'ipotesi "di campo nullo"). Se l'illuminatore è di una λ, è già abbastanza grande, ma va ancora bene. Quasi nessuno utilizza la diffrazione esatta, per quanto comunque utilizzando dei simulatori sarebbe possibile, prendendo una tromba, illuminandola quindi con un'onda piana, ma è una cosa non molto interessante, essendo comunque la tromba un ostacolo piuttosto piccolo.

Per quanto riguarda i supporti, invece, essi ragionevolmente non hanno un diametro molto grande, a meno che l'antenna non sia veramente enorme (come le antenne da 70 metri dei radiotelescopi), dunque normalmente lo spessore dovrebbe essere inferiore a λ.

Per quanto riguarda i supporti, si potrebbe per esempio avere due situazioni di questo genere:

Che cosa fanno queste quattro strisce? Sostanzialmente, quello che si trova è una zona d'ombra molto più estesa di quella del semplice illuminatore: anche i supporti comportano la presenza di una zona d'ombra. Al fine di fare i conti, si dovrà di nuovo calcolare l'irradiazione di un'apertura, in questo caso rettangolare, con la forma data dalla proiezione su di un piano (il piano dell'onda piana) di questi supporti. Si avrà dunque un'apertura di dimensioni w, dove w è lo spessore dei supporti, e di altezza $(D-d)/2$. Come irradia una cosa del genere? È noto che un'apertura di questo genere irradia come:

$$F(\vartheta, \varphi) = \frac{\sin\left(\frac{\pi w}{\lambda}\sin\vartheta\cos\varphi\right)}{\frac{\pi w}{\lambda}\sin\vartheta\cos\varphi} \frac{\sin\left(\frac{\pi\frac{D-d}{2}}{\lambda}\sin\vartheta\sin\varphi\right)}{\frac{\pi\frac{D-d}{2}}{\lambda}\sin\vartheta\sin\varphi}$$

Si possono fare semplici osservazioni qualitative: dal momento che w è piccolo, il lobo ad esso associato sarà sicuramente largo; posso dunque predire che sul piano orizzontale di questa apertura si avrà un fascio largo, mentre su quello verticale un fascio più stretto. Come già fatto precedentemente è possibile identificare le curve di livello per questa apertura, vedendo che si ha qualcosa di questo genere:

Dunque, gli zeri della funzione del piano orizzontale sono larghi, gli altri stretti. L'altra funzione avrà $D/2$ come lunghezza, dunque i lobi saranno sostanzialmente larghi il doppio di quelli di un'apertura di lunghezza D, ossia come quelli dell'antenna.

Quello che si può dire è che ciascun supporto genera un campo prevalentemente concentrato nel piano ortogonale al supporto; volendo, quello che si può fare è dunque qualcosa di questo genere:

Se si fa in questo modo, si fa in modo da ridurre l'interferenza sui piani principali del paraboloide.

Si osservi un fatto: mentre il bloccaggio centrale dà, come visto precedentemente, un contributo abbastanza uniforme nel diagramma di irradiazione, questo è solo sui piani in cui si hanno; per questo motivo conviene fare una cosa come quella mostrata, in modo da ridurne il contributo.

Per fare un conto "spannometrico", si può vedere che, data un'antenna con diametro pari a 1 metro, 0,5 centimetri per la larghezza del supporto, si ha:

$$2 \times 0,5\text{cm} \times 100\text{cm} = 50\text{cm}^2 \times 2 = 1\text{m}^2$$

il centrale è solo πR^2, dunque 12 cm^2: nonostante siano sottili, data la loro lunghezza, il loro contributo è estremamente importante.

2.6.4 Scattering da cilindro metallico

Si vuole a questo punto introdurre uno dei pochi problemi di diffrazione (scattering) risolubili in forma chiusa: quello della diffrazione introdotta da un cilindro metallico.

L'analisi esatta della diffrazione da un cilindro circolare colpito da un'onda piana è la seguente: data l'onda piana che incide su di un cilindro metallico, si può fare l'espansione dell'onda piana in onde cilindriche, dunque dipendenti dalle funzioni di Bessel, e applicare le condizioni al contorno che richiedono l'annullamento del campo elettrico o magnetico tangenziali, e alla fine si trova che questo oggetto diffrange a sua volta onde cilindriche; andando a vedere le correnti, si ha ciò:

Supponendo che i campi siano orientati in questo modo, le correnti sono orientate parallelamente al campo incidente, e sono concentrate sulla parte illuminata (quindi c'è meno corrente sulla parte meno illuminata); si ha dunque anche una dipendenza dal diametro: se il diametro è molto piccolo rispetto alla lunghezza d'onda, le correnti sono quasi uniformi all'interno del cilindro. Esistono dei metodi che permettono di calcolare l'entità delle correnti indotte all'interno di questo cilindro, anche nel caso di incidenza obliqua: il cilindro è illuminato con onde piane le quali non sono per forza perpendicolari al cilindro.

Ciò che si fa è definire il IFR (Induced Field Ratio), ossia il rapporto tra il campo diffratto da questo cilindro, re-irradiato dalle correnti indotte dall'onda piana incidente, e il campo irradiato da un'apertura che abbia le stesse dimensioni, illuminato dalla medesima onda piana. Dato dunque un cilindro di larghezza w, illuminato da un'onda piana, si confronta il suo campo irradiato con quello di un'apertura del tipo visto prima; ciò che succede è che se w è grande rispetto alla λ, il IFR tende a -1; se invece w tende a valori piccoli, questi due valori di campo vanno in direzioni opposte: in un caso a 0, in uno a ∞.

Osservazione preliminare: il modello di ottica geometrica usato fino adesso non dipende dalla polarizzazione (parallela o perpendicolare che sia), dal momento che in tutti i conti finora fatti, non abbiamo considerato polarizzazioni: erano tutti conti scalari. Se ragioniamo su un cilindro molto sottile, dunque sostanzialmente un filo, il fatto che si incida con polarizzazione perpendicolare o parallela è diverso: se il campo è parallelo al filo il campo induce correnti che possono muoversi, essendo esse generate nella direzione della lunghezza maggiore del filo, ma se il campo è perpendicolare al filo, si formano lo stesso delle correnti, le quali però non possono muoversi nel filo, essendo esse direzionate lungo la "direzione piccola", ossia lo spessore del filo (il quale per l'appunto è ridotto). In altre parole, se il campo elettrico è perpendicolare ai fili, non si ha una interazione, esso passa tranquillamente; se il campo elettrico invece è parallelo ai fili, si ha interazione e generazione di correnti. È dunque necessario considerare queste due casistiche.

Se si va a riportare IFR complesso su di un piano, si trova qualcosa di questo genere, in funzione di w:

Il "-1" si genera dal momento che le correnti indotte (come si può vedere anche solo dal principio dell'immagine) sono di segno opposto. Nel caso di polarizzazione parallela, se il filo fosse di larghezza infinitesima, si ha un campo molto grande, dal momento che le correnti indotte di fatto ci sono, ma occupano uno spazio molto ridotto, dunque, per il principio di fisica secondo il quale "la carica in uno spazio ridotto porta a campo molto grande", si avranno valori molto elevati di campo diffratto dal cilindro; viceversa, nel caso della polarizzazione perpendicolare, le correnti perpendicolarmente non riescono a scorrere, dunque le correnti non ci sono. La curva è parametrica rispetto a w/λ.

C'è un problema finale: talvolta non è possibile applicare i 4 supporti, bensì è necessario utilizzarne 3, nella configurazione presente:

questo, dal momento che talvolta i quattro supporti potrebbero essere troppo poco rigidi per gli illuminatori (dunque, sostanzialmente, per motivazioni meccaniche). I supporti potrebbero appoggiarsi non sui bordi, ma un poco più in centro; applicando dunque supporti di questo tipo, studiandoli con l'ottica fisica, dal fuoco si vede che l'onda generata dal fuoco è sferica, e si allarga verso l'apertura, portando a un'ombra che di fatto si allarga.

Per questi motivi, quando si può si cerca di utilizzare non riflettori simmetrici, ma asimmetrici, "offset", in cui l'illuminatore non viene illuminato dall'onda riflessa.

2.6.5 Sfocamento assiale

Come detto in precedenza, al fine di massimizzare le prestazioni dell'antenna è necessario fare in modo che l'illuminatore si trovi esattamente nel fuoco del paraboloide; nella realtà, per varie motivazioni (quali effetti termici che portano a dilatazioni/compressioni della struttura dell'antenna, come nei satelliti in cui una faccia è al Sole e l'altra in ombra, o meccanici, quali vibrazioni), può capitare che l'illuminatore dunque non si trovi esattamente nel fuoco, ma si trovi in un punto differente; non è tutto: il centro di fase potrebbe essere infatti non ben definito, essendo esso diverso per esempio nei piani verticale e orizzontale dell'antenna. Il primo caso che si analizza è quello di sfocamento assiale, ossia errore nella posizione rispetto all'asse: trasversalmente la posizione dell'illuminatore è corretta, dunque l'illuminatore si trova sull'asse del paraboloide, ma in un punto sbagliato dell'asse.

Si può vedere che questo errore è simmetrico rispetto al diagramma di irradiazione (ossia introduce gli stessi problemi, con lo stesso comportamento, a sinistra e a destra del lobo principale), e quasi quadratico. Vediamo come mai:

Si può determinare il cammino ottico dal punto F' al piano focale: invece che andare da F a P, si va da F' a P', riflettendosi sempre sullo stesso punto R del paraboloide; se la distanza d tra F e F' è piccola, si può supporre che i raggi RF' e RF siano circa paralleli, e dunque, come da disegno, dire che la distanza di errore della prima tratta, da F' a R e da F a R, sia pari a $d\cos\vartheta$, ϑ angolo formato tra il piano tangente al riflettore e il raggio incidente. Nella seconda tratta vi sarebbe il coseno dell'angolo δ formato tra R, P e P', ma in questo caso, essendo l'angolo estremamente ridotto, il coseno viene circa unitario. Si può dunque dire che:

$$(F' \to P') - (F \to P) \sim d\cos\vartheta$$

Normalizzando la differenza, si può dunque vedere che, conoscendo gli sviluppi di Taylor in 0:

$$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$$

dunque si ha un errore di fase quadratico. È possibile fare conti più precisi utilizzando una funzione come il dipolo, e si possono trovare risultati quali:

$$\Delta G_{\mathrm{dB}} \sim 9,1 \frac{\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2}{1 + \left(\frac{4f}{D}\right)^2}$$

Questa indica, in decibel, la variazione del guadagno dovuta allo sfocamento assiale. Essa, come si vede, dipende da f/D: la cosa sostanzialmente è motivabile fisicamente per il fatto che se si ha un illuminatore fisso, variando f/D si varia l'angolo, e dunque con esso l'errore di fase. Facendo due conti, con $d/\lambda = 0,1$, $f/D = 0,4$, $\Delta G \sim 0,03$ dB: assolutamente accettabile. Questo ci dice dunque che uno sfasamento di $\frac{\lambda}{10}$ è ancora accettabile, sotto il punto di vista del guadagno. Bisogna tuttavia prestare attenzione all'intero diagramma di irradiazione: per certi sfocamenti si ha una notevole riduzione del guadagno, arrivando, in casi estremi come $d = \lambda \times 1,78$, ad avere i lobi secondari molto più pronunciati del guadagno stessi.

2.6.6 Reazione sull'illuminatore

Quando si illumina, una parte della potenza irradiata dall'illuminatore va sul riflettore, vi si riflette, e ritorna dentro l'illuminatore; questo significa che, nonostante l'illuminatore sia ben adattato al circuito che lo alimenta, si ha una potenza che torna indietro al trasmettitore, avendo dunque, comunque, un disadattamento. Si ha una cosa del tipo:

$$\left| \frac{P_{\mathrm{r}}}{P_{\mathrm{t}}} \right| = |\Delta\Gamma|^2$$

Si può determinare una formula in grado di quantificare questa variazione del coefficiente di riflessione, mediante un modello molto grossolano basato sull'ottica geometrica. Si può dire che:

$$\left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}\right|_{\mathrm{incidente}} = \frac{G_{\mathrm{feed}} P_{\mathrm{t}}}{4\pi f^2} = \left.\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S}\right|_{\mathrm{riflessa}}$$

Per quanto riguarda la potenza P_{ricevuta}, si può dire che per essa valga il circuito di antenna in ricezione, basato sul concetto di area equivalente:

$$P_{\text{ricevuta}} = A_{\text{eq}} \left. \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S} \right|_{\text{riflessa}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{\text{feed}}^2 \frac{P_{\text{trasmessa}}}{4\pi f^2}$$

dunque:

$$\frac{P_{\text{ricevuta}}}{P_{\text{trasmessa}}} = \left(\frac{\lambda G_{\text{feed}}}{4\pi f} \right)^2$$

Se per esempio dunque si avesse:

$$d = 10\lambda \quad f/D = 0,3 \quad G = 10\text{dB}$$

si avrebbe:

$$\Delta\Gamma = \frac{10}{3 \times 4\pi} \sim \frac{1}{3}$$

Questo porterebbe dunque a una variazione piuttosto decisa del nostro coefficiente di riflessione: è necessario cercare di ridurre la reazione sull'illuminatore.

Tecnica del matching plate e cenni all'analisi esatta

Una tecnica in grado di migliorare le prestazioni dell'antenna sotto il punto di vista della reazione sull'illuminatore è quella del "matching plate" (ossia, della piastra di adattamento): nella zona del vertice del paraboloide, il punto critico sotto il punto di vista della riflessione del raggi, si mette una piastrina che riflette il campo elettromagnetico verso l'illuminatore in modo tale che metà del campo abbia una certa fase, l'altra metà sia in controfase rispetto alla prima metà, così che i contributi di campo si elidano.

L'idea basilare sarebbe quella di trarre queste conclusioni a partire da un'analisi fondata sull'ottica geometrica, ma si ha un problema: questa piastra in realtà sarebbe di dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda λ, dunque il modello dell'ottica geometrica non sarebbe più valido. Il modello esatto potrebbe essere fondato sulla seguente idea: dato il riflettore, lo si può dividere in un certo numero di anelli, ortogonalmente all'asse:

In questo modo, il contributo di ogni anello avrà una fase diversa: a seconda del raggio r di incidenza su ciascun anello, infatti, la fase varierà in modo diverso. Si avrà qualcosa di questo tipo:

$\underline{E}$ è un vettore che collega il punto iniziale con quello finale; di questo, si può identificare l'asse, e due vettori $\underline{E}_1$ e $\underline{E}_2$ che collegano rispettivamente il punto iniziale all'asse e il punto in cui l'asse tocca i contributi con il punto finale. Si può dire che

$$\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2$$

Il vettore $\underline{E}_1$ viene generato da un anello di diametro d', mentre il resto dalla parte di paraboloide esterna a questo diametro. Si definisce a questo punto $\underline{E}_1'$ il vettore di modulo uguale a $\underline{E}_1$, la cui fase è ruotata fino a divenire opposta a quella di $\underline{E}_2$. Si può dire che:

$$\underline{E}_1' + \underline{E}_2 = 0$$

Questa situazione è ottimale dal momento che, in questo modo, si è introdotto un ritardo nel contributo di $\underline{E}_1$, in maniera tale che la fase del campo reirradiato dalla zona centrale diventi opposta a quella reirradiata dalla regione periferica.

2.6.7 Sfocamento trasversale

È stato precedentemente considerato il caso di illuminatore spostato assialmente; nel caso si sposti l'illuminatore non assialmente ma trasversalmente, vi sono effetti diversi sotto il punto di vista dell'errore di fase. Si può vedere che:

la differenza di cammino sarà:

$$\Delta\phi = kd \sin\vartheta$$

e non $\cos\vartheta$ come prima; in prima approssimazione si ha un errore di fase lineare il quale, come si può ricordare, porta semplicemente a una traslazione delle ascisse del diagramma di irradiazione, corrispondente a una deviazione del fascio; in realtà, ciò che si ha è anche una componente cubica di errore, che porta a effetti piuttosto particolari: si ha infatti una distorsione **asimmetrica** del diagramma di irradiazione, nel senso che i lobi secondari a sinistra e a destra del lobo principale si comportano diversamente. Nella fattispecie, si ha qualcosa del genere:

Si hanno, a sinistra, i cosiddetti "coma lobes": si tratta, riportando questo concetto in ambito ottico, di aberrazioni: l'immagine è una sorta di riga astigmatica; dal momento che un'osservazione di questo tipo, in ottica, ricordava una cometa, in latino si è usato il termine "coma".

Al fine di quantificare l'effetto dell'errore di fase lineare, è stato definito un parametro, detto "fattore di deviazione del fascio" (BDF: Beam Deviation Factor): si tratta del rapporto tra l'angolo di spostamento dell'illuminatore rispetto all'asse con lo spostamento equivalente che si ha sul riflettore dovuto ad α. Nel caso in cui il riflettore sia piano, $\alpha = \beta$, dal momento che a una certa variazione angolare dell'illuminatore ne corrisponde la medesima (angolare) al riflettore. Nel caso il riflettore non sia piano ma con una curvatura più pronunciata, si ha che $\beta < \alpha$ (solitamente, $\beta \sim 0,6 \div 0,8\alpha$).

Il BDF varia con f/D e con il tapering: questa dipendenza deriva dal fatto che se aumento il taper significa che illumino tendenzialmente solo la parte più centrale del riflettore, che guarda caso è la più piana; d'altra parte, se f/D aumenta, significa che il paraboloide tende a diventare più piatto: più questo rapporto aumenta, più significa che il paraboloide tende a diventare un riflettore piano.

Esistono grafici che quantificano anche la distorsione del diagramma di irradiazione:

Tenendo conto di tutti questi effetti, che sembrano apparentemente sgradevoli, è possibile tuttavia fare qualcosa di interessante: le antenne multifascio. Ciò che si può fare è sostanzialmente mettere, invece di un singolo illuminatore, diversi illuminatori, quasi tutti fuori dal punto di fuoco, e dunque posizionati sostanzialmente in una situazione tale per cui si avrebbe uno sfocamento trasversale; in questo modo tuttavia, guardando il grafico precedente, è possibile avere, per ciascun illuminatore, un certo fascio in grado di coprire, con un unico riflettore, zone differenti, magari anche con servizi differenti. Ciò è estremamente utile per esempio nel caso dei satelliti, in cui è necessario avere molti fasci e allo stesso tempo evitare di avere troppo spazio occupato sul satellite. Il fatto di avere ovviamente più riflettori, oltre a questo vantaggio, introduce un sostanziale svantaggio: la presenza di un maggiore bloccaggio sull'antenna. La soluzione a ciò, come vedremo, è l'uso di paraboloidi offset.

Oltre a fare antenne multifascio è possibile realizzare antenne a fascio sagomato o, più correttamente, "contornato": questo permette di ottimizzare la distribuzione di potenza irradiata lungo un certo angolo. Tutto ciò porta a pagare dei prezzi: avere molti fasci potrebbe portare a interferenza tra i vari panali.

2.6.8 Tolleranza superficiale

I paraboloidi devono essere, oltre che progettati, realizzati, e farlo è problematico; nella realizzazione potrebbe capitare che vi siano errori del profilo del paraboloide, ossia che vi siano delle sagomature di vario tipo, generanti distorsioni di fase assolutamente casuali (e non più di tipo lineare, quadratico o cubico). Facendo analisi di tipo statistico, si è determinata una formula per la quantificazione della variazione del guadagno:

$$\Delta G_{\text{dB}} \sim 686 \left(\frac{\varepsilon}{\lambda}\right)^2$$

in lineare esprimibile come:

$$\frac{G}{G_0} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{4\pi\varepsilon}{\lambda}\right)^2}$$

Queste sono in funzione di ε, che è l'errore quadratico medio della sagomatura. Esistono sostanzialmente due modi di determinarlo:

- costruendo un profilo piatto che, con molta accuratezza, ricalchi il paraboloide, dunque mediante degli estensimetri è possibile determinare la posizione dei vari punti di irregolarità, ottenendone delle vere e proprie coordinate, capendo dunque dove sono presenti i maggiori punti di distorsione di fase e quindi quantificando il parametro; da qui poi sarà possibile trovare la parabola che meglio approssima l'antenna, e quindi determinare per essa i vari parametri quale centro di fase e simili;
- introducendo in vari punti dei **markers**, ossia dei bollini di carta tali per cui, se colpiti da laser, permettono di identificare sulla superficie i punti critici e anche in questo caso introdurre un sistema di coordinate.

Per non avere troppe perdite, un buon valore di ε è:

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{50}$$

in questo modo, essendoci il 686, si riesce comunque a tenere l'errore a circa 0,3 dB. Come altri effetti negativi, ovviamente, si ha la crescita dei lobi secondari: tutta la potenza che non va nel guadagno, andrà da qualche parte, ossia nei lobi secondari; anche per questo motivo è dunque necessario fare in modo da ottimizzare la realizzazione del paraboloide.

2.6.9 Paraboloide offset

Il bloccaggio è un problema risolubile mediante un cambio del riflettore scelto. L'idea è sostanzialmente quella di considerare, come superficie di riflessione, un paraboloide tagliato però con un cilindro "offset", ossia con un cilindro non coassiale con l'asse del paraboloide; equivalentemente si può fare un discorso simile con un piano.

Il vantaggio è immediatamente comprensibile: i raggi vengono deviati in modo da non passare per il riflettore, in modo da eliminare il problema del bloccaggio; allo stesso modo ovviamente, non avendo bloccaggio, non si ha neanche reazione all'illuminatore, eliminando il problema del disadattamento. Purtroppo quest'antenna non ha però solo vantaggi: essendo il riflettore asimmetrico in un piano, si ha su di esso una maggiore cross-polarization; l'antenna inoltre, a parità di apertura (ossia a parità di guadagno), è tendenzialmente più ingombrante:

Nel caso del paraboloide offset si utilizza solo "la metà di sopra" del paraboloide: per avere un riflettore offset dunque con lo stesso diametro è necessario avere una struttura complessivamente più ingombrante. L'illuminatore offset deve inoltre essere più grande di quello del paraboloide simmetrico, essendo l'angolo da coprire più piccolo. Questa osservazione, finchè l'antenna è da 1 metro di diametro, non è assolutamente importante: con dimensioni così ridotte, avere un paraboloide simmetrico o uno offset sostanzialmente non comporta grandi problemi; i problemi arrivano quando il paraboloide è da 100 metri, in quanto poi il momento di inerzia del medesimo aumenta notevolmente, e dunque movimentare l'antenna è molto più complicato; per questo motivo, fino a qualche anno fa le antenne di dimensioni notevoli erano simmetriche, mentre oggi si fanno anche offset.

Rispetto al piano verticale la struttura è simmetrica, mentre rispetto a quello orizzontale la struttura non lo è.

Per studiare questo riflettore si potrebbe utilizzare il metodo delle aperture, studiando dunque il tapering spaziale. Nel paraboloide simmetrico, si consideravano le attenuazioni spaziali α, che erano uguali sui due piani, mentre ora non lo sono più a causa di questa asimmetria.

Ora, sul piano verticale, al posto di andare dall'angolo $\vartheta = 0$ a $\vartheta = \vartheta_{\text{max}}$, si parte da un certo angolo $\vartheta_{\text{min}} \neq 0$, dal momento che ora si ha solo una porzione di paraboloide e non il paraboloide intero. In questo caso non posso avere l'illuminatore sull'asse del paraboloide, bensì lo devo puntare più o meno sulla bisettrice dei due angoli $\vartheta_{\text{min,max}}$; in realtà non è neanche del tutto giusto ciò, dal momento che il tapering dell'illuminatore è costante nelle due direzioni, ma l'attenuazione spaziale è funzione dell'angolo ϑ, dunque in realtà converrà puntare l'angolo verso ϑ_{max}, in maniera a compensare, in questo modo, almeno di un poco, la differenza causata dall'attenuazione spaziale.

Come detto, nel paraboloide offset la simmetria è presente solo su un piano; come già accennato si avranno dissimmetrie dovute a ciò. Nella fattispecie, facendo il calcolo dell'attenuazione spaziale, si può vedere che si avranno situazioni diverse nei due piani: da una parte vale la solita formula secondo cui

$$\alpha_{\text{spaziale}} = 40 \log \left(sec \frac{\vartheta}{2} \right)$$

nell'altro asse, quello "offsettato", si avranno un $\vartheta_{\min}$, ossia un angolo minimo, e un $\vartheta_{\max}$, ossia un angolo massimo; come già accennato puntare l'illuminatore verso l'asse della bisettrice non è una buona idea, dal momento che bisogna cercare di correggere, già a partire dal puntamento, la diversa attenuazione spaziale che si ha; volendo infatti avere un'illuminazione uguale sul paraboloide, è necessario illuminare un poco più in alto. Un criterio più intelligente è quello di puntare l'asse dell'illuminatore verso la proiezione del centro dell'apertura sul paraboloide: questa è una regola pratica. Si avranno pochi gradi di discostamento rispetto alla bisettrice, ma quanto basta per simmetrizzare l'illuminazione. Questo è quanto, per il piano verticale.

Per il piano orizzontale la questione è ancora diversa: grosso modo si ha un ellisse. Intersecando un paraboloide con un cilindro, si può dimostrare (mediante le proprietà delle coniche) che si ottiene una linea piana, la quale sarà un ellisse: tagliare con un cilindro o un piano inclinato è la stessa cosa. Se andiamo a vedere quali sono le linee ad attenuazione spaziale costante, queste sono quelle a ϑ costante, dunque dei coni. Si hanno dei cerchi con, come asse (luogo dei centri), l'asse della parabola. Su un piano di simmetria orizzontale si può vedere che, rispetto al piano verticale, l'attenuazione non varia moltissimo rispetto a quella verticale: è molto più significativa nel piano verticale. Volendo dunque avere un'illuminazione simmetrica, in modo da ridurre la polarizzazione incrociata, può essere necessario che l'illuminatore non sia simmetrico.

I valori standard per un paraboloide offset sono ovviamente diversi da quelli per un paraboloide simmetrico: per quest'ultimo infatti si aveva un rapporto f/D che poteva variare all'incirca da $0,25$ a $0,5$. Un paraboloide offset è sostanzialmente un paraboloide simmetrico del quale si utilizza solo una parte, all'incirca la metà o poco meno di essa. Se dunque D, il diametro del paraboloide, si dimezza, e la distanza focale rimane immutata, si potrà avere un rapporto f/D che varia all'incirca da $0,5$ a 1, quantomeno in linea di massima. Quando ci si riferisce al paraboloide che "genera", da cui si prende dunque il paraboloide offset. I sostegni d'altra parte saranno più lunghi, ci sarà in generale un maggiore ingombro dell'antenna.

Consideriamo un esempio semplice: se $f/D = 1$, cosa si ha? La distanza focale f si può scalare a "1", dunque, per fare il paraboloide offset, si deve lasciare un poco di margine sull'angolo superiore. Data d la distanza di offset, ossia la distanza tra il centro del paraboloide padre e l'inizio del paraboloide offset (distanza sostanzialmente pari all'altezza dell'illuminatore), D al solito l'"angolo" del riflettore, e per avere un offset sufficiente posso per esempio chiedere che:

$$d = 0,1D$$

in modo che i raggi riflessi non vadano contro l'illuminatore. L'illuminatore inoltre non è puntiforme come accennato occupa uno spazio non nullo e, per evitare efficacemente il bloccaggio, si deve mantenere questo margine (i raggi infatti tornano indietro tutti tendenzialmente paralleli tra loro essendo comunque la struttura simile a una parabola, anche se sui bordi rischia di esserci una distorsione da diffrazione). Possiamo a questo punto calcolare gli angoli usando la solita formula, sui due:

$$\vartheta_{\text{min}} = 2\,arctan\left(\frac{D}{2f}\right)$$

$$\vartheta_{\text{max}} = 2\,arctan\left(\frac{d+D}{2f}\right)$$

Supponiamo ora di puntare "in mezzo", ossia al centro dell'apertura; si avrebbe un angolo dell'asse ϑ_0 pari a:

$$\vartheta_0 = 2\,arctan\left(\frac{d+\frac{D}{2}}{2f}\right)$$

Questi tre angoli non sono spaziati linearmente: c'è una certa differenza. $\vartheta_0 - \vartheta_{\text{min}}$ è diverso da $\vartheta_{\text{max}} - \vartheta_0$: quando il paraboloide è piatto la differenza è minima, quando il paraboloide è più panciuto invece la differenza è molto più evidente. Se il paraboloide, per esempio (esempio assolutamente irrealistico) avesse una profondità di 90°, si avrebbe che $\varrho_{\text{max}} = 2f$, $\varrho_{\text{medio}} = f$ (dove per ϱ si intende il segmento che congiunge il punto focale a un certo punto del paraboloide), dunque:

$$\vartheta_{\text{medio}} = 2\,arctan\left(\frac{f}{2f}\right) = 53^\circ$$

Come si può vedere, il ϱ_{medio} è decisamente diverso da 90°: la differenza in gradi è notevole. Il puntamento di conseguenza è estremamente asimmetrico. Ragioniamo ancora su questo caso "esagerato" sull'attenuazione spaziale: l'attenuazione spaziale minima sarà 0, quella massima sarà 6 dB. Si può calcolare l'attenuazione spaziale in decibel mediante la formula:

$$40\log\left(\cos\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\right)$$

sostituendo i 53°, si ottiene:

$$40\log\cos(26,5^\circ) \sim -1,9\text{dB}$$

Questo, per il piano verticale; per il piano orizzontale, si ha sostanzialmente che il ϑ_{min} è nel centro (dal momento che, per il piano orizzontale, è necessario prendere semplicemente la minima di stanza rispetto al fuoco); il massimo sarà ai bordi del paraboloide. Al centro, $\vartheta_{\mathrm{min}} = \vartheta_0$, mentre per ϑ_{max} è necessario calcolare l'angolo in questo modo. ϱ_{e}, ossia il raggio tra illuminatore e bordo (edge), sarà dato semplicemente dal teorema di Pitagora:

$$\varrho_{\mathrm{e}}\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(d + \frac{D}{2}\right)^2}$$

da qua alla solita maniera:

$$\vartheta_{\mathrm{e}} = 2\,\mathrm{a}rctan\left(\frac{\varrho_{\mathrm{e}}}{2f}\right)$$

e così si può anche calcolare, a partire da ciò, l'attenuazione spaziale, e viene fuori che essa è circa pari a - 3,5 dB. Questo significa in sostanza che l'attenuazione spaziale, per quanto riguarda il piano orizzontale del paraboloide offset, può variare da $-1,9$ dB a $-3,5$ dB, ossia ha circa $1,6$ dB di possibile variazione: molto meno di quello che si aveva sul piano verticale.

Per avere lo stesso tapering ai bordi bisogna recuperare in qualche modo, con una diversa forma del diagramma di irradiazione dell'illuminatore. Il progetto del riflettore offset si basa su ciò: simmetrizzare l'illuminazione cercando di fare l'antenna abbastanza piatta per poter ridurre la polarizzazione incrociata. Due parole su quest'ultima: se andiamo a vedere le distribuzioni di corrente superficiali si vede che si hanno delle correnti disposte in modo asimmetrico sul piano orizzontale: nel paraboloide simmetrico le componenti di polarizzazione incrociata sono sempre nulle perchè da una parte all'altra si trovano correnti magari "storte", però in maniera simmetrica, dunque le componenti incrociate si eliminano. Questa simmetria non c'è nel paraboloide offset, nel senso che si ha simmetria solo sul piano verticale. Sul piano orizzontale, dunque, la polarizzazione incrociata è abbastanza significativa.

2.6.10 Altri tipi di antenne a riflettore

Esistono svariati tipi di antenne a riflettore: il paraboloide di questi probabilmente è il più famoso, e uno dei più utilizzati al fine di massimizzare la direttività; si vuole far presente tuttavia il fatto che non tutti i riflettori hanno come finalità la direttività. Per ora si vogliono presentare altre configurazioni "direttive", per poi passare ad altro.

Horn reflectors

Precedentemente si è detto che come illuminatore si utilizza un'antenna a tromba, almeno generalmente, e come riflettore una certa parabola; in questo caso si ha qualcosa di concettualmente molto simile: si ha ancora una volta una tromba, con attaccato ad essa un riflettore. La tromba non può essere più di tanto grossa, altrimenti l'errore di fase risulterebbe essere troppo elevato; all'interno della tromba si ha un fronte d'onda sferico, che incide sul riflettore. Se si è progettato il sistema in maniera di far coincidere i fuochi, il fronte d'onda viene riflesso piano: il riflettore è ancora una volta parabolico, offset, in questo caso "molto offset".

Quest'antenna presenta uno svantaggio molto evidente: essa è molto grossa, e l'unica parte utile ai fini dell'irradiazione finale è l'apertura: l'altezza di questa antenna tuttavia è molto maggiore dell'apertura, dunque l'antenna sarà, in definitiva, molto ingombrante. Essa presenta tuttavia anche dei vantaggi: lo spillover è molto più basso, che in una parabola, e idem i lobi laterali, che saranno molto ridotti.

Antenna a periscopio

L'antenna a periscopio è costituita da un riflettore che fa da "periscopio"; questa si trova nella zona di Fresnel, ossia di campo vicino, di un altro riflettore.

Da dove nasce la necessità di fare una cosa di questo genere? Beh, di solito, è meglio porre un'antenna a quota elevata; questo tuttavia comporta un problema fondamentale per quanto riguarda l'alimentazione di questa antenna: può essere infatti necessario o mettere il cabinet di alimentazione al livello dell'antenna, dunque ad alta quota, o, nel caso in cui si debbano avere potenze nell'ordine dei kW, per forza a terra (essendo il cabinet estremamente pesante in queste situazioni), dei cavi, che introducono una notevole attenuazione.

Questo tipo di antenna permette di eliminare il problema dell'alimentazione, facendo alimentare l'antenna mediante un'altra antenna, in campo vicino. Questo tipo di sistema si può analizzare, in prima approssimazione, mediante il modello di ottica geometrica (per quanto esso non sia corretto): se l'antenna parabolica è posta a terra, ne esce un cilindro di flusso, che rimane confinato in un cilindro per un certo spazio (circa pari alla distanza di Rayleigh); dal cilindro esce un'onda piana che sale, va a colpirsi su un riflettore piano, il quale riflette per l'appunto un fronte d'onda ancora piano. Dal punto di vista dell'ottica geometrica, è come aver messo uno specchio, che deve aver dimensioni tali da catturare la potenza del riflettore a terra. L'area proiettata da questo riflettore sarà ellittica, dal momento che se vogliamo proiettare un'apertura circolare su di un piano inclinato di 45° si otterrà proprio un ellisse, con rapporto di ellitticità pari a $\sqrt{2}$.

Verrebbe istintivo dunque avere un piano con $D = d$, ma in realtà non è una buona idea: il fronte d'onda non è esattamente piano, dal momento che il cilindro nello spazio tende un poco ad allargarsi; prendendo $D = d$ si perde circa 1 dB, ossia il 20% di potenza; per recuperare questa potenza il diametro D deve essere circa pari a $1,25d$. Anche h, ossia la distanza tra i due riflettori, non è casuale: si deve avere, come condizione, quella di restare in campo vicino, al fine di non far deformare il cilindro di flusso; come condizione dunque si richiede che:

$$h < \frac{D^2}{\lambda}$$

Questa cosa ci permette di avere lo stesso guadagno di antenna, senza però avere cavi o cabinet: si può avere più potenza al radiatore, e dunque a parità di guadagno si ha più potenza.

Si noti dal disegno che, in proiezione, si ha un cerchio (nella parte destra della proiezione): si ha, fuori dallo specchio, un cilindro di flusso, dunque è ragionevole immaginare che esso sia circolare.

Riflettore passivo

Il riflettore passivo, o "ripetitore passivo", è un ripetitore in campo lontano. Generalmente esso lavora a qualche GHz: esso risulta essere necessario, per esempio per raggiungere delle valli, dal momento che vale la seguente regola generale: "per superare un ostacolo, esso deve essere circa delle dimensioni di λ; essendo le montagne larghe chilometri, con frequenze dei GHz è impossibile superarlo senza ripetitori. Questi ripetitori inoltre sono passivi, in quanto non richiedono potenza, dunque sono particolarmente vantaggiosi.

Quello che si fa dunque è usare delle sorte di "specchi" disponendo gli orientamenti in maniera tale da finire sulle direzioni delle stazioni riceventi o trasmittenti. Come funziona un riflettore passivo? Si supponga di avere un piano, e un'onda piana (siamo in campo lontano) incidente, per esempio con polarizzazione TM:

Quando l'onda incide sul piano si forma una corrente superficiale che, in base al modello di ottica fisica, è pari a:

$$\underline{J}_{\mathrm{S}} = 2\hat{\mathrm{n}} \times \underline{H}$$

dunque, facendo i conti (con la regola della mano destra), la corrente risulta essere diretta verso l'alto. Ci sono effetti di bordo, ma a parte questi, sapendo che l'onda incidente è piana e dunque con campo costante, anche la corrente avrà intensità costante, ma cambierà la fase, dal momento che il fronte d'onda non incide perpendicolarmente al piano, ma obliquamente; considerando punti successivi su questo piano, vi sarà un ritardo di fase del tipo $k \sin \vartheta_{\mathrm{i}} x$, ossia un ritardo di fase lineare. Quando si ha un errore di fase lineare, si ha uno spostamento angolare del diagramma di irradiazione, dunque si ha qualcosa del genere:

Si ha che l'onda elettromagnetica viene riflessa nella direzione speculare ma anche in qualche altra direzione (non si ha una riflessione perfetta), con anche qualche lobo secondario. Il massimo sarà di sicuro nella direzione speculare, poi il resto dipende dall'ampiezza del fascio: è un po' come avere un'apertura rettangolare che punta nella direzione di riflessione.

Consideriamo due soluzioni del problema "ricezione in una valle":

1. Avere una sola antenna ricevente, più un cavo di una certa lunghezza che collega il ricevitore all'antenna.

2. Avere due antenne, una delle quali è un riflettore passivo, e riflette verso l'altra antenna.

Qual è la differenza nei due casi ?

Nel caso 2 si ha qualcosa di questo genere (utilizzando l'equazione di Friis):

Con il pedice "r" si indica il ricevitore finale, quello "nella valle" mentre con il pedice "s" lo "specchio", ossia il ripetitore passivo. Per l'equazione di Friis si ha:

$$P_{\mathrm{r}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{\mathrm{r}} S_{\mathrm{r}}$$

dove S_{r} è la densità di potenza incidente sull'antenna ricevente. Questa può essere calcolata come:

$$S_{\mathrm{r}} = \frac{A_{\mathrm{S}} G_{\mathrm{S}}}{4\pi d^2} S_{\mathrm{i}}$$

in pratica il ripetitore è un'antenna che nello stesso momento riceve e trasmette ciò che riceve, con un certo guadagno che dipende dall'area (equivalente) del ripetitore stesso. S_{i} è la densità di potenza incidente sullo specchio. A_{S} è l'area incidente in ricezione sullo specchio, G_{S} l'area equivalente in trasmissione. Sostituendo si trova:

$$P_{\mathrm{r}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} G_{\mathrm{r}} \frac{S_{\mathrm{i}} A_{\mathrm{S}} G_{\mathrm{S}}}{4\pi d^2} S_{\mathrm{i}}$$

Se invece non si utilizza il riflettore, si ha una cosa del tipo:

$$A_{\text{eq,riflettore}} = \frac{\lambda^2}{4\pi G}$$

facendo il confronto tra le due configurazioni si può calcolare il "guadagno equivalente", ossia il guadagno della configurazione dotata di ripetitore passivo rispetto al sistema a singola antenna; si ha, in questa situazione,

$$Geq = G_{\text{r}} \left(\frac{A_{\text{S}}}{\lambda d} \right)^2$$

Inserendo uno specchio, dunque, si può dire che il guadagno cambi di questo fattore; ovviamente, tutto cil vale solo per il far field, ossia supponendo che si abbiano distanze maggiori di $\frac{2D^2}{\lambda}$ (ossia di essere nella regione di Fraunhofer). Nel caso limite, per cui

$$d = \frac{2A_{\text{S}}}{\lambda}$$

si riduce di un quarto la potenza, ossia di 6 dB. Sembrerebbe svantaggioso, ma si ricordi che in questo caso non si utilizzano cavi ulteriori, dunque non si introducono attenuazioni superiori a questi 6 dB; questa cosa dunque in situazioni complicate potrebbe essere comunque favorevole.

2.6.11 Antenne a doppio riflettore

Nelle stazioni di terra sostanzialmente tutte le antenne sono almeno a doppio riflettore: queste sono fondamentali quando il guadagno deve essere elevato (50 e più dB). Queste antenne, da studiare, sono ovviamente più complicate di quelle a singolo riflettore, e il loro studio è sostanzialmente basato sulle proprietà delle coniche, nella fattispecie dalla ben nota proprietà per cui, se un raggio esce da un fuoco della conica e incide sulla superficie della conica, allora da qui viene proiettato verso l'altro fuoco della conica (proprietà che discende dal fatto che i raggi-vettori tracciati dai fuochi hanno lo stesso angolo rispetto alla normale). Ciò vale per ellisse, iperbole o parabola.

Questa proprietà si può applicare nel seguente modo:

Se si fa partire un raggio da F_1', questo si inciderà sulla prima conica, e verrà direzionato verso F_2'; se si fa coincidere il secondo fuoco della prima conica, F_2', con il primo fuoco della seconda conica, F_1'', il raggio che si è appena trovato andrà a incidere sul secondo fuoco della seconda conica, da qua tornerà indietro al primo, e così via! Esistono sistemi guidanti elettromagnetici, "beam waveguide", che per l'appunto guidano i raggi, secondo questo principio; ciò permette di far propagare il cilindro di flusso da un punto a un altro, evitando comunque di farla passare per una guida d'onda metallica, la quale comunque introdurrebbe una dissipazione.

Antenna Cassegrain

Uno dei casi più interessanti di coniche è l'iperboloide: esso è basato sull'equazione dell'iperbole, che si può scrivere, in coordinate planari cilindriche, come:

$$\frac{z^2}{a^2} - \frac{\varrho^2}{b^2} = 1$$

dove si può definire:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

e $\pm c$ sono i fuochi dell'iperbole. Per l'iperbole a e c hanno un significato fisico: a è il valore dell'intersezione della linea con l'asse z (ossia il vertice dell'iperbole); b ha un significato meno determinante geometricamente. Si definisce l'eccentricità e come:

$$e \triangleq \frac{c}{a}$$

La cosa interessante è che se spediamo un raggio dal fuoco F_1 verso una delle due falde dell'iperboloide, essendo essa una superficie a due falde, i raggi vengono riflessi **come se venissero dall'altro fuoco**. Se andassimo a metallizzare una delle due falde, il raggio verrebbe riflesso come se uscisse dall'altro fuoco. Questo vale per tutti i raggi provenienti dal fuoco! In altre parole, data una sorgente in F_1, essa si comporta esattamente come una sorgente posta nel fuoco F_2. Se andiamo dunque a mettere F_2 in corrispondenza del fuoco di un paraboloide, orientando tutto in maniera opportuna, un paraboloide si vede arrivare un'onda sferica dal suo fuoco, e "raddrizza i raggi" dell'onda sferica spedendoli al secondo fuoco del paraboloide, ossia verso l'infinito: anzichè usare un illuminatore sul paraboloide, si illumina quest'ultimo mediante un altro riflettore, a sua volta illuminato da un illuminatore. Questo è detto "sistema ottico", costituito da un riflettore iperbolico e da un paraboloide. Il riflettore iperbolico, più piccolo del paraboloide, è detto "subriflettore". L'antenna Cassegrain è basata su questo concetto (e su subriflettori iperbolici).

Studiamo il comportamento dei raggi riflessi dall'iperboloide:
partendo dall'equazione dell'iperbole si può dimostrare che:

$$\frac{\tan\left(\frac{\vartheta i}{2}\right)}{\left(\frac{\vartheta r}{2}\right)} = M$$

ossia è una costante, ed è detta M, "magnification"; si può infine dimostrare che:

$$M = \frac{e+1}{e-1}$$

dove e è l'eccentricità; si noti che questa è un'espressione autoinvertente: l'inversa è uguale, sostituendo $e \leftrightarrow M$. Questo vale per tutti gli angoli di incidenza e di riflessione, dunque anche per i massimi angoli di incidenza e riflessione; come ϑ_{max} una buona idea sarebbe quella di prendere il valore corrispondente al paraboloide utilizzato: se l'angolo del paraboloide al massimo è di 60°, allora si deve scegliere questo valore, per fare in modo di non avere nè spillover nè riduzione dell'efficienza di apertura.

Cosa ci dice tutto ciò? Beh, semplicemente, si ha una struttura tale per cui si parte con un illuminatore con un fascio, e, dopo l'incidenza sull'iperboloide, questo fascio verrà ampliato. A seconda dell'eccentricità, si allarga di più o di meno l'illuminatore del paraboloide. Dato un angolo $\vartheta_{\mathrm{feed}}$, rappresentante il massimo angolo raggiungibile mediante il feed, si ottiene ϑ_{max}, che sarà sicuramente maggiore. Questa cosa è molto utile dal momento che, quando si progetta un'antenna a riflettore, non si può prendere un illuminatore a caso e un riflettore parabolico a caso: è necessario che i due siano "matchati", nel senso che l'illuminatore deve essere tale da poter illuminare l'intera apertura. Il subriflettore permette di estendere il fascio dell'illuminatore in maniera da "adattarlo" all'antenna.

Si presti attenzione su un fatto: l'iperboloide non è a curvatura costante, nel senso che, allontanandosi dal vertice, l'iperboloide tende asintoticamente a una retta, dunque il raggio di curvatura continua ad aumentare tendendo a infinito. Se un'onda si riflette su una superficie convessa, come questa, tende a divergere. Ciò spiega il seguente comportamento:

Se si illuminasse con illuminazione uniforme, grazie al fatto che il subriflettore è abbastanza convesso sul vertice e poi sempre meno ai bordi, fino a diventare piatto, il campo riflesso nella zona del vertice rimane basso, perchè si ha divergenza dei raggi, mentre nei bordi più alto, dal momento che i raggi divergono di meno; questo comportamento permette, almeno in parte, di compensare l'attenuazione spaziale: ciò riduce il tapering sulla superficie, dando un certo "guadagno".

È noto che l'equazione della parabola è:

$$\varrho = 2f \tan \frac{\vartheta}{2}$$

dove ϑ è quello che abbiamo chiamato, qui, ϑ_{r}; l'equazione però dice che questa, per l'equazione delle tangenti prima ricavata, è:

$$\tan\frac{\vartheta_{\mathrm{r}}}{2} = M\tan\frac{\vartheta_{\mathrm{i}}}{2}$$

dunque

$$\varrho = 2Mf\tan\frac{\vartheta_{\mathrm{i}}}{2}$$

Questa cosa è, ancora una volta, l'equazione di una parabola: una "parabola equivalente", tenendo conto della deviazione introdotta dal subriflettore iperbolico. In questo caso si ha una distanza focale equivalente f_{eq} pari a:

$$f_{\mathrm{eq}} = Mf$$

La distanza focale è molto maggiorata, dunque il semiangolo di apertura sarà molto piccolo, e l'attenuazione spaziale sarà di conseguenza ridotta. Si parla di antenne "prime focus" quando l'illuminatore è sul fuoco del riflettore finale (ossia del paraboloide); in questo caso non è così, dal momento che sul fuoco del riflettore finale c'è il subriflettore.

Che vantaggi hanno queste antenne? Beh:

- queste antenne sono più semplici da alimentare: ora c'è il subriflettore, ma esso viene illuminato, non richiede una guida d'onda; il feed è messo vicino al paraboloide, dunque l'alimentazione è più semplice;
- si ha un inferiore tapering ai bordi, dunque si riesce a migliorare anche sotto questo punto di vista: si ha una migliore efficienza d'apertura.

Si ha un grande sostanziale difetto: il bloccaggio è generalmente più elevato, dal momento che si ha un subriflettore che sarà lungo/largo qualche lunghezza d'onda ($5 \div 10\lambda$): il subriflettore funziona sostanzialmente solo se vale il modello di ottica geometrica, dunque questa condizione è necessaria: serve avere a che fare con dimensioni fisiche maggiori di λ.

Dobbiamo a questo punto parlare di progetto: quanti gradi di libertà ci rimangono? L'unica cosa che non abbiamo regolato è il diametro del subriflettore, ossia dell'iperboloide: esso è in realtà vincolato dal fatto che non può essere enorme, dal momento che il subriflettore è comunque un elemento che introduce bloccaggio. Se combiniamo la condizione per cui il subriflettore deve essere $5 \div 10\lambda$, con una condizione ragionevole per il bloccaggio (per esempio il fatto che il diametro bloccato sia $\frac{1}{10}$ o meno del totale), servirebbe avere a che fare con antenne per cui:

$$\frac{D}{\lambda} > 50 \div 100$$

questo ci fa capire una cosa: le Cassegrain sono antenne grandi, mai piccole.

2.6.12 Altri tipi di antenne a doppio riflettore

Antenna gregoriana

L'antenna gregoriana, il cui nome è preso dall'astronomo scozzese Gregory, usa una configurazione di questo genere:

Si utilizza un illuminatore ellittico invece che iperbolico; questa cosa si riflette sul comportamento dell'antenna: ora, con questo tipo di antenna, prima i raggi convergono nel fuoco, poi divergono verso il riflettore principale, per poi essere deviati verso il suo fuoco all'infinito.

Beam waveguide

Un altro tipo di antenna a doppio riflettore è la già citata "beam waveguide": essa è sostanzialmente fatta così:

Questa è basata sul seguente principio: come feed si utilizza una horn antenna, la quale, come noto, esce con raggi "dritti". Il subriflettore, in questo caso, dovrà essere parabolico: se arrivano dei raggi "dritti", e li voglio far arrivare a un paraboloide focalizzati nel fuoco, dovrò avere, come subriflettore, qualcosa che abbia un "fuoco all'infinito" (i raggi non arrivano dall'infinito ma, essendo piani, sostanzialmente è come se fosse così), in maniera da focalizzarli per l'appunto nel fuoco e mandarli nel riflettore finale.

Un'osservazione finale, che può essere interessante: il riflettore offset, come già detto, ha polarizzazione incrociata; un riflettore "dual offset", ossia a doppio riflettore offset (come la Cassegrain o la gregoriana), ha condizioni che riescono a eliminare la polarizzazione incrociata: se i due assi sono leggermente diversi, inclinati uno rispetto all'altro (condizione di Zuguchi), la polarizzazione incrociata viene annullata. Paradossalmente, i doppi riflettori offset hanno dunque una polarizzazione incrociata migliore dei single-offset.

2.6.13 Antenne ad apertura non direttive

Come già detto, non è detto che tutte le antenne ad apertura presentino un comportamento direttivo.

Equazione del radar / antenne radar

Al fine di avere un'idea di come si comporta un'antenna non direttiva, come per esempio potrebbe essere quella di un radar, si vuole presentare l'equazione del radar.

Si consideri un'antenna in trasmissione; questa trasmette una certa onda, che viene ricevuta su un certo oggetto; su questo si genereranno delle correnti, che re-irradieranno, facendo tornare indietro del campo. Si può scrivere che:

$$S_{\text{incidente,target}} = \frac{P_{\text{T}} G_{\text{T}}}{4\pi R^2}$$

dove R è la distanza dall'oggetto.

L'oggetto avrà una certa sezione radar σ, ossia una superficie efficace radar. Questa σ può essere di diverso tipo: monostatica, in cui si ha un ricevitore e un trasmettitore, bistatica, dove si ha un trasmettitore e N ricevitori, o di altro tipo. Supponendo che la sezione radar sia isotropica, e che la potenza scatterata P_{S} dall'oggetto sia dunque:

$$P_{\text{S}} = \sigma S_{\text{incidente,target}} \triangleq \sigma S_{\text{i}}$$

si può dunque dire che la potenza ricevuta indietro, P_{R}, sia (dove A_{eq} è l'area equivalente in ricezione):

$$P_{\text{R}} = \frac{A_{\text{eq}} P_{\text{S}}}{4\pi R^2} = \frac{A_{\text{eq}} \sigma S_{\text{i}}}{4\pi R^2} = \frac{A_{\text{eq}} \sigma P_{\text{T}} G_{\text{T}}}{(4\pi R^2)^2}$$

Tuttavia, è noto che:

$$A_{\text{eq}} = \frac{4\pi}{\lambda^2} G$$

sostituendo:

$$P_{\text{R}} = \frac{\lambda^2 \sigma G_{\text{T}} G_{\text{R}}}{(4\pi)^3 R^4} P_{\text{T}} = \frac{\lambda^2 \sigma G^2}{(4\pi)^3 R^4} P_{\text{T}}$$

Cosa ci dice ciò? Beh, nel caso si debba analizzare per esempio un aereo che vola a quota costante, è necessario che G/R^2 sia una costante. Questa cosa deve riflettersi nel diagramma di irradiazione nella seguente maniera:

L'altezza h a cui si trova l'aereo, dato questo sistema, si può pensare come:

$$h = R \sin \vartheta$$

dunque

$$R = h \, cosec \, \vartheta$$

Si deve dunque richiedere che:

$$\frac{G(\vartheta)}{cosec^2(\vartheta)} = \text{costante}$$

Questo significa, in altre parole, che $G(\vartheta)$ deve avere un andamento come il quadrato della cosecante: questo è quello che si richiede ad un'antenna radar. Questo significa avere, per $\vartheta = 0$, guadagno infinito, e poi qualcosa di questo tipo:

Nella pratica, per progettare un'antenna radar, ciò che si fa è richiedere un guadagno il più alto possibile per i primi gradi, e poi far tendere verso 1 fino a circa 60° (tanto arrivare a 90° non è assolutamente necessario: non si analizza con i radar un aereo a 90°!). Il guadagno è dunque alto e circa costante fino a $3° \div 7°$, e quindi scende come detto.

Antenne cellulari

Il radar è solo l'esempio più antico di antenne non direttive; esistono altre situazioni nelle quali è necessario avere antenne dalle proprietà particolari. Un caso è quello delle antenne per telefoni cellulari:

In questo caso, quando si deve avere un'antenna molto direttiva, serve una proprietà fondamentale: non vogliamo gli zeri. Ciò che si deve fare è riempire gli zeri, e questo si può fare sfruttando l'errore di fase quadratico!

Antenne per satelliti LEO

Nel caso dei satelliti LEO serve qualcosa di ancora diverso: qualcosa di questo tipo:

In questo caso quello che serve è un fascio che abbia guadagno basso al nadir, e più alto dalle altre parti, in maniera da garantire, su tutta la porzione di superficie terrestre considerata, il fatto che il guadagno sia circa costante.

Antenna a pala

Un ulteriore esempio di antenna, idonea per i radar, è quella "a pala":

Partendo dal classico riflettore parabolico, deformandolo, in questa maniera, si ottiene una forma simile a quella di una pala da neve, e questa antenna risultante può essere utilizzata per ottenere antenne per radar.

Antenna per la copertura settoriale

Un ultimo esempio di antenna è quello il cui obiettivo è la realizzazione di una copertura settorale: una sorta di diagramma di irradiazione a porta. Come si può fare? Beh, ciò che sappiamo è il fatto che l'illuminazione dell'apertura è collegata a una trrasformata di Fourier. Quello che si deve prendere è un paraboloide, e un altro, con distanza focale tra i due pari a $\lambda/4$; si metallizza questa cosa, in maniera da avere un po' dell'uno e n po' dell'altro, in modo che nella zona centrale vi sia il primo, in quella periferica il secondo:

A parte gli spigoli che non si fanno, per evitare strani comportamenti del campo, la fase sarà costante, dal momento che la distanza è pari a $\lambda/4$, ma il cammino ottico va "sia avanti sia indietro", dunque fa $\lambda/4 + \lambda/4 = \lambda/2$, e non si ha sfasamento. Per l'ampiezza, invece, smussando, si ha qualcosa di molto simile ad una sinc, o quantomeno ai suoi primi lobi; trasformando ciò si ottiene una specie di porta, come diagramma di irradiazione.

Un altro modo per fare la copertura settoriale è basata sull'uso di N illuminatori, ottenendo dunque un'antenna multifascio, che abbia un diagramma di irradiazione simile a quello di una porta.

2.6.14 Antenne a lente

Quando si parla di antenne a lente si parla ancora una volta di antenne ad apertura, basate però su un concetto molto diverso: in questo caso, infatti, non si utilizza più il principio della riflessione al fine di irradiare, bensì quello della rifrazione: si può dire che le antenne a lente stanno alle antenne a riflettore un po' come, in ottica, le lenti stanno agli specchi. Una caratteristica fondamentale di queste antenne è il fatto che le superfici di ingresso e di uscita sono diverse: nell'antenna a riflettore, a partire da un certo fascio incidente, si produceva un fronte d'onda piano; ora si deve trovare qualcosa in grado di fare la stessa cosa, usando però il principio della rifrazione.

Per studiare il problema in maniera molto formale sarebbe necessario fare uso delle equazioni della rifrazione; quello che possiamo fare noi è considerare fissa una delle due superfici, e considerarla parallela al fronte d'onda entrante o uscente; questo significa che la superficie che si considera (non si è ancora scelto quale delle due fissare) dovrà avere la stessa forma delle superfici a fase costante delle onde per l'appunto incidenti o uscenti: se si parla di onde uscenti, dal momento che esse dovranno essere sostanzialmente piane, la forma d'onda sarà piana; in ingresso, supponendo di avere onde sferiche, si dovrà avere una calotta sferica come superficie.

Si provi a considerare un primo esempio di lente, al fine di motivare un certo insieme di concetti introduttivi: si immagini per esempio di avere un'antenna in trasmissione, che irradi; possiamo **scegliere** come superficie di uscita un piano parallelo ai raggi di uscita; la superficie di ingresso è tutt'ora ignota.

La prima superficie non è nota, ma dobbiamo determinarla mediante ragionamenti intuitivi. Quello che si può fare è utilizzare il principio di Fermat, e fare in modo da avere sull'uscita tutti raggi con la stessa fase; questo significa, dati i raggi provenienti dal feed (un'onda sferica, per ipotesi), che quelli più vicini dovranno essere più rallentati, quelli più lontani di meno; il modo per "rallentare" l'onda consiste nel ridurne la velocità di fase, mediante l'introduzione di un dielettrico; otticamente, questo coincide con il progettare un certo coefficiente di rifrazione n per la struttura, e un certo spessore, variabile con l'angolo ϑ che i raggi del feed formano con l'asse orizzontale del sistema. Definiti i vari punti, si deve avere che:

$$\overline{FP} + \overline{PP'} = \overline{FV} + \overline{VO}$$

questo, per il principio di Fermat, applicato a questa situazione. Dentro la "lente" si ha un indice di rifrazione n, che introduce, all'equazione appena vista, un "peso":

$$\overline{FP} + n\overline{PP'} = \overline{FV} + n\overline{VO}$$

A questo punto, definiamo un certo insieme di parametri: consideriamo r la coordinata radiale del sistema, f la distanza tra la sorgente e il vertice del profilo, V.

Consideriamo un'ulteriore semplificazione per l'operazione: si può vedere che tutto il segmento $\overline{PP'}$ è nel dielettrico; si può anche definire un punto P'' per cui $\overline{PP'} = \overline{P''O}$, dunque togliere a ciascun membro questi, e riscrivere l'equazione come:

$$\overline{FV} + n\overline{VP''} = \overline{FP}$$

tenendo infine conto del fatto che

$$\overline{VP''} = r\cos\vartheta - f$$

si può scrivere l'equazione come:

$$r = f + n(r\cos\vartheta - f)$$

dunque:

$$r(1 - n\cos\vartheta) = f(1 - n)$$

di solito (in realtà non è detto e vedremo esempi in cui non è così) $n > 1$; posso dunque cambiare tutto di segno:

$$r(n\cos\vartheta - 1) = f(n-1)$$

dunque

$$r = f\frac{n-1}{n\cos\vartheta - 1}$$

Questa è l'equazione del profilo della superficie di entrata; volendola identificare formalmente, si dovrebbe fare il cambio di coordinate e cercare di ricondursi a una delle equazioni canoniche; sicuramente è una conica, dal momento che vi sarebbero termini di secondo grado; quello che si può fare è vedere che, per qualche particolare ϑ, si ha $r \to \infty$, dunque si può vedere che si ha la presenza di asintoti; delle coniche, quella che presenta asintoti è certamente l'iperbole. Questo ci dice che, data una superficie di uscita piana, la superficie di ingresso sarà iperbolica. Esiste il caso duale: se si ha una superficie sferica di ingresso, "adattata" dunque al fronte d'onda di ingresso, mediante una dimostrazione analoga a questa si può determinare la presenza di una superficie ellittica in uscita, al fine di raddrizzare il fascio. Come già accennato, il principio è quello di mettere uno strato più spesso di dielettrico in prossimità di un punto in cui i raggi sono più "dritti", in quanto essi vanno rallentati di più, al fine di avere tutti i raggi in uscita con la stessa fase.

Quale delle due antenne è meglio, tra riflettore e lente? Sotto il punto di vista del costo, il riflettore è di sicuro più economico, e soprattutto più leggero: l'antenna a lente infatti è sostanzialmente volumica, dal momento che va riempita di dielettrico, dunque avrà massa molto maggiore rispetto a quella di un riflettore, che sarà semplicemente una superficie. Le antenne a lente vincono invece il confronto quando si parla di frequenze molto elevate, e dunque dimensioni grandi: i volumi, in questi casi, sono comunque "leggeri"; manca inoltre il bloccaggio, e si ha una minore sensibilità agli errori superficiali rispetto al paraboloide.

Il problema della massa elevata in realtà ha una soluzione: la zoolizzazione. Data una lente, si può considerare un raggio centrale, e uno periferico; l'unica cosa che ci interessa è il fatto che, fuori dall'antenna, i raggi abbiano tutti fase uguale. Quello che si può fare è rimuovere dei cilindri di materiale; fare ciò sembrerebbe portare ad avere una differenza di fase di questo tipo:

$$\Delta p = n\frac{2\pi}{\lambda}h - \frac{2\pi}{\lambda}h = 2\pi(n-1)\frac{h}{\lambda}$$

dove h è lo spessore del cilindro rimosso, considerando che dall'altra parte del cilindro ci sia aria. Se si sceglie h in modo opportuno, nella fattispecie in modo da ottenere Δp multiplo di 2π, dunque sfasamento multiplo di 2π, si può fare in modo da rifasare tutti i raggi tra loro, riducendo il volume della superficie:

$$2\pi(n-1)\frac{h}{\lambda} = 2m\pi$$

dunque

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{m}{n-1}$$

In questo caso, la fase del campo sui due raggi considerati è comunque uguale, a meno di multipli di 2π; si ottiene però un'antenna di questo genere:

Questo, oltretutto, utilizzando dielettrici "normali", senza usare quelli con $n < 1$.

Un difetto di questa lente è la riflessione: non tutta la potenza irradiata dalla sorgente arriva poi sull'apertura, e parte di questa dunque viene riflessa (all'incirca un 10%); di queste potenze, la più importante potrebbe essere quella riflessa all'interfaccia di uscita: questa potrebbe tornare indietro, e andare verso l'illuminatore. Per ridurre questo disadattamento, è possibile utilizzare uno "strato di adattamento", facendo dunque qualcosa di concettualmente molto simile a quanto si fa nei circuiti a parametri distribuiti: uno strato $\lambda/4$ con indice di rifrazione n_2 tale per cui:

$$n_2 = \sqrt{n_1}$$

Si noti che la lente è un sistema intrinsicamente a banda larga: non si ha infatti dipendenza di λ nelle prime equazioni di progetto. Ciò che limita la banda ha origine duplice: sicuramente l'illuminatore, ma anche l'eventuale presenza della riduzione di peso (la zoolizzazione) o l'adattamento: questi sono elementi che funzionano per precisi valori di λ, dunque per frequenze ben definite, e ciò riduce la banda. Per i riflettori, si richiedeva semplicemente che essi fossero di diametro maggiore a qualche lunghezza d'onda (come lower bound), e che l'errore superficiale abbia uno scarto quadratico medio limitato (per quanto riguarda l'upper bound).

Materiali artificiali: $n < 1$

Terminiamo l'argomento introducendo l'uso dei materiali artificiali, per cui si ha un coefficiente di rifrazione minore di 1. Il principio che si utilizza in questo caso è esattamente l'opposto: il fatto di avere $n < 1$ significa sostanzialmente "accelerare" i raggi, facendo ottenere loro una v_{f} superiore alla velocità della luce; in questo caso dunque si dovranno accelerare poco i raggi già “dritti”, e di più quelli “storti”. Si ha qualcosa di duale a prima:

Nel caso si abbia un piano come superficie di uscita si avrà un ellisse, nel caso si abbia una sfera come superficie di ingresso si avrà un'iperbole.

Come si possono realizzare questi materiali? Si propongono due soluzioni.

1. Mediante un certo numero di fogli di polistirolo espanso, con lamine metalliche a separarli. Questo polistirolo ha un ε_{r} molto vicino a 1; se si hanno tanti di questi fogli, con queste lamine. Se si manda in questa struttura un'onda elettromagnetica in cui il campo elettrico abbia polarizzazione parallela alle lamine; se $a > 0,7\lambda$, il campo si propaga in questa struttura, poichè è come avere una guida sopra taglio. La velocità di propagazione è quella della guida d'onda, dunque è maggiore della velocità della luce: infatti si ha che

$$k = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} < k$$

L'indice di rifrazione, che è il rapporto tra i due λ, sarà:

$$n = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} < 1$$

questo è un modo per realizzare materiali con indice di rifrazione minore di 1. Questo vale solo per una polarizzazione, ma le lamine possono essere messe sia verticali sia orizzontali, e dunque la polarizzazione finisce per essere accelerata.

2. Un altro tipo di lente è quello detto “bootlegs lenses”, “lenti a stringa da scarpa”; non sono delle vere lenti, ma delle strutture di questo tipo:

   Questa struttura si realizza mediante un numero molto elevato di “schedine”, di circuiti stampati, in cui si hanno, per ciascuno, un'antennina ricevente, un'antennina trasmittente, e tra le due una linea di trasmissione, per esempio una microstriscia; il segnale si propaga lungo questa linea di trasmissione, e si fa in modo da fare qualcosa di molto simile a prima: per le strisce sulla periferia si fa in modo da avere linee più corte, dal momento che il segnale non deve essere rallentato molto; man mano che ci si muove verso il centro, la linea di trasmissione sarà allungata, in maniera che dunque il segnale faccia più giri, ci impieghi più tempo a percorrerla, e dunque venga rifasato nel modo giusto. Il vantaggio di questa seconda struttura sta nel fatto che sulle linee di trasmissione posso mettere degli sfasatori, ossia dei circuiti controllabili in tensione che possono introdurre uno sfasamento; in questo modo si può avere un fronte d'onda finale sempre piano, ma con una variazione di fase di tipo lineare che però può essere ruotato, in maniera da poter avere una scansione elettronica della direzione di puntamento dell'antenna finale.

2.6.15 Antenne a onda progressiva

Esistono due tipi di antenne a onda progressiva: quelle a onda superficiale, quelle a onda leaky. Le introdurremo. L'obiettivo è sempre quello di realizzare una distribuzione di apertura a superficie di fase costante atta a massimizzare il guadagno.

Antenne a onda superficiale

La prima tecnica per realizzare il nostro obiettivo con antenne di questo tipo è questo:

Si immagini di avere una guida d'onda, piena d'aria, e a un certo punto la si riempie di dielettrico, con una certa transizione, in maniera da ridurre le riflessioni; la guida d'onda, da questo punto in poi, è piena di dielettrico; dopo un po' si elimina la parte metallica, e si ottiene un cilindro, una sola guida d'onda dielettrica. Studiando le condizioni al contorno per la propagazione da dielettrico ad aria, ossia dall'interno verso l'esterno, si ha che, da ciò che si propaga nel dielettrico, verso l'esterno si ha un'onda evanescente, ossia un'onda che non porta potenza ma ha un campo di tipo solo reattivo, che tende a decrescere man mano che ci si allontana dall'interfaccia.

Questo nasce dal fatto che, quando si ha un'interfaccia tra due mezzi, si anno le condizioni al contorno all'interfaccia di separazione, sui campi elettrici trasversali: dati due mezzi 1 e 2,

$$\underline{E}_{\mathrm{t},1} = \underline{E}_{\mathrm{t},2}$$

Questa condizione implica il fatto che la costante di propagazione complessa $\underline{k}$ nei due mezzi non è uguale:

$$\underline{k}_{\mathrm{t}1} = \underline{k}_{\mathrm{t}2}$$

però, per un'onda piana, esiste la relazione:

$$k_1^2 = k_{\mathrm{t},1}^2 + k_{z,1}^2$$

$$k_2^2 = k_{\mathrm{t},2}^2 + k_{z,2}^2$$

Nel caso del mezzo 2, si ha:

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} k_0^2 = k_{\mathrm{t},2}^2 + k_{z,2}^2$$

per il mezzo 1, invece:

$$k_0^2 = k_{\mathrm{t},1}^2 + k_{z,1}^2$$

I due k_0 son la stessa cosa, dunque può venire che $k_{z,1}^2$ venga minore di 0, per certe condizioni al contorno; questo significa avere all'esponenziale un termine immaginario, che dunque con il j dell'esponenziale si andrà ad annullare, e darà quindi luogo proprio a un'onda evanescente. Questo si può applicare alle guide dielettriche per intuire il fatto che in queste guide l'energia è confinata nel dielettrico, mentre fuori si ha un'onda evanescente, che porta solo energia reattiva. In generale non è in realtà detto che l'andamento del decadimento sia esponenziale, dal momento che se le superfici d'onda non sono piane, ma cilindriche, si potrebbero avere andamenti dipendenti dalle funzioni modificate di Bessel. Se tronco il cilindro dielettrico, alla fine, il campo assume una distribuzione di tipo quasi-gaussiano, la $\mathcal{F}$ della gaussiana è ancora una gaussiana, e dunque si ha un'antenna tendenzialmente direttiva (anche 20 o 30 dB di guadagno).

Non è facile, con questo genere di antenne, parlare di efficienze di apertura: se con le antenne come la tromba si può dire che sia il rapporto tra l'area efficace e l'area, qui non si ha un'area di apertura ben definita, e in realtà il campo va al di fuori di questa "apertura": si propaga anche all'esterno! L'area effettiva, l'area efficace di questa struttura in realtà è molto maggiore delle dimensioni trasversali dell'antenna!

Antenna a onda leaky

Dall'inglese, si può sapere che "leak" può stare per "perdita, sgocciolamento", dunque leggendo "leaky" possiamo pensare che sia una struttura con delle perdite. Come è fatta questa struttura? Si ha qualcosa di questo tipo:

Data una guida d'onda in cui si pratica una fessura, in questo caso non piccola e centrale come nella linea a fessura ma più evidente e decentrata, essa "perturba" il campo elettrico. La topografia di campo, invece di essere la classica TE_{10}, sarà perturbata. Tra i due lati della fessura il campo elettrico sarà perpendicolare a esso. Sulla superficie ideale al di sopra della fessura si applica il teorema di equivalenza usante le correnti magnetiche, e si ha ciò:

I campi trasversali sono orientati come in figura. Il campo elettrico, in questa fessura, avrà di sicuro una variazione di fase: il campo elettrico è generato dal campo elettrico interno, dunque se si ha un'onda progressiva si avrà un andamento del tipo:

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z}$$

dove

$$k_z = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}$$

Anche l'ampiezza però subisce delle variazioni, dal momento che questa struttura irradia: per il teorema di equivalenza, se si ha un campo così fatto, si avrà

$$\underline{M} = 2\underline{E} \times \hat{\mathrm{n}}$$

sul metallo non si avrà campo elettrico tangenziale, ma sulla fessura sì, dunque si avrà una corrente magnetica così fatta, e se $\hat{\mathrm{n}}$ è diretta verso l'esterno, si ha questo andamento, verso il basso.

Su questa fessura è come avere un filo, un flusso di corrente magnetica, che irradia, dunque perde potenza; pian piano, si ha un leakage, una perdita di potenza, perchè ciascuno di questi elementi irradianti sulla fessura irradia potenza. La distribuzione di ampiezza e di fase lungo la fessura sarà del tipo:

La fase di $\underline{E}$ decresce esponenzialmente più o meno, mentre la fase linearmente, dal momento che si ha l'andamento dipendente al solito dalle linee di trasmissione. Questo significa avere una sorgente "lineica", diretta verso la fessura, con un'ampiezza che man mano decresce, e una fase che varia linearmente. Facendo la trasformata di Fourier di ciò per calcolarne l'irradiazione si trova un'irradiazione moderatamente direttiva ma con una direzione di massima irradiazione ruotata, a causa dell'errore di fase lineare presente nell'antenna. La direzione si può ricavare da quanto già noto:

$$\vartheta_{\max} = \arcsin\left(\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2}\right)$$

Questo tipo di antenna è molto interessante dal momento che ha applicazioni importanti: su di un aereo, per esempio, è sufficiente fare un taglio (fatto ovviamente bene) sulla fusoliera, in modo da ottenere ciò: questo è integrabile e altamente aerodinamico. Dal momento che lavorano sul vuoto, inoltre, spesso hanno meno perdite delle altre antenne.

Capitolo 3

Antenne a filo

Le antenne a filo sono antenne che si estendono in una dimensione. Delle antenne a filo, quella più importante è il dipolo.

3.1 Introduzione - dipolo elementare

Il dipolo elementare è un dipolo che irradia in maniera relativamente semplice; dalle equazioni fondamentali si può ricavare che questo irradia secondo un seno:

$$\underline{E} = \underline{M} \frac{Z_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{2\lambda R} \sin\vartheta$$

Un dipolo elementare è sostanzialmente la sorgente ideale, di lunghezza l, con corrente I, e il momento è:

$$\underline{M} = I\underline{l}$$

Strutture più complicate possono essere studiate a partire da una sovrapposizione degli effetti di questo dipolo elementare: questo, grazie alla linearità delle equazioni di Maxwell. Studieremo vari tipi di dipoli, dipoli accoppiati, e altri tipi di antenne.

Un'antenna a filo è dunque un insieme di sorgenti elementari filari; il caso più semplice è quello del dipolo simmetrico: due conduttori separati alimentati in centro da una certa tensione a radiofrequenza V, lunghezza l per ciascun segmento:

il campo irradiato da questa struttura può essere calcolato utilizzando tanti segmentini di questo tipo. Per conoscere tuttavia i “segmentini”, serve conoscere i vari contributi di corrente su ciascuno di essi, ma ci serve conoscere, su questa struttura, la distribuzione di corrente. Per rispondere a questa domanda la cosa più semplice è considerare l'equivalenza della struttura appena vista con le linee di trasmissione:

se la linea è in circuito aperto, si ha una distribuzione di corrente con uno zero alla fine, e poi il tipico andamento del diagramma d'onda stazionario. Tra le linee di trasmissione non c'è solo quella con i fili paralleli: una linea di trasmissione che si può studiare è la cosiddetta "linea biconica", ossia una linea costituita da due coni affacciati:

questa è abbastanza semplice da studiare dal momento che queste superfici sono quelle per cui $\vartheta = costante$, dunque fare i conti di superfici di questo tipo è abbastanza facile. Per questa struttura si può dimostrare che il modo fondamentale è un TEM. Dal momento che questa struttura si comporta come una linea di trasmissione, la cui impedenza caratteristica è:

$$Z_\infty = \frac{Z_0}{\pi} \log \coth \frac{\vartheta_0}{2}$$

dove ϑ_0 è l'angolo di apertura del bicono.

Se si considera il bicono, si può pensare a un'antenna cilindrica come a un'antenna biconica a sezione variabile, ossia a ϑ variabile, e quindi in un cilindro. Essendo la sezione variabile, il ϑ_0 variabile, l'impedenza caratteristica non sarà costante, e dunque se ne dovrà introdurre una media.

Questa è la maniera più formale di introdurre le antenne a filo; un altro modo, più brutale, per introdurle, è usare il seguente ragionamento: se si prende una linea di trasmissione normale, bifilare, allargando i due bracci in due direzioni opposte, dal punto di vista propagativo la situazione non cambia dal momento che si ha sostanzialmente sulla linea di trasmissione un'onda che si propaga lungo una linea e poi torna indietro; se il filo è verticale invece che orizzontale si ha qualcosa di analogo: si ha ancora un'onda stazionaria. L'onda stazionaria è sempre dovuta allo stesso motivo, poichè da entrambi i fili vediamo un aperto. Si possono avere condizioni di risonanza, quando la lunghezza di ciascun braccio è multipla di $\lambda/4$ (essendo la linea risonante in totale a $\lambda/2$. In pratica noi postuliamo che allargando i bracci non vi sia una sostanziale deformazione dell'onda stazionaria, e questo possiamo supporlo dal momento che l'onda stazionaria deriva dalla sovrapposizione di un modo progressivo e uno regressivo, la velocità di propagazione dipende dal mezzo, dunque sostanzialmente la velocità di propagazione non cambia (cambia invece l'impedenza caratteristica).

Per massimizzare l'irradiazione serve che i contributi di sorgente siano in fase tra loro;

3.1.1 Casi particolari: dipolo corto e dipolo risonante

Dipolo corto

Il primo caso che consideriamo è quello di linea di trasmissione corta, molto più corta di λ; in questo caso, si avrebbe come sempre una distribuzione di corrente "seno", ma in pratica si ha una retta, dal momento che un seno nei primi punti dopo l'origine si comporta in modo simile ad una retta; i due segmenti si toccano, facendo dunque ottenere una distribuzione triangolare di corrente:

Oltre a essere triangolare, è "corta": la lunghezza è molto piccola. L'irradiazione di questa struttura è molto simile a quella del dipolo elementare, con la differenza che questa è minormente efficace: l'altezza efficace di questa antenna è la metà dell'altezza efficace del dipolo elementare di egual lunghezza: il dipolo elementare ha infatti una distribuzione di corrente costante lungo il filo, questo ha una distribuzione di corrente che varia linearmente, e dal momento che l'altezza efficace è data da:

$$\underline{\mathrm{h}}_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{I_{\mathrm{alimentazione}}} \underline{E}_{\mathrm{e}}$$

Da qui si può ricavare che:

$$\underline{\mathrm{h}}_{\mathrm{eff}} = \frac{1}{I_{\mathrm{alimentazione}}} \int_0^l I(z)\mathrm{d}z$$

Se la corrente è uniforme, $I(z)$ è uguale a $I_{\mathrm{alimentazione}}$, dunque l'altezza efficace è semplicemente uguale a l; se la corrente è di tipo triangolare, si ha che sostanzialmente l'integrale si può determinare come un calcolo "base per altezza", stessa base, si calcola l'area, e questa è la metà dell'area (circa rettangolare) di prima. La forma di irradiazione è la stessa: si ha solo minore altezza efficace.

Dei vari tipi di dipoli, è possibile effettuare una catalogazione secondo vari criteri:

- la lunghezza: linea corta, linea più lunga, e così via;
- l'alimentazione: le alimentazioni che finora abbiamo viste sono di tipo simmetrico, ossia bilanciate: c'è un braccio dell'antenna e un altro braccio; in molti casi, anzichè avere un secondo braccio, si utilizza "l'immagine dell'unico braccio"

Approfondiamo questo secondo aspetto: dato un bipolo, si può fare qualcosa di questo genere:

Quello che si può fare è, al posto di mettere un secondo braccio, mettere un piano di massa: applicando su di questo il principio delle immagini, si ottiene qualcosa come quello che si è appena visto: l'immagine della situazione superiore è una corrente diretta ancora una volta nello stesso senso: l'immagine del "-" è il "+", e viceversa, dunque la corrente è uguale. Questo tipo di struttura è detto "sbilanciata", dal momento che non si hanno due morsetti uguali, ma un morsetto e il piano di massa. La struttura bilanciata è detta "dipolo", quella sbilanciata "monopolo".

Ogni dipolo ha la sua versione a monopolo. Il monopolo si fa per esempio su antenne molto grandi: quando le frequenze sono dell'ordine dei MHz, dunque le lunghezze d'onda delle centinaia di metri, conviene usare un solo braccio e il terreno, che viene metallizzato (in modo da diventare un migliore conduttore). Sotto il punto di vista della distribuzione di corrente tra monopoli e dipoli non c'è sostanzialmente differenza: come appena spiegato il fatto di avere l'immagine fa comunque generare una corrente di immagine equiversa a quella interessante. Si ha tuttavia una differenza in impedenza: nella linea bilanciata la tensione è tra i due morsetti, mentre in quella sbilanciata è ancora tra i due morsetti, ma in questo caso il morsetto di massa si trova a metà tra i "due" morsetti di alimentazione, dunque in sostanza la tensione è dimezzata, e quindi anche l'impedenza è dimezzata:

Se per avere la stessa corrente basta metà della tensione, allora l'impedenza è la metà.

Per quanto riguarda l'impedenza caratteristica della linea di trasmissione da cui si ricava questa antenna, come già detto è necessario introdurre una impedenza caratteristica media; facendo i conti (ossia la media integrale), si trova per il dipolo un'impedenza del tipo:

$$\overline{Z_\infty} = \frac{Z_0}{\pi}\left(\ln\left(\frac{2l}{a}\right) - 1\right)$$

dove l è la lunghezza del braccio, a il "raggio" del braccio; il parametro $2l/a$ è chiamato "snellezza": tanto più lunga e più sottile l'antenna, tanto più il filo è sottile. Questa formula è approssimata, ma per una prima analisi è un modello sufficiente. Maggiore è la snellezza del dipolo, maggiore è l'impedenza caratteristica; questo fatto sarà importante per studiare la larghezza di banda del dipolo. Vedremo che un dipolo grande, "tozzo", ha una larghezza di banda molto maggiore di un dipolo sottile.

Si è dunque visto che è possibile fare un'analogia tra una linea di trasmissione e un dipolo in cui ciascun braccio ha lunghezza pari alla lunghezza della linea. Essendovi questa analogia, al fine di poter caratterizzare interamente una linea di trasmissione si sa che servono due costanti (primarie o secondarie, noi facciamo riferimento a quelle secondarie): Z_∞ e k. L'impedenza caratteristica, come detto, si può ricavare a partire dalla linea biconica.

Ciascun dipolo si può analizzare a partire dal concetto di impedenza di irradiazione; dal momento che l'antenna ha delle "perdite", volendo rappresentare sulla carta di Smith il valore dell'impedenza (in realtà del coefficiente di riflessione) al variare della lunghezza l descrive una spirale: non si hanno solo componenti reattive ma anche attive, dal momento che l'irradiazione comporta perdite di potenza.

Più un dipolo è corto, più il comportamento ricorda quello di un'impedenza infinita, di un aperto; si noti tuttavia che, per un dipolo corto, avere impedenza tendente a infinito non significa avere un'impedenza reattiva molto elevata, bensì significa avere una parte ohmica relativamente bassa (qualche decimo di ohm), e una parte reattiva molto elevata. Si può dimostrare che:

$$R_{\text{irradiazione}} \sim 800 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2$$

$$\mathrm{j}X = -\mathrm{j}Z_\infty \mathrm{cotg}(kl)$$

Si noti che in un dipolo corto molto potrebbe capitare che la resistenza di perdite non sia trascurabile rispetto alla resistenza di irradiazione: potrebbero avere valori confrontabili: la resistenza serie a volte si deve vedere come somma di questi due contributi; in questi casi, l'efficienza di antenna non è quasi untaria.

L'antenna a filo, dunque, ha un comportamento sostanzialmente capacitivo. Se si aumenta poi la frequenza, si riduce sempre più la parte reattiva, si prima o poi si arriva a una condizione di risonanza (egualmente si può allungare il filo dell'antenna); quando il filo è lungo (in complessivo) $\lambda/2$, si ha una condizione di risonanza. L'impedenza non sarà zero, ma sarà bassa; in questa condizione, il dipolo è detto "a mezz'onda". Aumentando ancora la lunghezza del filo, si arriva alla parte destra della carta di Smith, e prima o poi si interseca l'asse reale: si ha una seconda condizione di risonanza, quando la lunghezza di ciascun singolo braccio è $\lambda/2$. In questo caso si ha una cosa di questo genere:

Sulla linea ideale si avrebbe qualcosa di questo genere, ma in realtà non si ha proprio un circuito aperto: solo un'impedenza alta. La corrente dunque nel punto di minimo non è zero, ma comunque bassa, dal momento che l'impedenza è comunque abbastanza bassa. Ai fini dell'irradiazione non cambia molto, dal momento che il campo irradiato è comunque sostanzialmente dipendente da un integrale, e, in una zona di minimo, si hanno comunque variazioni ridotte, dunque il problema non si sente molto. Anche in questo caso la distribuzione di corrente è in fase, dal momento che non si ha un'inversione di segno: si ha sempre un'onda stazionaria, ma non si ha inversione di fase, cosa positiva per il guadagno. Questo dipolo, detto "a onda intera" (full-wave), è ancora un dipolo risonante con il campo in fase: la lunghezza totale è λ, l'antenna è più lunga, e il comportamento di fatto è come quello di due dipoli $\lambda/2$ allineati, uno dopo l'altro; quest'antenna, tendenzialmente, guadagnerà di più.

Si può dimostrare che numeri ragionevoli per le impedenze di irradiazione sono, data l lunghezza del singolo braccio:

- $l \ll \lambda$ (dipolo corto)

$$R \sim 0 \text{ molto piccola}$$

$$X \ll 0 \text{ regionecapacitiva}$$

- $l \sim \lambda/4$ (dipolo risonante a mezz'onda)

$$R \sim 70\Omega$$

$$X \sim 0$$

- $l \sim \lambda/2$ (dipolo risonante full-wave): in questo caso si ha una notevole dipendenza sulla snellezza del filo: più è snello, maggiore sarà la resistenza di irradiazione.

$$R \sim 300 \div 1000\Omega$$

$$X \sim 0$$

Questa cosa si può vedere anche graficamente: si consideri la seguente carta di Smith:

Il dipolo corto ha comportamento sostanzialmente capacitivo, e si comporta come qualcosa di molto vicino all'estremo destro della carta di Smith (scendendo e rimanendo molto vicino al bordo). L'antenna presenta ovviamente delle perdite (le perdite di irradiazione stesse: irradiando si perde), dunque l'andamento del coefficiente di riflessione sarà a spirale; la prima volta che si incontra l'asse orizzontale si ha la prima risonanza (all'asse orizzontale si ha un'impedenza puramente resisitiva e dunque la reattanza positiva coincide con quella negativa, il chè è la definizione di risonanza); questa è quella su cui ci si basa, quando si progetta un sistema risonante a $\lambda/2$; andando avanti con la lunghezza, quando $l = \lambda$ (ossia quando si considera un sistema risonante a full-wave), si raggiunge la seconda risonanza.

Questo vale per i dipoli; per i monopoli, basta dimezzare tutte queste impedenze. Volendo infine calcolare la Z_∞ media nel caso del vuoto:

$$\overline{Z_\infty} = \frac{120\pi}{\pi}\left[\ln\left(\frac{2l}{a}\right) - 1\right] \sim 120\left[\ln\left(\frac{2l}{a}\right) - 1\right]$$

L'effetto della snellezza del filo su questa cosa si può vedere studiando la curva della reattanza, nell'intorno del dipolo lungo $\lambda/2$: disegnando al variare della frequenza la reattanza funzione di kl, si può vedere che si ha qualcosa del genere:

La parte resistiva, R_{irr}, cresce con un andamento tendenzialmente quadratico rispetto a l fino a raggiungere i famosi 70Ω; la reattanza, invece, ha un comportamento che va come la cotangente, dunque sarà nulla in $\pi/2$, ma avrà un asintoto in π; questo significa che, se la lunghezza aumenta (e dunque il dipolo è più snello poichè più lungo, a parità di spessore), la variazione della reattanza è differente.

Un esempio di richiesta per un progetto potrebbe essere quella di avere, per una banda che va dai 280 MHz ai 320 MHz, di avere un modulo di coefficiente di riflessione $|\Gamma| < 0,2$; questo è un esempio di specifica di progetto. La specifica sul modulo del coefficiente di riflessione fornisce una specifica sul valore della reattanza (supponendo ovviamente che l'antenna sia adattata).

Si sa che:

$$\Gamma = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$$

dove

$$\zeta \sim 1 + \mathrm{j}x$$

dal momento che comunque, come si può vedere, nell'intorno della risonanza il comportamento è sostanzialmente costante nella parte reale (ci si muove poco sull'asse reale, sull'asse orizzontale dunque), e cambia quasi esclusivamente sull'asse verticale, ossia sull'asse immaginario della carta di Smith; ora che abbiamo giustificato l'espressione approssimata di ζ, possiamo sostituirla, e ottenere:

$$\Gamma \sim \frac{\mathrm{j}x}{2 + \mathrm{j}x}$$

rispetto a 2, al denominatore, jx è certamente piccolo: tenendo conto che l'intera carta di Smith è 1, di sicuro al denominatore jx è trascurabile rispetto a 2:

$$\Longrightarrow \Gamma \sim \frac{\mathrm{j}x}{2}$$

dunque

$$|\Gamma| \sim \frac{|x|}{2}$$

Questo, quantomeno, data la specifica di progetto fornita, è un'approssimazione accettabile. Un trucco che si usa spesso in questo ambito è quello di scrivere l'espressione della reattanza, invece che riferita a $f = 0$, in un intorno della frequenza di risonanza; data:

$$X \sim -Z_{\infty,a}\mathrm{cotg}\left(\frac{2\pi l}{v_{\mathrm{f}}}f\right)$$

si introduce

$$f = f_0 + \Delta f$$

dove f_0 è per l'appunto la frequenza di risonanza dell'antenna; ciò permette di traslare, ottenendo:

$$X \sim Z_{\infty,a}\tan\left(\frac{2\pi l}{v_{\mathrm{f}}}\Delta f\right)$$

Dal momento che stiamo "traslando" il riferimento del sistema nella f_0, ossia nella frequenza di risonanza, a questo punto è come considerare la stessa curva di prima partendo più "avanti"; banalmente, si può vedere che ora la curva di risonanza non sarà più una cotangente, ma una tangente. Nell'intorno di questo punto poi, se Δf è piccolo, si può approssimare la tangente con il suo argomento.

Osservando le curve vere e proprie dell'andamento dell'impedenza di irradiazione di un dipolo/monopolo (una curva per la parte reale, una per la parte immaginaria) si può vedere che fino a circa 80° tutte le resistenze sono uguali tra loro, poi man mano si differenzia. Si arriva a poche centinaia di ohm per snellezze grandi (a/d, dove a è la sezione e d la lunghezza del filo), fino a qualche migliaio.

Si può vedere dal grafico della reattanza che la prima risonanza è su un intorno di 90°, ma in realtà si deve tenere presente il fatto che sarà un po' di meno, dal momento che si possono avere riduzioni dell'ordine del 10%.

La curva parte capacitiva, si arriva alla risonanza e si passa a diventare induttivi, e dopo un po' vi sarà una seconda risonanza, dopo la quale si tornerà capacitivi; la seconda risonanza non si ha per 180°, ma per molto meno (non poco meno come prima), e qua si ha una dipendenza notevole dalla snellezza: il dipolo full-wave dunque è significativamente più corto di λ (almeno, il valore reale per cui si ha la seconda risonanza).

Parliamo a questo punto di diagrammi di irradiazione. Se si parla di dipolo corto, in sostanza il diagramma di irradiazione coincide con quello del dipolo elementare: la distribuzione di corrente è triangolare.

Come si calcola il diagramma di irradiazione per un'antenna a filo? Si consideri una generica $I(z)$ di questo tipo:

Ciò che si deve fare per calcolare il diagramma di irradiazione è semplicemente una trasformata di Fourier spaziale:

$$\sin\vartheta \int_0^L I(z) \mathrm{e}^{\mathrm{j}kz} \mathrm{d}z$$

dove

$$k = k_0 \sin\vartheta$$

Dal momento in cui l è corto, dunque $l \ll \lambda$, la trasformata di Fourier, la quale avrà tendenzialmente un andamento di questo genere, genericamente:

andando a vedere, nello spazio k (il quale comunque è lo spazio-immagine della trasformata spaziale di Fourier), capita che l'intervallo di visibilità rimane molto ridotto, dunque la funzione è praticamente uguale a 1 (per la proprietà della trasformata di Fourier, infatti, si ha che, se l è molto corto, allora sicuramente nello spazio finale, ossia nello spazio k, la funzione sarà molto dilatata). Per la zona che si va ad osservare nello spazio k, dunque, si avrà sostanzialmente una funzione costante.

Il guadagno finale è $\sin^2\vartheta$; qual è dunque il guadagno massimo? Precedentemente, si era detto che la direttività massima si poteva scrivere come:

$$D_{\max} = \frac{4\pi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} d(\vartheta, \varphi) \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\varphi}$$

nel nostro caso, $d(\vartheta, \varphi) = \sin^2\vartheta$: in questo caso si otterrebbe l'integrale di $\sin^3\vartheta$, il quale si riesce a risolvere in forma analitica, e si vede che la direttività viene 1,5 alla fine dei conti. Questo stesso integrale può tornare utile per calcolare la resistenza di irradiazione dell'antenna: essa si dovrebbe calcolare in questo modo

La resistenza di irradiazione, come noto, è quella resistenza equivalente che dissiperebbe la potenza che in realtà viene irradiata; quello che si può dire è che:

$$P_{\text{irradiata}} = R_{\text{irr}} I_{\text{a}}^2$$

dunque, se si conosce qual è la corrente di ingresso del dipolo, e la potenza irradiata, che in questo caso si può calcolare come:

$$E = \frac{M}{2\lambda R} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR} \sin\vartheta$$

M è uguale alla lunghezza per la corrente, dunque:

$$E = \frac{lI}{2\lambda R} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR} \sin\vartheta$$

sapendo che

$$P_{\text{irr}} = \frac{|E|^2}{Z_0}$$

posso ricavare che $P_{\text{irr}} \propto I_{\text{a}}^2$. Si trova la formula con il 800.

Una nota: per fare antenne a frequenze basse, si ha un problema: l'antenna a frequenze basse non può essere lunga chilometri. Quello che si fa, di solito, per frequenze basse, è il dipolo corto. Si è tuttavia visto che l'altezza efficace del dipolo corto è circa la metà di quella del dipolo elementare, dal momento che la distribuzione di corrente triangolare non è quella uniforme (che non è praticamente realizzabile). Inoltre, si può dimostrare che la resistenza di irradiazione è proporzionale al quadrato della altezza efficace, dunque anche la resistenza di irradiazione è molto ridotta, riducendo drasticamente l'efficienza del dipolo. Ciò che si cerca di fare a questo punto è realizzare una distribuzione di corrente uniforme. Ciò si riesce a fare inserendo un carico capacitivo nel dipolo corto; questa cosa si può comprendere, guardando la carta di Smith (recuperando il modello a linea di trasmissione).

Si è visto che l'impedenza del dipolo ha un comportamento di questo tipo; il comportamento della corrente totale, invece, si può studiare a partire dalla tensione; noi sappiamo infatti che:

$$V(z) = V^+(1 + \Gamma)$$

mentre

$$I(z) = I^+(1 - \Gamma)$$

si ha che $1 - \Gamma$ è qualcosa del tipo:

ciò corrisponde all'andamento triangolare, come visto.

Cosa succede se metto una capacità?

Quello che capita in pratica è che in pratica non si parte più da un punto a impedenza nulla, ma a un punto a impedenza pari a:

$$y = \omega C Z_{\mathrm{a}}$$

dove y è l'ammettenza normalizzata. Questa cosa accade perchè, per la teoria delle linee di trasmissione, caricare la fine di una linea con una capacità equivale a caricarla con una linea di una certa lunghezza:

$$\omega C Z_{\mathrm{a}} = \tan(kh)$$

Il dipolo è corto, dunque sulla carta di Smith sappiamo per certo che si percorrerà solo un angolo piuttosto corto; una cosa intelligente tuttavia sarebbe quella di introdurre un "tratto di linea aggiuntivo" tale da posizionarci in prossimità di uno dei massimi di corrente, ossia, invece che nel punto dove "si ha un seno che parte" (con crescita dunque lineare), in uno dei "massimi" del seno, in modo tale che la variazione sia molto più ridotta con l.

Date due sezioni A e B, quanto valgono Γ_{A} e Γ_{B} ? Beh, noto cosa c'è alla sezione A, basta spostarsi sulla carta di Smith, però si noti che ci si muoverà di poco: si gira di poco. In questo caso ci si sposta sul cerchio esterno, di poco. Il risultato ottenuto è il fatto che $\Gamma_{\mathrm{A}} \sim \Gamma_{\mathrm{B}}$, dunque la distribuzione di corrente non è più triangolare, ma quasi costante: è trapezoidale. Se la capacità è di dimensioni corrette, quasi rettangolare. In questo modo la distribuzione di corrente è dunque praticamente uniforme.

Come si fa a fare ciò? A caricare con una capacità rispetto a massa? Con qualcosa che abbia una capacità rispetto alla massa: questo si può fare con una piastra, o una palla: Hertz per esempio, quando realizzò la prima antenna, usò due bocce. Facendo in questo modo, quello che sostanzialmente capita è che si ha una altezza efficace maggiore, dunque una resistenza di irradiazione maggiore, dunque una η maggiore! Introdurre questa capacità coincide con aumentare l'altezza dell'antenna, come allungarla. Inserire questa capacità, dunque, coincide sostanzialmente con l'aumentare l'altezza. Si può avere un'altezza equivalente di 100 metri, con magari 10 metri di altezza effettiva.

Attenzione: un'antenna deve essere isolata rispetto a massa; c'è il grosso rischio però di caricare elettrostaticamente l'antenna, e poi rompere tutto al ricevitore; quello che si fa di solito è mettere l'antenna a massa per la sola continua, mediante un'induttanza molto grande, in modo che si abbia un'induttanza molto grande per la radiofrequenza, scaricando però a massa le scariche elettrostatiche. Si possono anche avere bobine di accordo, dal momento che queste antenne, a causa della presenza di queste capacità, possono avere comportamento capacitivo; se non si hanno problemi di larghezza di banda, per compensare la parte capacitiva queste bobine di accordo possono essere usate per portare in risonanza l'antenna; la bobina può essere variabile, in maniera da poter variare la frequenza di risonanza.

Alcuni risultati del guadagno massimo (direttività massima) per i dipoli più importanti sono:

- per il dipolo corto, si ha una funzione che sostanzialmente coincide con il seno; per un seno, si vede dunque che il guadagno è circa 1,5;
- per un dipolo $\lambda/2$, si ha che il diagramma di irradiazione si restringe, dunque l'antenna risultante è più direttiva; viene fuori che $G \sim 1,64$ (non si ha un aumento molto importante della direttività), e l'angolo a 3 dB da 90° passa a 76°.
- il dipolo full-wave avrà fascio ancora più stretto.

Si noti un fatto: a questo punto verrebbe da dire che, allungando ulteriormente l'antenna (per esempio prendendo una double-full-wave, 2λ, si potrebbe avere ciò:

In questo caso, l'andamento dell'onda stazionaria è diverso: una volta si ha un +, una volta si han un - (nel diagramma di onda stazionaria), dunque in questo caso non si hanno più onde in fase, dal momento che si è ricevuto uno sfasamento di π; già a 2λ dunque si ha un diagramma che non è accettabile. Ciò che si utilizza, ogni tanto, è l'antenna $3/2\lambda$, che talvolta può essere utile:

Questo può essere utile dal momento che il massimo di irradiazione è leggermente traslato in angolo (ruotato); questo può avere delle applicazioni di interesse, quando per esempio abbiamo applicazioni mobili: nel caso di collegamenti quali quelli urbani, si hanno dei cosiddetti "canyon urbani": il segnale viene preso non tanto dalla sorgente diretta, quanto dal campo diffratto dalle case; un'antenna il cui diagramma di irradiazione è inclinato di 45°, dunque, è ottima sotto questo punto di vista.

3.1.2 Dipolo ripiegato

Un altro tipo di antenna molto interessante è il cosiddetto "dipolo ripiegato": si tratta di un filo metallico lungo una lunghezza d'onda (λ) ripiegato; questo, viene alimentato in modo bilanciato. Questo tipo di antenna si può vedere come due dipoli affiancati, uno alimentato e uno no, cortocircuitati tra loro; come si può analizzare questa struttura?

Si può usare un tipo di analisi spesso utilizzato a microonde: la scomposizione della struttura in un modo pari e in un modo dispari, sommati tra loro. Questo può essere dunque visto, come da disegno, in due strutture: una con una tensione di modo pari v_{p}, una con una tensione di modo dispari, v_{d}. Sommando le due strutture, si deve trovare quella di partenza; questo significa avere:

$$\begin{cases} v_{\mathrm{p}} - v_{\mathrm{d}} = 0 \\ v_{\mathrm{p}} + v_{\mathrm{d}} = V \end{cases}$$

questo significa avere:

$$v_{\mathrm{p}} = v_{\mathrm{d}} = \frac{V}{2}$$

Queste sono le tensioni. Come si possono, a questo punto, calcolare le correnti ? Vediamolo per ciascuna delle due configurazioni (pari e dispari):

- configurazione pari: si possono collegare i due morsetti, che si trovano alla stessa tensione, e non essendo differenza di tensione sul collegamento non vi sarebbe una corrente; questo finisce per avere la seguente struttura:

  sostanzialmente coincide con l'avere un generatore con due fili affiancati, che servono un cilindro con un certo diametro; il comportamento risultante è quello di un dipolo "un po' tozzo", ma comunque un dipolo; essendo un dipolo, si può dire che, data I_{totale} la corrente sui due rami, e $I_{\mathrm{totale}} = 2I_{\mathrm{p}}$:

  $$\frac{\frac{V}{2}}{I_{\mathrm{totale}}} = \frac{V}{2(2I_{\mathrm{p}})} = \frac{V}{4I_{\mathrm{p}}} = Z_{\mathrm{dipolo}}$$

  dunque

  $$\frac{V}{I_{\mathrm{p}}} = 4Z_{\mathrm{dipolo}}$$

- per la topologia dispari, i due rami non sono più i due rami di un dipolo, ma sono due fili paralleli in cui una corrente è entrante e una uscente: il comportamento è sostanzialmente quello di una linea di trasmissione bilanciata, con ogni braccio lungo $\lambda/4$. Dato un corto circuito un fondo, la lunghezza a un quarto d'onda, il generatore vedrà un aperto, quindi $I_{\mathrm{d}} = 0$

In totale, si ha che:

$$\frac{V}{I} \sim \frac{V}{I_{\mathrm{p}}} = 4Z_{\mathrm{dipolo}}$$

ossia, è il quadruplo dell'impedenza del dipolo. Dal momento che un dipolo come il $\lambda/2$ ha 70 Ω di impedenza, questo avrà dai 250 ai 300 Ω: questo alla risonanza, ma se il dipolo poi è tozzo si ha qualcosa di un poco diverso, da qua questo tipo di indeterminazione.

Normalmente, i coassiali hanno impedenze caratteristiche dell'ordine dei 50 Ω (o dei 75 Ω, per esempio nei sistemi televisivi); questa impedenza, molto maggiore, dovrebbe essere adattata; in certi casi, tuttavia, non si adatta. Una situazione di queste, per esempio, è quella in cui si vuole utilizzare un'alimentazione simmetrica. Questa è fondamentale: quando si ha a che fare con un coassiale per portare l'alimentazione, è necessario bilanciare: se non si facesse così, quello che si avrebbe sarebbe una situazione di questo genere:

Un dipolo deve essere alimentato con una linea simmetrica, dunque con una bifilare, ma le bifilari funzionano solo a frequenze basse; a qualche centinaio di MHz la bifilare dissipa, dunque irradia, dunque si deve per forza utilizzare il cavo coassiale; al di sopra di qualche GHz si usa il coassiale. Il coassiale è una struttura sbilanciata: si ha l'anima all'interno, la calza all'esterno, e la calza è a massa. Il problema sta nel fatto che se si collega la massa al "-" si collega il "-" dell'antenna a massa, dunque non si avrebbe corrente all'altro ramo; l'accoppiamento da una parte all'altra farebbe avere un po' di corrente, ma non di sicuro la distribuzione corretta e simmetrica, ottenendo di fatto un diagramma di irradiazione che non è quello che vogliamo. Inoltre se si facesse ciò in trasmissione, si avrebbero delle correnti sul conduttore esterno, ottenendo irradiazione anche da parte del coassiale. La cosa giusta è utilizzare un "balun" (BALanced-UNbalanced): un dispositivo in grado di trasformare la tensione da sbilanciata, come nel coassiale, a bilanciata, come nel dipolo. Questo per frequenze basse potrebbe essere fatto semplicemente mediante un trasformatore a presa centrale:

Questo va bene fino a qualche centinaio di MHz; se si deve andare su di frequenza, si deve fare una cosa simile, con il cavo coassiale:

Questo è un balun a costanti distribuite, ed è detto "balun a trombone": si ha un coassiale lungo $\lambda/2$, piegato in questo modo; uno dei morsetti lo si collega al "punto caldo", al conduttore centrale; le masse vengono messe tutte assieme (legando tutto con un filo metallico), e l'altro morsetto del tratto $\lambda/2$ si collega all'altro morsetto dell'antenna. Questo sistema funziona da simmetrizzatore dal momento che, data la tensione V del conduttore centrale del coassiale di alimentazione, la V inizia a propagarsi sul coassiale e, se il carico è adattato, esso vede solamente l'onda progressiva; V, facendo mezza lunghezza d'onda, diventa $-V$, poichè si ha uno sfasamento di 180°: questa è la tensione bilanciata. Per quanto riguarda la corrente, essa si divide per 2, dal momento che da una parte entra la corrente, dall'altra esce, e si ha $I/2$: la corrente si divide nei due rami, ossia nel coassiale e nell'antenna. Il risultato è che, se la tensione raddoppia e la corrente si dimezza, si ottiene un trasformatore: l'impedenza è quadruplicata. Dei 280 Ω che vedo ai morsetti del dipolo ripiegato, ne vedo 70 dall'altra parte.

3.1.3 Dipoli accoppiati

Le antenne a dipolo finora analizzate sono tutte omnidirezionali, dunque non direttive; esistono modi di realizzare dipoli con una certa direttività. Si può tuttavia fare la seguente osservazione: non è necessario che un dipolo, per irradiare, sia alimentato mediante un generatore: per fare antenne più direttive è infatti possibile mettere alcuni dipoli vicini tra loro. Si immagini di mettere due dipoli vicini tra loro, e di sfruttare il principio dell'"accoppiamento mutuo": se si ha qualcosa di questo tipo:

Il campo vicino del dipolo alimentato andrà a interagire con il dipolo vicino, genera forze elettromotrici indotte e dunque correnti indotte che, con un Thevenin equivalente, corrispondono a una V_2 e I_2. Si può pensare al sistema come a un quadrupolo (dunque a un 2-porte), e questo può essere rappresentato mediante una matrice di impedenza:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

Cerchiamo di trarre qualche conclusione sul significato fisico di questi parametri:

- Z_{11} e Z_{22} sono le "impedenze proprie" delle antenne: esse sono i rapporti tra tensioni e correnti ai morsetti delle antenne quando sulle altre non si ha corrente: queste sono sostanzialmente le impedenze delle antenne, supponendo che l'altra antenna non esista.

- Z_{21} e Z_{12} sono le impedenze "mutue" (e, per reciprocità, coincidono): si tratta di termini "mutui", nel senso che sono i contributi di impedenza che si hanno a causa dell'interazione del campo generato dall'altra antenna: una sorta di "reazione dell'antenna accoppiata sull'altra antenna". Viene anche detta "impedenza attiva". Vale:

$$Z_{21} = Z_{12} = Z_{\mathrm{m}}$$

Questo ci fa capire che non è necessario per forza mettere due generatori: è sufficiente mettere un generatore su una delle due antenne, questo genererà delle correnti, che genereranno un campo, che genereranno un campo indotto sull'antenna accoppiata, e così una tensione a vuoto sull'altra antenna. Se su quest'ultima si mette un carico, si avrà dunque anche una certa corrente, dunque una re-irradiazione: si hanno due antenne, non solo una, ed entrambe partecipano al campo risultante generato dal sistema. L'antenna che genera campo senza essere alimentata è detta "antenna parassita", dal momento che utilizza l'energia dell'altra antenna per irradiare pure essa. L'interazione delle due antenne avrà delle interferenze, in alcuni punti costruttive e in altri distruttive, portando a un diagramma di irradiazione non più omnidirezionale, ma più direttivo.

L'impedenza mutua per due dipoli affacciati tra loro, considerata in parte reale e immaginaria, presenta un andamento di questo genere:

Gli andamenti sono sostanzialmente dei seni integrali. Disegnando sul piano complesso queste curve, si otterrebbe in sostanza una spirale. Più l'antenna che si intende accoppiare a quella alimentata è lontana, più si ha un ritardo di fase nella tensione; al massimo, per questo, si utilizza 2λ come distanza; si tenga conto infatti che, a λ, si potrebbe già quasi parlare di campo lontano.

Il valore dell'impedenza mutua in campo lontano potrebbe essere calcolato in una maniera alternativa, mediante l'equazione di trasmissione: l'equazione di Friis, come noto, potrebbe essere utilizzata infatti per la determinazione della potenza trasmessa da un'antenna a un'altra; calcolando la potenza, si riesce in qualche modo anche a derivare a partire da essa la tensione; note tensioni e correnti, sono note anche le impedenze.

Si ha anche un secondo grafico, che riguarda un caso particolare di dipoli accoppiati: quello di dipoli allineati; in questo caso l'impedenza mutua è molto minore:

Con già qualche decimo di λ, in questo caso, l'impedenza mutua è pari a pochi ohm.

Un'ultima osservazione: nel caso si avesse una situazione di questo genere:

Volendo fare un array, sembrerebbe che, per avere la stessa corrente su tutti i dipoli, dovrei semplicemente imporre la stessa tensione, come fatto in precedenza; questo non è vero, a causa delle diverse impedenze mutue che presentano questi dipoli: dal momento che i dipoli più verso l'esterno vedono solo un dipolo vicino, quelli più centrali 2, si avrà una asimmetria. Come vedremo in seguito, una situazione del genere non funziona in questa maniera.

Esempio: calcolo delle impedenze accoppiate

Si consideri a questo punto un esempio teorico/pratico, al fine di approfondire l'argomento delle impedenze mutue, delle impedenze accoppiate. Dato un dipolo alimentato e un dipolo parassita (entrambi $\lambda/2$), dove quest'ultimo ha i morsetti cortocircuitati tra loro:

1. determinare la corrente nell'antenna parassita (2);

2. determinare $Z_{\text{in},1}$.

Per rispondere alle due domande, prima di tutto si vuole scrivere la rappresentazione secondo matrice di impedenza del doppio bipolo equivalente del sistema:

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

Il fatto di avere, nell'antenna 2, i morsetti cortocircuitati tra loro, comporta l'avere $V_2 = 0$; questo significa che si può scrivere:

$$Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = 0 \Longrightarrow I_2 = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}}I_1$$

e in questo modo si è risposto alla prima domanda; si può rispondere alla seconda domanda semplicemente sostituendo nella prima questo risultato:

$$V_1 = Z_{11}I_1 - Z_{12}\frac{Z_{21}}{Z_{22}}I_1 = I_1\left(Z_{11} - Z_{12}\frac{Z_{21}}{Z_{22}}\right)$$

dunque

$$Z_{\text{in},1} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - Z_{12}\frac{Z_{21}}{Z_{22}}$$

Il secondo membro di questa addizione introduce una variazione di impedenza non piccola:

$$Z_{12}Z_{21} = Z_{\text{m}}^2$$

Si consideri una distanza tra i due dipoli pari a $0,2\lambda$; si avrà:

$$Z_{\text{m}} \sim (50 - \text{j}20)\Omega$$

considerando poi il fatto che l'impedenza propria per dipoli $\lambda/2$ è circa pari a 70Ω, si avrà:

$$\frac{V_1}{I_1} \sim Z_{\rm p}\left(1 - \frac{Z_{\rm m}^2}{Z_{\rm p}^2}\right) = \left[1 - \left(\frac{50 - {\rm j}20}{70}\right)^2\right] \sim 1 - 0,6\angle - 45^\circ$$

i due valori, 1 e $0,6$, sono comparabili, dunque la variazione di impedenza, come anticipato, sarà piuttosto importante.

3.1.4 Antenne Yagi-Uda

L'ultimo esempio è stato fatto al fine di introdurre uno dei tipi di antenne più noti e importanti: le antenne Yagi-Uda. L'ultimo esempio ci ha permesso di capire un fatto: scegliendo opportunamente la distanza e le lunghezze degli elementi, si può ottenere un diagramma di irradiazione direttivo: le antenne Yagi-Uda sono proprio basate su questo principio. Questo tipo di antenne consiste in una sorta di schiera endfire (ossia schiera assiale), dove però uno solo degli elementi (ciascuno dei quali è un dipolo, molto spesso ripiegato, al fine di avere impedenza di ingresso più alta, cosa comoda dal momento che la presenza dei parassiti riduce l'impedenza) è effettivamente alimentato. Si ha una cosa di questo genere:

Si osservi che si ha a che fare con due tipi di elementi parassiti: uno più lungo del dipolo (il cosiddetto riflettore), e altri più corti (detti direttori). Di riflettore di solito ve ne è uno solo, di direttori un certo numero. Si può verificare (e lo faremo tra breve) che, nel cosiddetto "riflettore", rispetto al disegno si inducono delle correnti tali per cui l'irradiazione va nella direzione del riflettore, ossia "viene riflessa": va verso destra. Viceversa, i direttori hanno delle correnti indotte con fasi tali per cui l'irradiazione va "verso destra", dunque continua nella strada. Difficilmente oltre i 20 direttori si fanno antenne, dal momento che si ha una sorta di saturazione della direttività.

Come mai si hanno effetti di questo tipo? Il trucco sta nell'impedenza propria, ossia nell'equazione vista precedentemente: in queste equazioni le correnti non dipendono solo dall'impedenza mutua, ma anche dall'**impedenza propria dell'elemento parassita**, ossia da Z_{22}: se l'elemento parassita è lungo come se fosse alla risonanza, questa impedenza è reale, ma se fosse più lungo avrebbe un comportamento induttivo (dal momento che aumentando la lunghezza si finisce sulla parte superiore della carta di Smith), fosse più corta capacitiva (metà inferiore della carta di Smith): si considera come lunghezza di riferimento quella della prima risonanza ($\lambda/2$). Questo Z_{22} ha un angolo di fase che in un caso è positivo, nell'altro negativo, dunque la fase della corrente cambia in maniera significativa.

Si noti che, per quanto riguarda l'implementazione fisica dell'antenna Yagi-Uda, essa è sostenuta da un certo supporto; questo supporto può essere solo di un isolante, o potrebbe anche essere metallico? La risposta è che esso potrebbe anche essere metallico, dal momento che in un dipolo parassita il punto centrale è un punto a tensione nulla (ciò vale anche per i dipoli ripiegati). Si consideri per esempio un dipolo ripiegato: dall'analisi fatta, il punto centrale del ramo non alimentato è a tensione nulla; tra i vantaggi del dipolo ripiegato ve ne sono altri, ossia il fatto che esso, contrariamente al dipolo semplice, è un corto circuito per le basse frequenze: se si va ad alimentare un dipolo ripiegato a frequenze basse ciò che si vede è un corto circuito, a causa della "continuità metallica"; questo è estremamente utile per le scariche elettrostatiche, dal momento che, se si ha un dipolo ordinario, esso è composto da due rami separati; se si mette su un tetto un'antenna con dipoli non ripiegati, nel momento in cui si collega, bisogna prima scaricarlo elettricamente, mettendo i morsetti in corto circuito, altrimenti i due conduttori, separati, possono essersi caricati elettrostaticamente con tensioni diverse, portando una grossa tensione elettrostatica al ricevitore, distruggendolo. Spesso si richiede che un dipolo semplice sia a massa tra le specifiche. Nel caso del dipolo ripiegato su un'antenna Yagi-Uda si ha ciò, ma anche il fatto che, essendo parassita, è a tensione nulla. Nel caso si montasse dunque un'antenna su un traliccio e cadesse su di essa un fulmine, non vi sarebbero problemi, specialmente nel caso si usassero dipoli ripiegati: il fulmine si scaricherebbe senza dare problemi. Questa ultima osservazione deriva dall'equivalenza tra dipoli e linee di trasmissione:

Se si ha una linea lunga circa $\lambda/4$, gli andamenti di tensione e corrente saranno all'incirca duali; l'elemento parassita, illuminato da un campo elettromagnetico che arriva da chissà dove, essendo il campo vicino alla risonanza si avrà una distribuzione di corrente I, una distribuzione di tensione V, e al centro essa presenterà uno zero; mettendovi un bastone di metallo, non esisterà niente che possa generare correnti su questo stesso bastone di metallo e dunque renderlo parte effettiva dell'antenna.

Esempio teorico/pratico: campo irradiato da un riflettore

Al fine di fare i conti semplici, si consideri una situazione in cui l'impedenza mutua sia puramente reale, ossia per cui $X = 0$; un esempio è:

$$\begin{cases} X \sim 0 \\ R \sim 60\Omega \end{cases} \Longrightarrow @0,15\lambda$$

Le due antenne sono siffatte: $Z_{11} = 70\Omega$ circa; Z_{22} è tale da avere un dipolo più lungo di $\lambda/2$, dunque dal comportamento induttivo; questo significa avere un dipolo, per esempio del tipo $Z_{22} = 80 + \mathrm{j}80$. In questo caso si ha, come preventivato (ma non ancora motivato) un riflettore, dal momento che l'impedenza propria è di tipo induttivo.

Facciamo due conti:

$$I_2 = -\frac{Z_{\mathrm{m}}}{Z_{22}} \sim -\frac{60}{80\sqrt{2}\angle + 45^\circ} \sim 0,53\angle + 135^\circ$$

A questo punto, al fine di comprendere l'effetto del riflettore, facciamo il calcolo del campo al variare dell'angolo ϑ che si ha rispetto all'asse su cui son disposti questi due dipoli (il riflettore e il principale). Il comportamento è circa simile a quello di una schiera (si vedrà in seguito meglio l'argomento):

Si consideri l'origine del sistema di riferimento sulla prima antenna, e si consideri dunque una seconda antenna; ϑ è l'angolo che si forma rispetto al piano su cui si trovano le due antenne. Sulla prima antenna si ha una certa corrente I_1, sulla seconda una certa corrente I_2; le due sono poste a una distanza d tra loro. Come noto dai teoremi, il campo sarà proporzionale alle correnti presenti sulle antenne.

Abbiamo a questo punto $I_1 = 1$, $I_2 = 0,54\angle + 135^\circ$. Vogliamo fare, a questo punto, il calcolo del campo al variare dell'angolo ϑ. Il campo irradiato da queste due antenne si può ottenere mediante sovrapposizione degli effetti dei due campi: a grande distanza il campo totale sarà la somma dei due, e sarà dunque dato da qualcosa di proporzionale alle due correnti, ma non solo:

$$E_1 \propto I_1$$

$$E_2 \propto I_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}kd\cos\vartheta}$$

Il fatto di avere delle schiere in sostanza è un po' come discretizzare l'integrale di irradiazione:

$$\int_\Omega \underline{J} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\underline{r}'\cdot\hat{R}} \mathrm{d}S$$

dove al solito $\underline{r}'$ descrive le sorgenti sul volume, $\hat{R}$ è il volume che descrive il punto potenziato. Data una struttura lineica, dunque un filo, si ha:

$$\int I \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\underline{r}'\cdot\hat{R}} \mathrm{d}l$$

e si può dire che:

$$\underline{r}' \cdot \hat{R} = k_0 (d\cos\vartheta)$$

Il secondo elemento è dunque ritardato di un certo ritardo di fase, dipendente dall'angolo ϑ. La cosa interessante a questo punto è vedere come varia l'ultima parentesi, al variare dell'angolo ϑ: devo infatti "pesare" I_2 per $e^{jk_0 d\cos\vartheta}$. Si può vedere che:

- per $\vartheta = 90°$, $e^{-jkd\cos\vartheta} = 1$;
- per $\vartheta = 0°$, si ha e^{jkd}, dove, avendo scelto $d = 0,15\lambda$, si avranno circa 48°:

$$kd = 0,15 \cdot 360° \sim 48°$$

- per $\vartheta \sim 180°$, $\cos\vartheta = -1$, dunque ho $1\angle - 48°$.

In pratica, si devono sommare due vettori: quello fisso, proporzionale a I_1, e quello di direzione variabile; per $\vartheta = 0°$, il vettore viene moltiplicato per il fattore di fase 48°, e questo porta i due vettori a essere sostanzialmente in controfase: i due contributi andranno a sottrarsi l'uno dall'altro, e dunque in questo modo si avrà un'irradiazione molto bassa nella direzione $\vartheta = 0°$, ossia nella direzione "dal dipolo alimentato verso il riflettore"; dualmente, si può vedere che, se $\vartheta = 180°$, si ha la direzione di massima irradiazione: questa è la direzione opposta rispetto a quella appena analizzata, ossia è la direzione "verso il dipolo alimentato": il riflettore dunque si comporta da riflettore, proprio perchè, a causa del comportamento induttivo, si ha un comportamento di questo tipo: massima irradiazione verso il dipolo alimentato. Nel minimo si ha un'irradiazione circa come $1 - 0,53 \sim 0,47$, mentre nell'altro caso $1,3$ (mal contati). $1,3/0,47 \sim 2,5$, dunque si ha un rapporto di circa 8 dB da una parte all'altra.

Questo è un primo esempio di antenna a filo direttiva.

3.1.5 Corner reflector

Un altro tipo di antenna direttiva è il cosiddetto "corner reflector", ossia il riflettore a diedro. Il problema di una schiera, come detto precedentemente, è il fatto che si dovrebbe alimentare ciascun elemento con un certo segnale; nella Yagi-Uda, questo di fatto non è necessario; nella corner, si fa qualcosa di simile, ossia si evita comunque di alimentare diverse antenne, ottenendo tuttavia un comportamento direttivo.

Quello che si fa è comunque realizzare una sorta di schiera, polarizzando un solo elemento: si ha un dipolo, due semipiani metallici (non semi-infiniti ma comunque con certe dimensioni); i due piani metallici del diedro agiscono da piani di massa, e permettono così di generare un certo numero di immagini dell'unico dipolo effettivo, fisico, presente nel sistema. Questi due piani metallici hanno un'immagine a testa, ma poi ci sono le immagini delle immagini: usando un'analogia ottica, quando ci si mette tra due specchi, si vede che ci sono infinite immagini; qua le immagini delle immagini non sono infinite, ma ve ne è un certo numero; non ci sono in realtà solo 3 sorgenti, ma anche di più: ciò dipende dall'estensione dei semipiani e dall'angolo.

Come si può progettare questo diedro? Studiamone la geometria, cercando di legare la posizione del dipolo con l'angolo formato tra i due piani. Volendo realizzare un'antenna direttiva, con dunque l'irradiazione massimizzata in una certa direzione, sarà necessario fare in modo che i contributi provenienti dalla sorgenti e dalle sue immagini siano tra loro in fase. Si consideri qualcosa del genere:

Il diedro forma un angolo 2α, quindi α è il semiangolo; si ha una certa distanza d tra il vertice del diedro e l'elemento irradiante; per massimizzare il campo irradiato sull'asse, data la sorgente S e la sua immagine S' (vi sarà anche una S''), la distanza del contributo sull'asse, dunque dalla sorgente alla S' e alla S'' deve essere in fase. Il cammino ottico deve essere tale da portare tutto in fase. Il cammino ottico deve essere in fase. Tenendo conto che la sorgente e l'immagine, per il principio dell'immagine, hanno segno opposto (la sorgente è parallela al metallo, dunque l'immagine sarà di segno opposto), 180° son intrinseci all'immagine, dunque p (la proiezione sull'asse del diedro della distanza tra S' e S) deve essere tale da portare uno sfasamento di ulteriori 180°: deve essere uguale a $\lambda/2$. Questo vuol dire che, sapendo che:

$$SS' = 2d \sin \alpha$$

e che

$$p = SS' \cos \beta$$

dove β è il terzo angolo del triangolo rettangolo che si forma; vedendo che

$$\beta = 90° - \alpha$$

possiamo dire che, per gli archi associati:

$$p = 2d \sin^2 \alpha$$

questo, deve essere uguale a $\lambda/2$. Questo significa che:

$$d \sin^2 \alpha = \frac{\lambda}{4}$$

Questa è la condizione che ci serve al fine di realizzare il progetto. Questa condizione sarà rispettata per infiniti casi, poichè dipende da α. Si possono trovare i valori di d per vari valori di α, dunque per vari diedri, invertendo la formula; si può fare una tabella, usando la seguente formula:

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{1}{4\sin^2\alpha}$$

- per $\alpha = 45°$, $d/\lambda = 1/2$;
- per $\alpha = 60°$, $d/\lambda = 1/3$;
- per $\alpha = 30°$, $d/\lambda = 1$;

In questo modo, i contributi sull'asse sono tutti in fase.

Si possono fare altre osservazioni: si può ottenere l'immagine dell'immagine ribaltando rispetto al semipiano un'immagine. Se poi $\alpha = 45°$, ossia se il diedro è retto, le immagini delle immagini coincidono. Ciò permette di ottenere, in questo specifico caso, una sorta di schiera quadrata equivalente. In realtà, per le antenne a filo direttive, di solito si usano le schiere.

3.1.6 Antenna biconica - antenna discone

Le antenne che stiamo per presentare sono interessanti soprattutto per la larghezza della banda: le caratteristiche son simili a quelle di un dipolo, ma la banda è superiore.

L'antenna biconica è costituita da due coni affacciati per il vertice, alimentati nel "punto di contatto" delle punte dei due coni. Si ha un'evidente simmetria assiale, dunque l'irradiazione è multidirezionale.

Antenne di questo genere vengono usate per applicazioni a larga banda, in maniera che possano captare o trasmettere segnali su una banda molto larga. Un esempio di applicazione potrebbe per esempio essere la compatibilità elettromagnetica: se si deve fare una verifica sulle emissioni irradiate e non si ha idea della banda nella quale esse sono localizzate, un'idea è quella di usare un'antenna a larga banda in maniera che possa captarla. Con quattro o cinque antenne si riesce a coprire un certo insieme di frequenze.

Un'evoluzione dell'antenna biconica è la cosiddetta antenna discone (disk + cone):

L'antenna biconica è un'antenna bilanciata, sostanzialmente come un dipolo; se però si taglia a metà un'antenna biconica, e si mette dall'altra parte un disco che agisce da piano di massa, si realizza un'altra antenna. Questa antenna si alimenta con un cavo coassiale che arriva da sotto, il conduttore interno di quest'ultimo va a saldarsi al piattello, quello esterno al cono. Le dimensioni usualmente sono $\lambda/4$ e $\lambda/3$, e λ è quella relativa alla frequenza più bassa.

3.1.7 Antenna log-periodica

Prima di introdurre il funzionamento dell'antenna log-periodica, antenna con caratteristiche di banda teoricamente infinite, dal momento che deriva da una classe di antenne dette "antenne indipendenti dalla frequenza" (tutto ciò, ovviamente, nell'idealità). Prima di parlare dell'antenna log-periodica, è necessario dunque un cappello introduttivo su questa classe di antenne.

Principio di Babinet - antenne indipendenti dalla frequenza

Bisogna a questo punto introdurre una serie di concetti al fine di studiare l'irradiazione da una struttura di questo tipo:

Babinet studiò l'effetto di irradiazione da parte di una certa struttura, e della sua struttura complementare. Dato un piano metallico e la sua apertura, come irradia essa? Beh, si può utilizzare il metodo delle aperture:

$$\underline{E} = \frac{1}{2\lambda R} \int \underline{E}_{\text{apertura}} e^{jk\underline{r}' \cdot \hat{R}} dS$$

La struttura complementare a questa è quella che si ottiene, partendo dalla struttura appena presentata, scambiando i "vuoti" con i "pieni": una semplice piastra metallica. In questo caso si hanno correnti su questa piastra, dunque, illuminando questa piastra con un'onda elettromagnetica, su questa si inducono delle correnti; se l'onda è piana e uniforme, con il metodo dell'ottica fisica si può dire che la distribuzione delle correnti è anch'essa uniforme; il campo irradiato sarà dunque:

$$\underline{E} = \frac{Z_0}{2\lambda R} \int \underline{J}_{\text{S}} e^{jk\underline{r}' \cdot \hat{R}} dS$$

e in questo caso $\underline{J}_{\text{S}}$ è approssimativamente costante, il contorno è lo stesso, dunque i due diagrammi di irradiazione sono sostanzialmente uguali. Cambiano delle costanti (in uno c'è uno Z_0 e nell'altro no), ma, ricordando che $\underline{J}_{\text{S}} = 2\hat{n} \times \underline{H}$, ricordando che $\underline{H} \propto \frac{1}{Z_0}\underline{E}$, si ha semplificazione. Le irradiazioni da un'apertura e dalla sua complementare sono uguali.

Definito il concetto di antenna complementare, si può definire quello di antenna autocomplementare, ossia di antenna complementare a sè stessa; un esempio di antenne di questo tipo è il seguente:

In questo caso si ha che la complementare di un'antenna è ancora la stessa antenna, semplicemente ruotata di 90°.

Questo concetto si può generalizzare: esiste un corollario del principio di Babinet tale per cui:

$$Z_{\text{antenna}} Z_{\text{complementare}} = \left(\frac{Z_0}{2}\right)^2$$

dove $Z_0 = (120\pi)\Omega$

Se però l'antenna è autocomplementare, le due impedenze di antenne sono uguali, dunque si ha che l'impedenza dell'antenna per questo caso è una costante, a qualsiasi frequenza; il fatto che l'impedenza di antenna sia costante, implica che anche la corrente di ingresso deve essere costante, dunque anche l'irradiazione, e questo per ogni valore di frequenza.

Tutto ciò è vero, ma ideale: purtroppo le antenne autocomplementari non si riescono a fare, dal momento che si dovrebbe avere a che fare con dimensioni dell'antenna infinita, e ciò ovviamente non è realizzabile; inoltre, l'alimentazione dovrebbe essere infinitesimamante piccola: nel punto di alimentazione l'antenna deve continuare a essere autocomplementare, dunque si avrebbe questo tipo di problema, di asimmetria introdotta dall'alimentazione.

Un'antenna a banda larga potrebbe per esempio essere un triangolo:

In questo caso si avrebbe un'antenna a banda molto larga: è come avere un'antenna biconica "schiacciata". È un'antenna planare, con prestazioni di buona larghezza di banda, dunque che si può utilizzare con segnali a larga banda.

Antenna log-periodica

L'antenna log-periodica (LPDA: Log-Periodic Dipole Array) è sostanzialmente costituita da una sequenza di dipoli, disposti secondo una successione di dipoli ciascuno alimentato (dunque una schiera vera e propria). Sembra fisicamente molto simile alla Yagi-Uda, ma in realtà sono concettualmente estremamente diverse. In questo caso si ha qualcosa del tipo:

L'alimentazione si ha tramite una linea bifilare che distribuisce la potenza ai vari elementi: in questo caso si ha un accoppiamento di tipo conduttivo, mediante una linea di trasmissione, non dunque puramente elettromagnetico. In questo caso dunque il sostegno è parte della linea bifilare. Analizziamo il nome "log-periodica": si ha una periodicità di tipo logaritmico, sia in ampiezza sia in disposizione spaziale. L'alimentazione proviene da un cavo coassiale che entra in uno dei due conduttori della bifilare, percorre tutto l'interno, poi esce "dal davanti"; l'anima va dall'altro braccio di quel conduttore e la calza resta su quello: in questo modo si generano punto caldo e punto freddo. È un po' come avere un generatore all'inizio di una linea di trasmissione. Ogni distanza di un periodo è uguale all'altra distanza dell'altro periodo, secondo un rapporto costante: periodicità dei rapporti. Ogni periodo è non più uguale a quello adiacente ma simile, mediante un periodo costante. In altre parole, la struttura riduce le proprie dimensioni fino ad averle infinitesime:

$$d_n = d_{n+1}\tau$$

dove τ è il rapporto di periodicità che si stava dicendo, d la dimensione del periodo.

Se la struttura log-periodica è infinita, man mano riduce le proprie dimensioni fino a farle arrivare infinitesime, allora a qualunque frequenza si lavori i rapporti tra la lunghezza d'onda e le dimensioni della struttura rimangono gli stessi; non è che sia esattamente così ma, date delle dimensioni, ciascuna cella ha le dimensioni di quella adiacente scalate per τ; a una certa f_0 il rapporto tra la lunghezza d'onda e le dimensioni complessive dei pezzetti della struttura abbia certi valori; se invece di f_0 si usa la frequenza τf_0, $\lambda = \lambda_0/\tau$, e se si calcolano i rapporti tra le distanze di questa struttura e la nostra lunghezza d'onda, si ritroverà che i rapporti sono ancora gli stessi, salvo il fatto che si riferiscono non più alle celle che si stavano considerando prima, ma a quelle adiacenti, dunque la struttura in termini di lunghezza d'onda è ancora la stessa, ma scalata di una certa cella. In altre parole, a intervalli di frequenza fissi, dati da τ, la struttura mantiene costanti le dimensioni in termini di lunghezza d'onda. A τf_0, $\tau^2 f_0$ e così via, il comportamento si mantiene.

Più alla buona: se noi abbiamo una sequenza di radiatori di diversa lunghezza, ciascuno dei quali risuona a una diversa frequenza, il primo elemento (si noti che anche in questo caso l si riferisce alla lunghezza di metà di ciascun dipolo) risuonerà a una frequenza bassa, il secondo più alta, e così via: ciascun elemento avrà una certa risonanza. Ciascun dipolo può essere progettato per avere una certa larghezza di banda di risonanza. Quello che si può dire è che, di tutti gli elementi presenti, vi saranno uno, due o tre elementi prossimi alla risonanza, e che quindi irradiano.

Come si può determinare la banda di frequenza di queste antenne? Beh, abbiamo che:

- $f_{\min}$ è la frequenza tale per cui, numerando con 1 l'elemento più lungo:

  $$l_1 = \frac{\lambda_{\max}}{4}$$

  dunque, si può determinare la lunghezza come:

$$l_1 = \frac{\lambda_{\mathrm{max}}}{4} = \frac{\mathrm{c}}{4f_{\mathrm{min}}}$$

- dato l'n-esimo elemento, l'ultimo, si potrebbe dire che:

$$f_{\mathrm{max}} = \frac{\mathrm{c}}{4l_n}$$

Questa seconda osservazione in realtà è grossolana: gli elementi più corti in realtà non possono essere semplicemente calcolati in questo modo, dal momento che alla frequenze più elevate, dal momento che il punto di alimentazione si trova proprio dove sono gli elementi più corti, la discontinuità tra coassiale e bifilare fa sì che la topografia nei primi elementi non sia quella che dovrebbe essere. Servirebbero dunque elementi aggiuntivi, in maniera tale che la distribuzione di corrente sia esattamente (o quasi) quella sinusoidale che noi vogliamo.

Per l'elemento più corto, dunque per quello relativo a f_{max}, vanno aggiunti in realtà alcuni elementi extra, e ciò si fa moltiplicando per il fattore di banda attiva B l'ultimo elemento:

$$l_1 = \frac{\mathrm{c}}{4f_{\mathrm{min}}}, \quad \ldots \quad , l_n = \frac{\mathrm{c}}{4f_{\mathrm{max}}B}$$

dove $B \sim 1,5$, ma dipende: lo si può determinare mediante dei grafici. Per la log-periodica, la regola generale di progetto è:

$$\frac{l_i}{l_{i-1}} = \tau$$

Stessa cosa si fa per anche le distanze: come detto prima, tutte le dimensioni devono essere scalate del fattore τ;

$$\frac{d_i}{d_{i-1}} = \tau$$

ossia, si ha una fila di elementi sempre più corti e sempre più vicini tra loro.

Un'antenna log-periodica è dunque caratterizzabile da due parametri: il rapporto τ, e α; ossia il semiangolo che si ha tra le rette che uniscono i vari elementi (semiangolo di apertura). Si può per esempio determinare una mappa al variare di τ e α che rappresenti una di queste possibili strutture.

Usando tutte le formule presentate si riesce a ottenere una antenna che funziona in maniera corretta, ossia che è adattata nella banda da f_{min} a f_{max}, avendo un'impedenza di ingresso costante, e un diagramma di irradiazione dunque quasi invariato nell'intera banda.

Dopo studi, sono emersi dei grafici di progetto, funzione anche di un terzo parametro, σ, detto "spaziatura relativa", ottenuto come combinazione degli altri:

$$\sigma = \frac{1}{4}(1 - \tau)\mathrm{cotg}(\alpha)$$

si noti che $4l_n$ è di fatto la distanza riferita alla lunghezza d'onda di risonanza del $n$esimo dipolo.

Alcune note sull'alimentazione: l'alimentazione arriva verso gli elementi più corti, e soprattutto l'alimentazione degli elementi successivi è "scambiata" ogni volta:

si inverte di segno ogni volta la polarità dell'elemento adiacente. Ciò si realizza mettendo un dipolo alimentato con il filo "sopra", una "sotto", e così via invertendo ogni volta: in questa maniera si realizza in pratica questa inversione. Questa cosa si deve fare perchè se si considera questa struttura come derivata da un'antenna indipendente dalla frequenza, autocomplementare, viene naturale l'inversione che si sta dicendo; calcolando inoltre le correnti sui singoli elementi e le fasi del campo irradiato, si può vedere che, grazie a questa inversione di alimentazione, l'irradiazione è sempre "verso destra". Questa antenna è dunque moderatamente direttiva (10 dB), e va "verso l'alimentazione". La direttività è bassa perchè, ogni volta, solo 2-3 elementi lavorano assieme, un po' come una schiera di 2-3 elementi, dunque il guadagno è relativamente basso.

Il guadagno cresce con il parametro τ, decresce con α.

3.1.8 Antenna turnstile

Un altro esempio di antenna, in questo caso a banda non particolarmente larga, è la cosiddetta "antenna turnstile" ("dipolo rotante"). A cosa serve questo tipo di antenna? Sostanzialmente, a risolvere un particolare problema: ottenere un'antenna a polarizzazione orizzontale e tendenzialmente omnidirezionale. Sull'omnidirezionalità, basterebbe il dipolo, il quale tuttavia ha una polarizzazione di tipo verticale (se si gira il dipolo per avere polarizzazione orizzontale, sul piano E diventa direttivo e quindi non va bene); si potrebbe usare un dipolo magnetico, realizzabile mediante loop di corrente, ma ciò avrebbe un altro problema: una realizzazione di questo tipo avrebbe un'impedenza di antenna bassa, dunque efficienza bassa.

L'antenna turnstile in realtà non solo è omnidirezionale, ma anche quasi isotropica: in realtà il campo è non nullo anche in altre direzioni.

Come è costituita questa antenna? Come detto, da due dipoli, disposti sul piano orizzontale (quello su cui si vuole l'irradiazione): si chiama "1" il dipolo disposto verticalmente, "2" quello disposto orizzontalmente.

Si può approssimare il diagramma di irradiazione di questi due dipoli in questo modo:

$$\underline{E}_1 \sim \frac{M_1}{2\lambda R} \cos \vartheta$$

$$\underline{E}_2 \sim \frac{M_2}{2\lambda R} \sin \vartheta$$

Si noti che l'asse rispetto a cui è posizionato il dipolo è l'asse orizzontale, dunque sarà il dipolo disposto orizzontalmente ad avere $\sin \vartheta$ come funzione indicante l'andamento del campo: ϑ infatti si calcola a partire dall'asse orizzontale (è come aver ruotato sia i dipoli sia il sistema di riferimento). Al contrario, il dipolo orientato verticalmente avrà un andamento sostanzialmente sfasato di 90°, da qui dunque l'utilizzo della funzione coseno per esso: i massimi di irradiazione dei dipoli sono sulla direzione trasversale, dunque le due si "scambiano". Si vede che si ha dipendenza dal momento dei due dipoli, dunque sostanzialmente dalla corrente. I due campi sono paralleli tra loro, dal momento che, a grande distanza, entrambi i campi sono diretti verso $\hat{\vartheta}$, dunque a grande distanza i due campi si sommeranno tra loro, scalarmente (a parte un termine di fase).

Chiarito questo fatto, si faccia la seguente ipotesi: correnti uguali in modulo e in quadratura:

$$I_2 = \mathrm{j} I_1$$

a questo punto:

$$M_2 = \mathrm{j} M_1 \Longrightarrow E = E_1 + E_2 = \frac{M}{2\lambda} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R} (\cos \vartheta + \mathrm{j} \sin \vartheta)$$

Dove il termine "coseno" proviene dal dipolo 1, il termine "seno" dal dipolo 2. Per la formula di Eulero, la parentesi costituisce sostanzialmente il cerchio di raggio unitario, descritto dalla variazione dell'angolo ϑ; in ampiezza, tuttavia, non si ha dipendenza da ϑ. Questa cosa vale data l'ipotesi di avere campi che vanno come seno e coseno, dunque sostanzialmente supponendo di avere a che fare con dipoli elementari; nella pratica le cose non saranno esattamente così, dal momento che i dipoli saranno tendenzialmente a mezz'onda (e dunque i fasci un poco più stretti); tutto ciò che stiamo dicendo tuttavia si mantiene abbastanza vero anche in questo caso più realistico.

Cosa capita nella direzione ortogonale?

Si ha qualcosa di interessante: una situazione per cui su un piano si ha una polarizzazione orizzontale, sull'altro una polarizzazione verticale, dunque due campi sfasati di 90°, quindi una polarizzazione circolare sulla direzione ortogonale: si tratta di un'antenna che dunque irradia in tutte le direzioni, e anzi in cui la direzione di massima potenza è proprio quella ortogonale (nella fattispecie il doppio di quella del piano orizzontale); questo nasce dal fatto che, se si va a calcolare il modulo del campo al quadrato, le due componenti di campo E sono sul piano orizzontale proporzionali a M, e si prende il campo o da un dipolo o dall'altro a seconda dell'angolo; nell'altro piano si avranno le somme dei due moduli quadri del campo, quindi il doppio della potenza rispetto all'altro piano (sull'asse orizzontale agisce solo un dipolo per volta, nella direzione ortogonale agiscono assieme, in sostanza, per le proprietà del dipolo). L'antenna è sostanzialmente isotropica (in realtà come detto in certi punti il guadagno è maggiore).

Si noti, per concludere, che le due antenne, essendo ortogonali, tendenzialmente non "parlano" non hanno impedenze mutue significative.

3.2 Antenne a elica

Prima di parlare di antenne a elica, una parentesi su cosa sia un'elica (come curva): si tratta sostanzialmente di una linea, definibile mediante un sistema di due equazioni; un'elica è una curva che si sviluppa su un cilindro, ed è descrivibile come:

$$\begin{cases} \varrho = a \quad (a \text{ costante}) \\ z = \frac{h}{2\pi}\varphi \end{cases}$$

Queste sono le equazioni dell'elica: dato un cilindro di larghezza a (detto "raggio dell'elica"), per φ che varia di 2π, la coordinata z varia di h: h è detto per l'appunto "passo" dell'elica.

Quante eliche sono possibili? Se si normalizza alla lunghezza d'onda, è possibile rappresentare su un piano l'insieme delle possibili eliche:

di solito invece di a/λ si usa C/λ, ossia la circonferenza $C = 2\pi a$, dal momento che, considerando un punto di questo piano e congiungendolo con il centro, il segmento rappresenta la spira dell'elica, su un cilindro, sviluppata su un piano: ha un maggior significato geometrico. Si può dunque dire che la lunghezza di una singola spira, data questa interpretazione, sarà:

$$L_{\text{spira}} = \sqrt{(2\pi a)^2 + h^2}$$

Ciò che interessa a noi è determinare queste dimensioni, rapportate a λ, come in quasi ogni antenna. Si può dunque individuare il cerchio di raggio unitario:

Si noti che le eliche possono degenerare o in spire ($h = 0$), o in linee ($C = 0$). Le antenne più interessanti sotto il punto di vista dell'irradiazione sono:

- le antenne piccole, ossia quelle nell'intorno dell'origine: queste sono dette "antenne in modo normale", o "in modo 0";
- le antenne per cui $L/\lambda \sim 1$, con un angolo di inclinazione (pitch angle) circa di $10° \div 30°$.

Si può dimostrare che un'elica si comporta sostanzialmente come una linea di trasmissione, o meglio come una guida d'onda dielettrica, che ha una propagazione di tipo "onda lenta": il modello più semplice è il seguente

Dato l'asse del cilindro, l'approssimazione che si fa per analizzare l'elica è supporre che le correnti sulla superficie del cilindro possano essere dirette solo in una certa direzione, che è la direzione inclinata di ψ: le correnti possono solo scorrere tutte nel verso del filo, parallelamente a esso. Da questa condizione al contorno, applicata alla superficie di separazione tra la regione interna e la regione esterna, si ricava l'equazione di dispersione, che sarebbe necessaria per determinare le costanti di propagazione longitudinali; si trova, come nel caso della guida dielettrica, che $k_z > k_0$, dunque si ha un'onda lenta:

$$v_{\mathrm{f}} < \frac{\omega}{k_0}$$

3.2.1 Caratteristiche dell'antenna a elica

Analizziamo a questo punto le caratteristiche dei due tipi di antenne a elica.

Modo normale (perpendicolare all'asse)

"Normale" sta per "perpendicolare all'asse", e, come già detto, è il modo che coincide sostanzialmente, nel grafico di prima, alla parte vicino all'origine: antenne piccole. Il tipo di irradiazione è trasversale: il comportamento è come quello di un dipolo, dove però esso è molto più corto di uno tradizionale; grazie infatti al fatto che queste onde sono lente, la lunghezza d'onda a parità di frequenza sarà più corta, dunque il $\lambda/4$ di risonanza in questa struttura sarà minore del $\lambda/4$ del vuoto, quindi la lunghezza della struttura sarà inferiore a quella del dipolo. Il tipo di polarizzazione può essere verticale o orizzontale, ma in generale ellittica, dal momento che un'antenna a elica va considerata come una successione di varie spire; la singola spira può essere vista, essendo molto piccola, come l'insieme di una spira orizzontale e di un segmento verticale, con lo stesso passo h e lo stesso diametro $2a$. Una spira orizzontale corrisponde a un dipolo magnetico, il segmento verticale in un dipolo elettrico: in sostanza si hanno un dipolo elettrico e uno magnetico coincidenti, con lo stesso asse e la stessa corrente; tra i due dipoli c'è una fase di 90°, il dipolo magnetico irradia un campo orizzontale, quello elettrico un campo verticale con la fase in quadratura, di ampiezze diverse: la polarizzazione per questo sarà tendenzialmente ellittica. Per particolari condizioni al condizione può essere circolare:

- se $\pi D = \sqrt{2h\lambda}$, la polarizzazione è circolare;
- se $\pi D \ll \sqrt{2h\lambda}$, la polarizzazione è verticale (è come avere un dipolo elettrico).

Può capitare dunque di avere delle spire abbastanza orizzontali (poco curvate rispetto al cilindro), cosa che capita spesso: se il passo è per esempio di 1 mm e diametro di 1 mm, si avrà un "triangolo" con angolo di inclinazione di 10 o 20 gradi.

Modo assiale

L'antenna nel modo assiale funziona in modo diverso: in questo caso le caratteristiche geometriche fanno sì che la spira sia circa una lunghezza d'onda, il diametro circa $\lambda/3$ $(/\pi)$. Per avere l'angolo che si vuole ($\psi \sim 10°$), anche il passo deve essere circa un terzo della circonferenza, dunque l'elica più standard ha diametro e passo circa pari a $\lambda/3$ (regola generale empirica). Con queste condizioni si riescono a ottenere antenne con irradiazione assiale (dunque di tipo "endfire") e polarizzazione circolare; la banda è circa del 50%.

In questo modo l'irradiazione è assiale dal momento che, a causa del particolare angolo scelto, la fase delle correnti lungo la struttura elicoidale è tale da avere contributi delle correnti che si sommano in fase nella direzione assiale; cambiando inclinazione non si avrebbe più questo tipo di comportamento.

Queste antenne sono state introdotte da Kraus e sono abbastanza direttive proprio per gli angoli scelti; come detto, ha polarizzazione circolare. Il difetto principale di queste antenne è l'impedenza di ingresso, dal momento che essa è abbastanza elevata (150Ω circa): non è facile trovare una linea di trasmissione a cui questa antenna possa essere adattata. L'alimentazione è di tipo sbilanciato (l'elica è un conduttore, che si realizza a partire dal conduttore centrale del cavo coassiale, mentre la parte esterna del coassiale viene collegata a un piano di massa). Per adattare questa cosa vi sono vari trucchi, che corrispondono al modificare la prima spira, quella più vicina al metallo, "avvicinandola" al piano di massa, aumentandone la capacità, e la capacità abbassa l'impedenza. Alternativa fu proposta da Kraus, che propose di saldare al primo quarto di spira una striscia metallica, aumentando il diametro equivalente della spira e dunque la capacità.

Cosa si può dire riguardo la lunghezza, ossia il numero di spire da mettere: di solito al più sono 20 spire, ma ci sono grafici che permettono di determinare la lunghezza assiale in funzione del guadagno o altri parametri.

3.2.2 Quadrihelix

La quadrihelix è un "arrangement" di antenne a elica, spesso utilizzato per realizzare sistemi di tracking. Si possono mettere, al posto delle eliche, altre antenne moderatamente direttive, per esempio quattro trombe (mettendo le trombe l'alimentazione sarà differente: potrà funzionare per esempio grazie a guide d'onda invece che a coassiali): questo, a seconda dei range di frequenze che si vogliono considerare. Guadagni richiesti, $15 \div 20$ dB.

Come funziona questa antenne? Si hanno quattro radiatori, in disposizione quadrata, A, B, C, D: ciascuno ha una porta di ingresso che viene alimentata in qualche modo (cavo, guida...). I cavi di alimentazione di queste quattro antenne sono portati, a due a due, a due ibridi (accoppiatori a - 3 dB), realizzati mediante accoppiatori T-magic (in guida d'onda).

Gli ibridi all'uscita propongono la somma e la differenza dei due; si ha uno schema di questo tipo:

Si ha una configurazione di questo tipo: il sistema di alimentazione così ottenuto ha sostanzialmente 4 porte di uscite, 3 delle quali vengono effettivamente utilizzate:

1. A + B + C + D (modo Σ, ossia modo "somma");
2. (A+B) - (C+D) (modo ΔE_l);
3. (A+C) - (B+D) (modo ΔA_z).

La quarta porta, che è l'altra differenza, che non ci interessa, dunque di solito si carica su carico adattato: questa è la differenza della somma di due antenne "incrociate", e questo non è particolarmente significativo. Descriviamo a questo punto i diversi modi:

1. Il primo modo, come detto, è il modo somma: esso rappresenta sostanzialmente una schiera 2×2, in cui il massimo di irradiazione si ha nella direzione frontale, quella lungo l'asse, quella uscente dal foglio"; il modo somma ha un diagramma di irradiazione più direttivo di quello del singolo elemento, per questo motivo (come una schiera).

2. ΔE_l: se andiamo a vedere nella direzione assiale, il campo irradiato è, dal momento che i quattro radiatori sono in fase, nullo: sommandone due e sottraendone altri due, sull'asse non si avrà più campo elettrico, poichè si avrà questo tipo di cancellazione: sull'asse si ha uno zero di irradiazione. Se inoltre si prende il piano orizzontale, quello che taglia il quadrato ABCD orizzontalmente, sul piano orizzontale il cammino dalla coppia di radiatori A+B e quella C+D è il medesimo: se anzichè essere sull'asse si considera di essere sul piano orizzontale, da A+B e C+D si riceve il segnale ancora una volta in fase, dunque i contributi si sottraggono e anche sul piano orizzontale il contributo di campo non si annulla. Muovendomi nel piano verticale, invece, il segnale non ha più lo stesso cammino, dal momento che, se mi muovo sul piano verticale, i contributi di A e C non saranno più uguali, e neanche quelli di B e D: non si avrà più lo stesso cammino di fase, dunque i contributi non si cancelleranno. Il diagramma di irradiazione dunque sarà nullo al centro (contributi ancora una volta tutti uguali), ma si avranno due massimi laterali in seguito. Questo comportamento deriva dal fatto che, quando si ha una schiera di due elementi, si ha un fattore di schiera (come visto in precedenza per i riflettori nella Yagi-Uda) che dipende dall'angolo e che presenta un massimo; se si ha una cosa del tipo:

$$I_1 + I_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}kd\sin\vartheta}$$

Se $I_1 = -I_2$ come in questo caso (opposizione di fase!), ho, raccogliendo metà dell'esponente:

$$I_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{kd}{2}\cos\vartheta} 2\mathrm{j}\sin\left(kd\sin\vartheta\right)$$

dove ϑ è nella direzione perpendicolare, il seno è una funzione che ha uno zero in zero, e un massimo quando $kd\sin\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Questo porta ad avere questo diagramma di irradiazione:

Questo diagramma ha dunque come detto uno zero sull'asse e un segnale proporzionale allo scostamento rispetto alla direzione di puntamento; se dunque si ha una sorgente in una certa direzione, quando l'antenna è puntata in quella direzione il segnale è nullo; man mano che l'antenna è sempre più spostata da questa direzione si ha un segnale proporzionale all'errore: da qua ΔE_l (Delta Elevation): si ha un segnale proporzionale all'errore di puntamento in elevazione.

3. L'ultima porta, (A+C) - (B+D), è la differenza delle coppie verticali; il comportamento sarà dunque duale al precedente, e si avrà un segnale proporzionale all'errore di puntamento, in questo caso però nell'azimuth.

In questo modo, si han tre coordinate: direzione assiale, zenith e azimuth. Questo permette, a partire da un solo impulso, di ottenere le tre coordinate: "monopulse". Un radar manda un impulso, tramite la porta "somma": l'eco-radar, dal tempo che ci impiega per tornare, dà l'informazione di distanza (quella della porta somma, ossia l'informazione radiale); dalle altre due porte si hanno le altre informazioni, e da un certo insieme di automatismi si può fare in modo da puntare l'antenna sempre nella posizione giusta, dunque per fare tracking.

3.2.3 Antenna a spirale

Si tratta di un altro tipo di antenna indipendente dalla frequenza: se si prende una spirale, poi un'altra, un'altra, e si mettono a 90°, si ottiene una struttura autocompementare. Possono essere sia piane sia coniche, la polarizzazione è circolare, e sono a banda estremamente larga proprio perch si basano sul principio dell'antenna autocomplementare.

Dal momento che l'antenna non è infinita, si non sarà idealmente autocomplementare.

Una spirale avrà dimensioni: un diametro massimo e un diametro minimo; queste daranno la frequenza rispettivamente minima e massima di lavoro (all'incirca). Vi sono diversi tipi di spirale (di Archimede, logaritmica..). Se la spirale è piana, si ha una simmetria nelle due direzioni: quella "uscente dal foglio" e quella "entrante": in questo caso l'irradiazione è in entrambe le direzioni: bidirezionale. Quello che normalmente si fa è mettere, dietro la spirale, una cavità risonante di forma conica, in modo da allargare la banda:

Si ha un coassiale di alimentazione, un simmetrizzatore (essendo l'antenna bilanciata), e la cavità, risonando, riflette il segnale nella direzione "verso destra".

Capitolo 4

Complementi

4.1 Metodo dei Momenti

Il metodo dei momenti è un metodo che permette di risolvere problemi di tipo lineare, ossia equazioni differenziali. Si consideri di avere un generico problema del tipo:

$$\mathcal{L}f = g$$

Dove $\mathcal{L}$ è un operatore lineare, che viene applicato a una funzione f non nota, mentre g è un termine noto per la funzione. Si consideri per esempio:

$$\nabla \times \nabla \times \underline{E} - k^2 \underline{E} = \Box \underline{J}$$

$\nabla \times \nabla \times$ sarebbe l'operatore $\mathcal{L}$, $\underline{E}$ è la funzione non nota, $\underline{J}$ la funzione nota. Un metodo per risolvere questo tipo di problemi è basato sull'uso della trasformata di Fourier, ma non è l'unico: ciò che si può fare è determinare metodi che possano ricondurre questo tipo di problemi ad altri problemi, magari riutilizzabili mediante metodi numerici.

Il metodo dei momenti è basato sulla rappresentazione della funzione incognita f, ossia del risultato che vorremmo ottenere dal problema, mediante una certa base di funzioni note:

$$f = \sum_{n=1}^{N} a_n f_n$$

dove f_n è una base di funzioni note e scelte ad-hoc, in modo da avere particolari proprietà, come la rappresentazione di particolari comportamenti di f, oppure in modo da avere bisogno di poche funzioni per avere una rappresentazione ben approssimata. Sostituendo f_n nell'equazione precedente, sfruttando la linearità dell'operatore, si ha:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \mathcal{L} f_n = g$$

Le incognite di questo problema a questo punto sono i coefficienti di peso a_n.

Per procedere nel metodo, si introduce a questo punto un altro set di funzioni, detto "set di funzioni peso", w_m (il w sta per l'appunto per "weight"); nel caso in cui w_m e f_n siano funzioni analoghe, il metodo dei momenti è in realtà detto "metodo di Galerkin". A questo punto, si va a proiettare su ciascuna delle funzioni peso questa equazione, mediante la definizione di prodotto scalare:

$$< w_m | \sum a_n \mathcal{L} f_n >=< w_m | g >$$

Ciò si può scambiare come:

$$\sum a_n < w_m | \mathcal{L} f_n >=< w_m | g >$$

Questo si fa per $m = 1 \div M$, dunque si hanno M equazioni per le quali a_n non è noto. Se si fa coincidere M con N, si possono ottenere tante equazioni quante bastano per avere tutti gli a_n conoscibili, mediante la soluzione di un sistema lineare. Questo è il metodo dei momenti (MoM: Method of Moments).

Questo tipo di metodo potrebbe essere applicato per la soluzione di problemi elettromagnetici: un esempio di equazione che potrebbe essere risolta con questo tipo di metodo è la EFIE:

$$\hat{\mathrm{n}} \times \mathrm{j}\omega\mu \int \underline{\underline{G}} \cdot \underline{J} \mathrm{d}S = \hat{\mathrm{n}} \times \underline{E}_{\mathrm{irradiata}}$$

In questo caso la cosa incognita è la $\underline{J}$: determinando un certo set di funzioni di base ben approssimante $\underline{J}$, è possibile applicare il metodo dei momenti come visto e dunque risolvere il problema integrale, difficilmente risolubile in forma chiusa. In pratica, si fa il "meshing", ossia si divide il comportamento della corrente mediante triangolini, dunque mediante funzioni lineari, facili, dunque in questo modo si ha una funzione di base per la rappresentazione delle funzioni corrente.

La prima applicazione del metodo dei momenti riguardò lo studio di antenne a filo, per risolvere l'equazione di Pocklington: essa deriva all'EFIE, applicata su di un filo. Se ci si limita a una struttura filare, sapendo che $\underline{\underline{G}}$ contiene le derivate, tipo:

$$\underline{\underline{G}} = \left[\underline{\underline{\mathcal{I}}} + \frac{\nabla\nabla}{k_0^2} \right] \phi$$

Sulla direzione trasversale si ha solo la corrente, non variazione, dal momento che si trasforma un problema tridimensionale in uno monodimensionale; la derivata invece che essere un ∇ diventa una derivata rispetto a z, dunque si trova l'equazione di Pocklington, e su questa si applica il MoM. Il termine noto è il generatore di tensione, che, se concentrato, è una δ di Dirac su una certa sezione. Per analizzare questa struttura come accennato si possono usare funzioni di tipo triangolare, cosa molto utile, dal momento che permette sostanzialmente di segmentare ciascun filo come una somma di diversi fili molto corti, approssimabili come dipoli corti, la cui distribuzione di corrente è triangolare; si avrà dunque a che fare con tanti triangolini, quindi si approssimerà la distribuzione di corrente su questi, la si calcola, e a partire da questa si può calcolare il campo.

I

Capitolo 5

Antenne a schiera

Si vuole a questo punto introdurre la teoria delle antenne a schiera. Per schiera si intende un insieme di radiatori disposti in modo opportuno nello spazio. In realtà, per schiera si intende una disposizione arbitraria di radiatori di tipo arbitrario nello spazio, alimentati con lo stesso segnale. Una tromba, un dipolo e un'elica, assieme, potrebbero per esempio essere una spira. Il caso più comune in realtà è quello di radiatori uguali, ed egualmente orientati nello spazio.

Al fine di determinare le proprietà di questa struttura, fondamentale è l'ipotesi di linearità delle equazioni di Maxwell:

$$\underline{E}_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^{N} \underline{E}_i$$

Nel caso orientamenti e tipo di elementi siano arbitrari, ci possiamo solo fermare qua; quello che si può fare a questo punto è considerare, di questi casi, solo alcuni: quello in cui gli elementi sono tutti uguali alimentati in una certa maniera: per esempio tante eliche, tutte orientate nello stesso modo. In questo caso succede che il campo generato dai singoli radiatori, dalla teoria, è:

$$E_{\text{totale}} = \sum I_n \underline{h}_n \frac{\mathrm{e}^{-ujkr_n}}{r_n}$$

r in realtà è un r_n poichè il punto potenziato P è unico, ma i punti dai quali parte il campo sono diversi. Se i radiatori sono uguali ed egualmente orientati, si possono portare fuori dalla sommatoria le caratteristiche comuni a tutti i radiatori, ottenendo:

$$E_{\text{totale}} = h_n \sum I_n \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr_n}}{r_n}$$

A questo punto una seconda ipotesi, semplificativa: invece di essere in una situazione qualunque, si ipotizzi di essere in campo lontano: data una cosa del genere:

indicando ciascun radiatore come un puntino, dunque puntiforme, si ha ciò. Usando la teoria, ricordando che D è il massimo diametro all'interno del volume che contiene tutti i radiatori, noi stiamo chiedendo che:

$$R > \frac{2D^2}{\lambda}$$

in questo modo si possono fare delle approssimazioni sull'esponenziale:

$$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kr_n}}{r_n} \sim \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\underline{r}'_i\cdot\hat{R}}$$

dunque, si può dire che:

$$E_{\text{totale}} \sim h_{\text{efficace}}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kR}}{R}I_0\sum_{i=1}^{N}\frac{I_i}{I_0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\underline{r}'_i\cdot\hat{R}}$$

dove I_i è il valore della corrente per ogni i-esimo elemento della schiera, I_0 una certa corrente di normalizzazione. Questo è il cosiddetto "teorema fondamentale delle schiere": il campo totale è il prodotto di un singolo termine, per una sommatoria. Tolta la sommatorie, quello che rimane è il campo irradiato da uno dei singoli radiatori. Il secondo fattore invece è un termine che contiene le posizioni delle sorgenti dei vari elementi della schiera, $\underline{r}'_i$, i coefficienti di alimentazione I_i, ed è chiamato "fattore di schiera". Quello che si può dire dunque del campo irradiato da una schiera è che esso coincide con il campo irradiato da un singolo elemento, per il fattore di schiera. Per ora non abbiamo fatto ipotesi sulla disposizione degli elementi nello spazio. Questo ci dice che, indipendentemente dagli elementi, è possibile determinare, a partire dal solo studio della geometria della disposizione degli elementi il fattore di schiera, considerando ciascun radiatore isotropico, dunque solo alla fine moltiplicare questo fattore di schiera così calcolato per le caratteristiche dell'antenna.

Generalmente, questo tipo di sistema si usa per rendere direttivo un sistema: a partire da antenne poco direttive come i dipoli, mettendo diversi dipoli disposti in un certo modo, si riesce ad aumentare la direttività.

5.1 Schiere lineari

Introduciamo un'altra semplificazione: invece di mettere le antenne disposte arbitrariamente nello spazio, si parta dal disporle su una retta: schiera lineare. Inoltre, si dispongono tutte periodicamente, a una distanza d. Si numerano gli elementi da 0 a $N-1$; si può a questo punto calcolare il campo irradiato da una struttura di questo genere: esso sarà senza dubbio simmetrico, essendo i radiatori disposti sull'asse, ottenendo dunque una simmetria assiale.

Quant'è il campo irradiato da una struttura di questo genere? Considerando l'origine del sistema di riferimento nel primo radiatore, asse z, si avrà:

$$\underline{E} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\underline{r}'_n \cdot \hat{R}}$$

dove a_n è il coefficiente di alimentazione, e $\underline{r}'_n$ è, semplicemente:

$$\underline{r}'_n = nd\hat{z}$$

Questo significa che, quando si determina $\hat{\mathrm{z}} \cdot \hat{R}$, si ha:

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}knd\cos\vartheta}$$

In generale, i coefficienti di alimentazione a_n sono numeri complessi, ossia composti da un modulo e da una fase:

$$a_n = |a_n|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle a_n}$$

per semplicità indico $\varphi_n \triangleq \angle a_n$. Se $\varphi_n = 0$ si ha un caso semplice, ma in realtà il caso che considereremo, altrettanto semplice, è quello per cui φ_n è un valore che cresce progressivamente con n:

$$\varphi_n = n\Phi$$

dove Φ è un incremento di fase fisso. Questo significa che φ_n è un multiplo di Φ.

Questo caso particolare è interessante come risultato, e poi si usa abbastanza comunemente in pratica. Se il numero complesso a_n consta di un modulo e di una fase progressiva come quella appena descritta, il fattore di schiera A diventa:

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(kd\cos\vartheta+\Phi)}$$

si può raccogliere la parentesi in un ψ, ottenendo:

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| \, e^{jn\psi}$$

Questo ψ dipende solo dalla geometria e dalla fase dell'alimentazione; ψ è dunque una variabile angolare normalizzata. Per questo caso (schiera lineare), dunque, il fattore di schiera sarà quest'ultima equazione. Definendo:

$$Z \triangleq e^{j\psi}$$

si può formulare in modo più interessante e semplice il fattore di schiera, come:

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| \, Z^n$$

ossia, in questo caso si ha a che fare con un polinomio, dunque si ha la "formulazione polinomiale del fattore di schiera". Questo permette di usare, per il fattore di schiera, tutte le proprietà dei polinomi.

Un discorso interessante, per questo polinomio, è il suo campo di esistenza: noi siamo sul campo complesso, sul piano complesso, ma che parte ci interessa di questo? Noi stiamo considerando uno spazio reale per l'irradiazione, di conseguenza il nostro angolo ϑ varia solo da 0 a 180°: l'asse polare nel nostro sistema di riferimento è limitato a ciò. La variabile normalizzata ψ, dunque, è compresa tra $-kd + \Phi$ e $kd + \Phi$: il campo di variabilità sarà compreso tra questi valori. La variabile Z in realtà non è tutto il piano complesso, ma una zona molto limitata: l'esponente di Z è puramente immaginario, dunque nel piano complesso Z ciò che servirà a noi sarà solamente il cerchio di raggio unitario. Per valori reali degli angoli di interesse, noi ci sposteremo solo sul cerchio di raggio unitario, e neanche su tutto (magari solo su una certa porzione angolare di questo). Un valore importante è $kd = \pi$: se si ha ciò, capita che, per qualsiasi valore di Φ, il campo di variabilità è $\pm\pi$ attorno a psi: l'intero cerchio. Se $kd > \pi$, si copre il cerchio interamente una volta, e ancora un pezzo.

Ciò che emerge da queste osservazioni è che non c'è una corrispondenza biunivoca tra gli angoli ϑ e Z: potrebbe esservi corrispondenza, potrebbero esservi diversi valori possibili, potrebbe non esservene nessuno. L'unico valore per cui si ha una corrispondenza biunivoca è $kd = \pi$, ossia quando la spaziatura è $d = \lambda/2$: in questo caso le cose vanno bene, altrimenti si possono avere problemi.

In questo momento si sta esclusivamente discutendo del fattore di schiera $A(\psi)$, dal momento che combinandolo (mediante il prodotto) con il guadagno del radiatore, si ottiene il diagramma di irradiazione complessivo per la schiera. Si è capito, da queste osservazioni, che $A(\psi)$ è periodica di 2π, dunque il fattore di schiera si ripeterà per i vari intervalli, da $-\infty$ a $+\infty$.

Se $kd = \pi$, si vedrà un solo periodo di A; si parla di "visibile" come della porzione di funzione mostrata: centrando su Φ, considerando l'intervallo $\Phi - kd < \psi < \Phi + kd$, questa è la porzione "visibile", ossia quello che si prenderà del fattore di schiera al momento di moltiplicare per il guadagno di ciascun singolo radiatore. La situazione migliore, come detto, è quella per cui:

$$kd = \pi \Longrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d = \pi \Longrightarrow d = \frac{\lambda}{2}$$

Se $d > \frac{\lambda}{2}$, si ha la ripetizione parziale o totale del fattore di schiera nel diagramma di irradiazione. d è la distanza tra due elementi, dunque, se si aumenta la distanza tra gli elementi, aumenta il numero dei "lobi principali":

Aumentando la distanza, l'antenna presenta diversi lobi, in direzioni non controllabili, che non si possono stabilire: ciò non ha particolari applicazioni, e inoltre, dal momento che si convoglia energia in essi, il guadagno viene ridotto. Si parla di "lobi di reticolo" o "grating lobes", e, quando si progetta un'antenna a schiera, si deve assolutamente fare in modo da non averne.

La soluzione sembrerebbe, a questo punto, quella di avere elementi poco distanti tra loro: $d < \lambda/2$; questa tuttavia è una cattiva soluzione: nonostante sia un'idea un poco controintuitiva, ciò che determina il guadagno di una schiera di radiatori non è tanto il numero di radiatori che la compongono, quando la lunghezza della schiera stessa: più essa è lunga, più essa guadagna. Il problema è che, come appena detto, d non può essere molto elevato, se non si vogliono produrre grating lobes.

5.1.1 Schiere lineari equispaziate uniformi

Si stanno considerando schiere lineari equispaziate; una volta introdotta questa ipotesi, ciò che discrimina le varie schiere di antenne è l'insieme dei coefficienti di alimentazione, a_n.

La cosa più facile che può venire in mente è quella di avere una schiera uniforme, ossia per cui le alimentazioni sono tutte uguali: $a_n = 1 \forall n$. Questo significa ottenere un fattore di schiera semplicemente pari a:

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\psi} = \sum_{n=0}^{N-1} z^n$$

(da qui in poi al posto di Z si considererà per comodità z).

Osservando questa espressione, si può vedere che essa è una somma geometrica, la cui espressione è scrivibile in forma chiusa:

$$A = \frac{z^N - 1}{z - 1}$$

Siamo interessati a questo punto alla determinazione degli zeri di questa espressione: dal momento che il diagramma di irradiazione è dato dal prodotto di questa espressione e di un'altra, sapere dove sono gli zeri dell'espressione suggerirà la posizione di parte degli zeri del diagramma di irradiazione finale. In questo caso, si ha qualcosa del genere:

Si hanno $N - 1$ zeri: $z = 1$ è infatti una discontinuità eliminabile della funzione, dunque si ha la cancellazione polo-zero. Dal momento che z avrà sempre modulo unitario, si può scrivere come $\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\psi}$; questo implica poter scrivere l'espressione del modulo di A come:

$$|A(\psi)| = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}N\psi} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} - 1}$$

Si utilizza a questo punto un trucco: si raccoglie a numeratore e a denominatore $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\psi}{2}}$ (al numeratore anche con N:

$$= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{N\psi}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{N\psi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\psi}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\psi}{2}}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{N\psi}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\psi}{2}}}$$

Il secondo termine, il rapporto dei due esponenziali, non è modulo, dunque si può eliminare; come si può vedere, mediante la formula di Eulero:

$$|A(\psi)| = \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

Si introduce solo una normalizzazione: per $\psi \to 0$, si vuole che $A(\psi)$ abbia modulo unitario; ciò si ha se si premoltiplica per $1/N$; infatti:

$$\lim_{\psi \to 0} |A(\psi)| = N$$

dunque

$$|A(\psi)| = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(N\frac{\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

Consideriamo ora questa espressione per un caso particolare: se $N = 1$, tutto va a 1, ma in effetti è un caso scontato e non interessante: è una schiera composta da un singolo elemento, dunque un'antenna. Più interessante il caso per $N = 2$: ripartendo dal polinomio di partenza, se $N = 2$, si ottiene:

$$A(\psi) = z + 1$$

sviluppandolo:

$$\left| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\psi}{2}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\psi}{2}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\psi}{2}} \right] \right| = \left| \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \right|$$

In entrambi i casi, come si vede, la funzione è periodica e di periodo 2π; sono inoltre entrambi pari: nel secondo caso è evidente, nel primo quasi, dal momento che si ha il rapporto di due funzioni dispari. Aumentando N, ossia il numero di radiatori, aumenta il numero degli zeri presenti nel diagramma di irradiazione (nel fattore di schiera); si ha qualcosa del gneere:

Man mano che si aumenta N, il fattore di schiera si stringe, e il diagramma di irradiazione insieme a esso. Si ha tuttavia una cosa negativa: per $N \to \infty$, il primo lobo secondario ha comunque un valore importante; come si può vedere, sostituendo all'argomento del seno al numeratore una x:

$$\frac{N\psi}{2} \longrightarrow x$$

si ha

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \frac{\sin x}{\sin \frac{x}{N}}$$

N continua a crescere, dunque l'argomento al denominatore diventa infinitesimo ($x/N \to 0$), dunque è possibile approssimare il seno al denominatore con il suo argomento:

$$\sim \frac{1}{N} \frac{\sin x}{\frac{x}{N}} = \frac{\sin x}{x}$$

Questo è sostanzialmente il comportamento che aveva un'apertura rettangolare, e, come noto, sotto i 13 dB rispetto al lobo principale i lobi secondari non potevano andare: non è possibile avere lobi secondari estremamente bassi con schiere uniformi.

Il fattore di schiera è formato da modulo e fase; se tutti i coefficienti a_n sono intrinsicamente positivi (cosa valida per la schiera uniforme) il massimo dell'irradiazione si avrà quando tutti i coefficienti saranno pesati con $\psi = 0$, perchè se si han tutti i coefficienti positivi, il massimo si avrà quando tutti saranno sommati in modulo, dunque quando non c'è sfasamento tra loro; se $\psi = 0$ si verifica proprio questa cosa: z deve essere unitario, dunque la fase nulla.

Dato dunque $\psi = 0$, vogliamo identificare il massimo della funzione, ossia l'angolo ϑ per il quale si ha la massima irradiazione; questa sarà la direzione del lobo principale del fattore di schiera. Detto questo angolo $\vartheta_{\max}$, per $\psi = 0$, si ha, ricordando che $\psi = kd \cos \vartheta + \Phi$:

$$\vartheta_{\max} = \arccos \left(-\frac{\Phi}{kd} \right)$$

A questo punto, si ha un'espressione del $\vartheta_{\max}$ funzione dell'angolo Φ di sfasamento progressivo. Se $\Phi = 0$, si ha $\vartheta_{\max} = 90°$, considerando l'angolo rispetto all'asse, e $\vartheta'_{\max} = 0°$, considerando l'angolo rispetto alla normale all'asse; questa schiera ha dunque irradiazione trasversale rispetto all'asse, ed è detta *broadside*: irradia lateralmente.

Se si introduce uno sfasamento Φ tra i vari elementi, il massimo non è più nella direzione normale: se Φ è positivo si ha l'arcocoseno di un numero negativo, dunque l'angolo di massimo si sposta verso sinistra (avendo l'angolo più di 90°); se viceversa Φ è negativo, il lobo (o, meglio, i lobi: entrambi!) si sposta verso destra. Questo ci suggerisce a questo punto uno dei casi più interessanti: se $\Phi = -kd$, si ha che $\arccos(1) = 0$: si ha irradiazione nella direzione dell'asse, ottenendo una schiera *endfire*, ossia una schiera che irradia nella direzione crescente dell'asse. Dualmente, se $\Phi = kd$, si ha una schiera *backfire*, ossia una schiera che irradia nella direzione opposta della endfire.

Introducendo questi sfasamenti Φ, è possibile effettuare la scansione del fascio: ciò come si vedrà in seguito si farà introducendo uno sfasamento tra gli elementi. Questa è una delle caratteristiche più interessanti delle schiere: una schiera, rispetto a un'antenna a riflettore, è assolutamente sconsigliata, se non sono richieste cose particolari come la scansione del fascio, dal momento che la parabola ha una direttività maggiore, a meno che non si metta un numero veramente elevato di elementi (volendo per esempio avere 1000 lunghezze d'onda e avere un elemento ogni λ, servono 1000 elementi); oltre a doverli realizzare, questi elementi bisogna alimentarli, introducendo una rete di partizione della potenza; questa rete introdurrà perdite o comunque non idealità, dunque per questi motivi, se non si hanno particolari richieste, le schiere sono sconsigliabili.

La schiera sicuramente vince quando si deve richiedere la possibilità di scansione del fascio: se si deve avere un fascio con il riflettore parabolico, è necessario ruotarlo con dei motori, cosa estremamente scomoda da fare. Per quanto riguarda altri tipi di performance, inoltre, la schiera può essere utilizzata per modificare il singolo lobo secondario: si può controllare con grande precisione i singoli lobi secondari. Volendo per esempio ottenere un diagramma di irradiazione di questo tipo:

Nelle antenne a riflettore abbiamo visto che, modificando il tapering, si riesce bene o male a ottenere qualche vantaggio; ottenere invece un controllo preciso per i singoli lobi secondari, è impossibile con antenne a riflettore. Con le sfere, è possibile costruire i coefficienti di alimentazione in modo tale da ottenere i vari lobi secondari con diversi livelli.

Si ricordi che per ora si sta solo parlando di fattore di schiera, non di diagramma di irradiazione complessivo ancora: abbiamo ancora un grado di libertà sul radiatore che si inserirà nella schiera. Se si ha a che fare con radiatori abbastanza direttivi, cosa si può fare? Una buona distanza, come detto, è $\lambda/2$ (tra i vari elementi). Avendo elementi direttivi, sembrerebbe che si possono mettere gli elementi più spaziati tra loro, ma il problema dei grating lobes rimane, anche se leggermente modificato. Consideriamo alcuni casi.

1. Si supponga di avere 8 elementi, spaziati $d = \lambda/2$; dato ciò, il fattore di schiera sarà questo:

   questo sarà il fattore di schiera nel primo caso. Questi potrebbero essere 8 dipoli affiancati, dunque il fattore dell'elemento è una costante, e si ottiene il diagramma di irradiazione.

2. Proviamo con 4 elementi spaziati λ: cosa capita adesso? Beh, si ha qualcosa di peggio:

   La funzione avrà meno zeri, ma il visibile sarà maggiore, dunque nell'angolo ϑ il fattore di schiera mostrerà dei grating lobes.

3. Due elementi spaziati 2λ: in questo caso il fattore di schiera porta a un diagramma di irradiazione di questo tipo:

   Il fattore di schiera è praticamente sempre alto.

Questo riguarda i fattori di schiera in tre situazioni diverse. Avendo a disposizione elementi molto direttivi, è possibile attenuare ciò che viene introdotto dal fattore di schiera (magari, nei casi 2 e 3, facendo in modo da introdurre gli zeri del diagramma di irradiazione in prossimità degli angoli dei grating lobes). Ciò si può dunque fare, ma, se la specifica sui lobi secondari è severa, usare una schiera uniforme non è comunque la soluzione giusta.

Riassumendo, per quanto riguarda il fattore di schiera della schiera uniforme, si hanno le seguenti caratteristiche:

$$\vartheta_{3\mathrm{dB}} \sim 50^\circ \frac{\lambda}{l}$$

$$G \sim \frac{2L}{\lambda}$$

$$\text{SLL} \sim -13\text{dB}$$

Si noti che queste sono caratteristiche del fattore di schiera, non del diagramma di irradiazione finale; questo dovrà essere ancora combinato con le proprietà del radiatore. L è la lunghezza della schiera.

Ci chiediamo, per concludere, quale sia la spaziatura ottimale per una schiera uniforme. Come si può decidere qual è? Data una schiera a N elementi (dove N è, come già detto, il numero di zeri più 1):

La schiera uniforme con spaziatura ottimale è quella che non fa entrare i grating lobes nel campo del visibile. Come noto, il campo del visibile (intervallo in cui ψ può variare) è:

$$\Phi - kd < \psi < \Phi + kd$$

Partendo da Φ, il massimo segmento kd accettabile è quello per cui non si tocca (nè a sinistra nè a destra) un grating lobe; non si avrà simmetria ovviamente, ma si deve scegliere il caso più vincolante. Come si può determinare kd_{max} ? Beh: la posizione dell'ultimo zero prima del grating lobe, meno Φ. Sapendo che gli zeri sono equispaziati di $\frac{2\pi}{N}$, l'ultimo zero prima del grating lobe, partendo da 0, ha ascissa $-\frac{2\pi(N-1)}{N}$: è il $(N-1)$-esimo zero, ossia l'ultimo accettabile. Questo, meno il modulo di Φ:

$$kd_{\text{max}} = 2\pi \frac{N-1}{N} - |\Phi|$$

Lavoriamo su questa espressione: se si ha una schiera lineare, vuol dire che si ha un angolo di puntamento ϑ_{max} che segue questa equazione:

$$\vartheta_{\text{max}} = \arccos\left(-\frac{\Phi}{kd}\right)$$

invertendo questa equazione:

$$|\Phi| = kd\ abs \cos\vartheta_{\text{max}}$$

questo è il valore del modulo dello sfasamento. Di solito, invece di riferire a ϑ (angolo rispetto alla direzione assiale), lo si fa rispetto a ϑ_{S}, relativo alla direzione normale (chiamato ϑ'_{max} in precedenza). In questo caso:

$$|\Phi| = kd\,|\sin\vartheta_{\text{S}}|$$

sostituiamo a questo punto; $d = d_{\text{max}}$, ovviamente, dunque:

$$kd_{\text{max}} = 2\pi\frac{N-1}{N} - kd_{\text{max}} |\sin\vartheta_{\text{S}}|$$

dunque

$$kd_{\text{max}} = \frac{2\pi\frac{N-1}{N}}{1 + |\sin\vartheta_{\text{S}}|}$$

semplificando, dal momento che $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{2\pi\frac{N-1}{N}}{1 + |\sin\vartheta_{\text{S}}|}$$

quindi

$$\frac{d_{\text{max}}}{\lambda} = \frac{N-1}{N}\frac{1}{1 + |\sin\vartheta_{\text{S}}|}$$

Questa è la distanza ottimale degli elementi, al variare dell'angolo di scansione. Per una schiera broadside, dove $\vartheta_{\text{S}} = 0$, si ha

$$\frac{d_{\text{max,broadside}}}{\lambda} = \frac{N-1}{N}$$

ora: se questa d_{max} aumenta di poco, pazienza: si fa entrare nel visibile un pochino del grating lobe, sperando che sia poco. Se d/λ aumenta molto, è un disastro. Se si hanno tanti radiatori (10, 20), si ha:

$$\frac{N-1}{N} \sim 1$$

dunque $d \sim \lambda$, se si hanno molti radiatori.

Per una schiera di tipo endfire, dunque che irradia longitudinalmente:

$$\frac{d_{\text{max,endfire}}}{\lambda} = \frac{N-1}{2N}$$

questo, dal momento che $\vartheta_{\text{S}} = 90°$, dunque il seno vale 1. In questo caso, la distanza tra gli elementi dovrà essere molto minore: anche minore di $\lambda/2$! Altrimenti, si rischia di avere a che fare con grating lobes. Data per esempio una endfire di 8 elementi:

$$d_{\text{max}} = \lambda\frac{7}{16} \sim 0,437\lambda$$

5.2 Schiere non uniformi

Finora si è parlato di schiere uniformi; in realtà esistono altri tipi di schiere che si possono utilizzare. Come già scritto in precedenza, parlando di schiere si parla sostanzialmente di un insieme discreto di radiatori; nel caso non si vogliano sfruttare le proprietà del "discreto", e si abbia inoltre un numero molto elevato di elementi, è possibile approssimare una schiera con un'apertura: studiare al posto della schiera il suo inviluppo, ossia l'inviluppo della curva interpolante i valori dei coefficienti di alimentazione al variare dello spazio, quindi farne la trasformata di Fourier, in modo da ottenere l'irradiazione dall'apertura equivalente. Se la forma dell'alimentazione è particolare, per esempio come il $\cos^2$ sul piedistallo, si possono ottenere cose particolari anche senza avere un'apertura vera e propria. Questa cosa verrà ridiscussa.

Per ora l'intenzione è quella di trattare le schiere da schiere, dunque sfruttare alcune particolari forme di alimentazione, in modo da ottenere effetti particolari del campo irradiato.

5.2.1 Schiera binomiale

Un desiderio che si potrebbe avere, per quanto riguarda un sistema di irradiazione, è il non avere lobi secondari. Volendo una funzione che non ha lobi secondari, questa potrebbe essere per esempio la schiera uniforme con $N = 2$:

$$1 + z = \cos \frac{\psi}{2}$$

questo, sempre utilizzando la solita formulazione polinomiale. Sicuramente questa funzione non ha lobi secondari, ma d'altra parte è di grado molto basso, dunque non è un caso particolarmente interessante. Non avere lobi secondari coincide con il non avere, nell'intervallo $[0, 1]$, nessuno zero. Un modo per non avere zeri sull'intervallo è prendere questo binomio ed elevarlo alla $N - 1$: in questo modo avrò $N - 1$ zeri, dunque N elementi.

$$\cos \frac{\psi}{2} = (1 + z)^{N-1}$$

Abbiamo di nuovo $N-1$ zeri, ma in questo casi essi sono tutti su $z = -1$: zeri multipli tutti per $\psi = \pi$. In questo caso, $\psi \in [0, \pi]$ come prima, ma tutti gli zeri sono a π, e non in mezzo: non ho lobi secondari! Inoltre, il coseno è notoriamente una funzione minore di 1, dunque, elevando la funzione a potenza, si avrà che, tra 0 e π, i valori di A si riducono, ottenendo dunque una funzione di ordine maggiore e molto taperata! Il polinomio $P(z)$ così definito dunque è:

$$P(z) = (1+z)^{N-1}$$

Come mai non si utilizza sempre questa funzione, per realizzare schiere di antenne? Purtroppo questa antenna non ha solo vantaggi: a parità lunghezza, dunque di numero di elementi, rispetto alla schiera uniforme, il lobo principale risulta essere più largo, dunque il guadagno più basso.

Determinare le ampiezze di queste alimentazioni, la a_n, è piuttosto facile: si ricava mediante il triangolo di Tartaglia!

Sarà abbastanza facile da realizzare, ma non sarà uniforme.

5.2.2 Schiera triangolare

Si consideri a questo punto una schiera uniforme composta da N radiatori; essendo uniforme, $a_n = 1 \forall n$; si avrà dunque un polinomio del tipo:

$$P_{\text{uniforme}}(z) = 1 + z + z^2 + ... + z^{N-1}$$

Se si prende questo polinomio e lo si eleva a quadrato, si ottiene ciò:

$$P(z) = \left[1 + z + ... + z^{N-1}\right]^2$$

Ciò che capita, sempre, è ottenere un polinomio con il doppio dei coefficienti: elevando a $N-1$, si han $2N-1$ coefficienti. Si ottiene sempre una distribuzione di coefficienti del tipo:

$$1\ 2\ 3\ 4\ ...\ N\ ...\ 4\ 3\ 2\ 1$$

ossia, si ha una retta crescente: l'ampiezza delle eccitazioni dei vari elementi ha un inviluppo triangolare. Cosa capita, con questa situazione, al fattore di schiera? Se si conosce il fattore di schiera della schiera uniforme e lo si eleva al quadrato, il fattore di schiera sarà semplicemente il quadrato del precedente: tutta la funzione viene elevata al quadrato, punto per punto.

Si consideri per esempio $N = 8$:

Elevando al quadrato raddoppia il numero degli zeri, e il diagramma tende a stringersi. I lobi secondari saranno elevati al quadrato (raddoppiati in dB). Si paga un prezzo: la riduzione dei lobi secondari è stata ottenuta raddoppiando quasi il numero degli elementi; il fascio si stringe, dal momento che il numero degli elementi è raddoppiato, ma non si stringe in proporzione: passando da una schiera uniforme a N elementi a una a $2N$ elementi, il fascio si dimezza; in questo caso, passando dunque da una schiera uniforme a una triangolare, il fascio non si dimezza, dal momento che l'angolo a 3 dB non è più $50\lambda/L$, ma $73\lambda/L$; in compenso, i lobi secondari sono molto più bassi, dunque a seconda di cosa si vuole ottenere (radiatore più direttivo o meno lobi secondari) si sceglierà una o l'altra soluzione. Si ha che, ricordando che:

$$\psi = kd\cos\vartheta + \Phi$$

essendo la schiera triangolare una schiera lineare uniforme al quadrato, ricordando che per una schiera uniforme si ha:

$$A(\psi) = \frac{\sin\left(\frac{N\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

la schiera triangolare sarà questa al quadrato. Sapendo come varia ϑ si può fare una tabella con i valori di ϑ, ψ, $A(\psi)$:

$$G \sim \frac{1,5L}{\lambda}$$

5.2.3 Distribuzioni simmetriche

Le schiere sono sostanzialmente modellabili mediante polinomi di variabile complessa: la variabile indipendente con cui si ha a che fare è $z \in \mathbb{C}$. I fattori di schiera, dunque, saranno numero complessi. L'obiettivo di questa sottosezione è cercare di ottenere fattori di schiera reali, non più complessi. Per fare ciò è necessario utilizzare idee note dalla teoria dei segnali, sfruttando schiere con particolari proprietà. Sia che si parli di schiere binomiali, sia che si parli di schiere triangolari, quello che si dovrebbe fare per lavorare è prendere dei numeri complessi ed elevarli al quadrato, operazione non semplice (a meno che non si disponga di calcolatori).

Cercheremo ora modi di avere fattori di schiera reali, pagando un piccolo prezzo, ossia introducendo una condizione aggiuntiva che permette di farlo. La condizione è la richiesta di una distribuzione di ampiezza dei vari elementi di alimentazione della schiera simmetrica: gli elementi equidistanti dall'elemento centrale (nel caso ci sia) devono essere uguali tra loro. Se la distribuzione è simmetrica, anzichè considerare come origine l'elemento più a sinistra, si considera quello centrale (che può anche non esserci, se N è pari; in questo caso non ci sono comunque problemi).

Per N dispari, si avrà a_0 (elemento centrale) con una certa eccitazione, a_1 a sinistra e a destra di a_0 con una certa eccitazione, e così via. Considerando le eccitazioni due alla volta (a parte la centrale), per a_1 si ha, per esempio:

$$a_1 e^{j\psi} + a_1 e^{-j\psi}$$

per la formula di Eulero, sommandoli (cosa che di fatto si finisce a fare, calcolando il coefficiente di schiera), si ottiene:

$$a_1 \cos\psi$$

l'elemento centrale è da solo ma, essendo a distanza nulla dall'elemento centrale stesso, non c'è fattore di fase. Dunque:

$$A(\psi) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{N/2-1} a_n \cos\left(2n\frac{\psi}{2}\right)$$

Nel caso di N pari, capita qualcosa di analogo, solo che, come detto, si trova che l'origine del sistema non è in corrispondenza di nessun elemento irradiante. Si avrà:

$$A(\psi) = 2\sum_{n=1}^{N/2} a_n \cos\left((2n-1)\frac{\psi}{2}\right)$$

anche in questo caso è tutto reale.

Si consideri a questo punto un piccolo esempio: data una schiera simmetrica di 4 elementi, quanti gradi di libertà si hanno per il progetto? Uno solo:

Il fatto di avere simmetria implica che i due coefficienti di sinistra siano uguali ai due simmetrici a destra; facendo poi i conti, si fissano per esempio i centrali a 1, e gli altri due avranno un certo valore t; nel caso poi $t = 1$ si ha la schiera uniforme; se t diminuisce quello che sostanzialmente si fa è aumentare il tapering (per questo t). Per $t = 1/3$, si ha una schiera binomiale. Il comportamento è di questo tipo:

Il comportamento dei lobi secondari rispetto al tapering è di questo tipo: si hanno

$$T = -20\log_{10} t$$

dunque, più aumenta T, più aumenta il tapering: per $T = 8$ dB si ha la condizione di lobi secondari bassissimi, propria della schiera binomiale. Se il taper è superiore a 10 dB, gli zeri addirittura non sono più nel cerchio di raggio unitario: non si hanno zeri, dunque il diagramma di irradiazione è piuttosto brutto.

Se $T < 0$ si ha il tapering inverso: i livelli centrali sono inferiori di quelli laterali. Questa cosa non si è mai vista dal momento che parlare di alimentazione per un elemento della schiera è come parlare di illuminazione per un certo punto di un'apertura; per una schiera tuttavia la "illuminazione" la scegliamo noi, dunque si può fare anche ciò. Ovviamente, il tapering inverso non è particolarmente interessante dal momento che i lobi secondari sono molto più elevati.

5.2.4 Schiera alla Chebyshev

Si ha sempre un problema: si vorrebbero avere lobi secondari bassi, ma anche un guadagno elevato, cose contrastanti. Non solo: nei radiatori (o schiere) finora studiati, di solito il comportamento dei lobi secondari è quello che si è sempre avuto: il primo elevato, il secondo un po' meno, il terzo meno ancora e così via. Sarebbe interessante fare in modo che tutti i lobi secondari abbiano una certa ampiezza, sempre uguale, e che questa ampiezza sia progettabile: in questo modo si potrebbe concentrare molta energia nel lobo principale, aumentando il guadagno.

Ciò che riesce a fare ciò è la schiera alla Chebyshev, o, meglio, alla Dolph-Chebyshev: schiere con diagramma di irradiazione legato ai polinomi di Chebyshev.

La definizione dei polinomi di Chebyshev è:

$$T_m(x) = \cos\left[n\left(\arccos(x)\right)\right], \quad |x| < 1$$

$$T_m(x) = \cosh\left[n\left(\mathrm{settcosh}(x)\right)\right], \quad |x| < 1$$

Questi polinomi di Chebyshev presentano delle caratteristiche piuttosto interessanti:

per $x = 1$ $T_m(1)$ è sempre uguale a 1, per qualsiasi valore di m; per $x = -1$, l'uscita può valere ± 1, a seconda del fatto che il polinomio sia di grado pari o dispari. Questi polinomi presentano inoltre m zeri, dove m è l'ordine del polinomio, tutti in $x \in [-1, 1]$, e in questo intervallo oscillano per l'appunto tra ± 1.

Fino a qua, tutta matematica; Dolph pensò di utilizzare questa funzione come idea di partenza per la realizzazione di diagrammi di irradiazione con un comportamento di questo genere: se si riuscisse a trovare una trasformazione di coordinate tale per cui la funzione diventi così:

si potrebbe fare in modo da avere tutti i lobi secondari allo stesso livello, ottenendo una distribuzione di potenza ai lobi secondari dunque costante, e tendenzialmente minima.

Il primo passo da fare è "finestrare" la $T_m(x)$: è necessario cercare un certo valore x_0 tale per cui l'intervallo $[-x_0; x_0]$ venga trasformato in $[-\pi; \pi]$, per cui il massimo sia un certo r a nostra scelta: la trasformazione infatti deve mappare la variabile x che è stata usata nei polinomi di Chebyshev in ψ, dove ricordiamo che:

$$\psi = kd\cos\vartheta + \Phi$$

A $x = x_0$, si avrà che:

$$T_m(x_0) = r$$

dunque, si otterrà ciò:

Il massimo è 1, dunque i lobi saranno $1/r$, dal momento che r diventa il rapporto tra il valore massimo della funzione nell'intervallo considerato e il valore dei singoli massimi secondari. La trasformazione che si può introdurre è una tale per cui si faccia corrispondere a $x = x_0$ il $\psi = 0$, e a $x = 0$ il $\psi = \pi$; si può vedere che questa trasformazione è:

$$\frac{\psi}{2} = \arccos\left(\frac{x}{x_0}\right)$$

In questo modo si "prende la parte alta" della funzione di Chebyshev e la si mette in mezzo, dunque si ottiene ciò. Si vede che, per $x = x_0$, il arccos(1) vale 0, e ciò è in effetti rispettato con questa trasformazione. Per $\psi = \pi/2$, $\frac{x}{x_0}$ vale 0: questa verifica ci permette di essere sicuri del fatto che si trasforma il polinomio di Chebyshev in una funzione che sia utilizzabile come un fattore di schiera (funzione di ψ e che rispetta il vincolo di essere nell'intervallo $\pm\pi$). Invertendola:

$$x = x_0\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

Se si va a sostituire nella $T_m(x)$ questa, si ottiene:

$$\cos\left[m\arccos\left((x_0\cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\right)\right]$$

questa espressione è complicata, dunque si vuole evitare di usarla; invece di usare in questa maniera questa trasformazione, si cerca di mantenere l'espressione polinomiale.

Passiamo dunque per un'altra strada: nella precedente sottosezione abbiamo trovato il seguente risultato:

$$A(\psi) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{N/2-1} a_n\cos\left(2n\frac{\psi}{2}\right), \quad N \text{ dispari}$$

$$A(\psi) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} a_n \cos\left((2n-1)\frac{\psi}{2} \right), \quad N \text{ pari}$$

Proviamo a sostituire, a questa espressione, l'espressione di $\psi/2$ ricavata dalle osservazioni precedenti; si ottiene:

$$A(\psi) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{N/2-1} a_n \cos\left(2n \arccos\left(\frac{x}{x_0}\right)\right), \quad N \text{ dispari}$$

$$A(\psi) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} a_n \cos\left((2n-1) \arccos\left(\frac{x}{x_0}\right)\right), \quad N \text{ pari}$$

Recuperando le definizioni di polinomi di Chebyshev, si vede che questo corrisponde a dire:

$$A(\psi) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{N/2-1} a_n T_{2n}(x), \quad N \text{ dispari}$$

$$A(\psi) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} a_n T_{2n-1}(x), \quad N \text{ pari}$$

Ossia, siamo riusciti a scrivere i fattori di schiera $A(\psi)$ come combinazione lineare dei vari polinomi di Chebyshev. Si noti che questa è una proprietà generale delle schiere simmetriche: semplicemente, una volta introdotto il cambio di variabile precedentemente presentato, è possibile esprimere le schiere simmetriche in questa forma: per ora, non è stata introdotta nessuna condizione aggiuntiva sul comportamento dei coefficienti di alimentazione.

Passiamo a questo punto al progetto vero e proprio della schiera Chebyshev: vogliamo trovare i coefficienti che permettano di imporre un fattore di schiera con le caratteristiche della funzione di Chebyshev. Si deve dunque imporre che la funzione appena calcolata sia uguale a T_{N-1}, dove N è il numero di radiatori presenti nella schiera. Si consideri a questo punto, per capire come procedere con il progetto, un esempio pratico: una schiera di 6 elementi, dunque con $N = 6$. Il fatto che $N = 6$, comporta il dover utilizzare l'espressione "pari" della funzione. Avendo bisogno, per una schiera con 6 elementi, di 5 zeri, dovrò imporre l'eguaglianza:

$$\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} a_n T_{2n-1}(x) = T_{N-1}(x)$$

dunque:

$$\sum_{n=1}^{3} a_n T_{2n-1}(x) = T_5(x)$$

questo significa, svolgendo la sommatoria:

$$a_1 T_1(x) + a_2 T_3(x) + a_3 T_5(x) = T_5(x)$$

Si ha a che fare con due polinomi di grado 5; il progetto della schiera coincide sostanzialmente con il progetto dei coefficienti di alimentazione a_1, a_2, a_3, che permettono di avere come funzione di diagramma di irradiazione $T_5(x)$. Al fine di realizzare ciò, si può utilizzare il principio di identità dei polinomi: se si fa in modo che i coefficienti siano uguali, allora anche i polinomi saranno uguali.

Dalle formule, si può ricavare che:

- $T_0(x) = 1$;
- $T_1(x) = x$;
- $T_2(x) = 2x^2 - 1$;
- $T_3(x) = 4x^3 - 3x$;
- ...;
- $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.

Vale infatti la formula:

$$T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}$$

dunque:

$$a_1 x + a_2(-3x + 4x^3) + a_3(5x - 20x^3 + 16x^5) = 5\frac{x}{x_0} - 20\left(\frac{x}{x_0}\right)^3 + 16\left(\frac{x}{x_0}\right)^5$$

si possono ricavare le equazioni per la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 16a_3 = \frac{16}{x_0^5} \\ 4a_2 - 20a_3 = -\frac{20}{x_0^3} \\ a_1 - 3a_2 + 5a_3 = \frac{5}{x_0} \end{cases}$$

da qua risolvendo il sistema si possono determinare i coefficienti a_3, a_2, a_1.

Un'indicazione di massima sull'andamento:

I coefficienti non hanno un inviluppo particolarmente strampalato: l'andamento è regolare, prevedibile, a parte per un piccolo aspetto: al più, in alcuni casi, l'inviluppo si comporta in modo un poco strano agli estremi: l'ultimo elemento potrebbe essere un poco più alto del penultimo: questo accade quando i lobi secondari non sono troppo bassi.

Cos'è x_0 ? Si tratta del rapporto tra il lobo principale e i lobi secondari (che sono tutti allo stesso livello); si ha:

$$r = \cosh\left[N \mathrm{settcosh}(x_0)\right]$$

invertendo:

$$x_0 = \cosh\left[\frac{1}{N}\mathrm{settcosh}(r)\right]$$

Si supponga di volere 20 dB di lobo: per $r = 10$, dunque:

$$x_0 = \cosh\left(\frac{2,993}{5}\right) = 1,18$$

Volendo, si può anche provare a determinare la posizione degli zeri: sostanzialmente infatti gli zeri si hanno per quando $T_5(x) = 0$; questo significa che:

$$\cos\left(N \arccos(x)\right) = m\frac{\pi}{2}$$

dove $x = \cos\frac{\psi}{2}$. Dunque:

$$N\frac{\psi}{2} = m\frac{\pi}{2}$$

dunque

$$\psi = \frac{m\pi}{N}$$

queste sono le posizioni degli zeri.

5.2.5 Schiera continua

Come detto in precedenza, una schiera è semplicemente una "successione di numeri": per caratterizzare una schiera, infatti, è sostanzialmente necessario identificare i coefficienti di alimentazione di ciascun radiatore. Si consideri dunque $I(x)$ la funzione inviluppo delle varie ampiezze, che assume i valori di ciascun elemento di alimentazione; fuori da questi punti si chiede che il comportamento sia abbastanza regolare. Se la distanza tra gli elementi è minore di λ, e $N \gg 1$, si può dimostrare che:

$$A(\psi') \sim \mathcal{F}\{I(x)\}$$

dove si definisce ψ' come:

$$\psi' \triangleq \frac{N-1}{2}\psi$$

questa cosa non verrà dimostrata.

Normalmente, quando si lavora sulle schiere, per fare il calcolo del fattore di schiera, si vedrebbe che quando si ha una schiera la sommatoria

$$\sum a_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\psi}$$

si può vedere come la somma di infinite trasformate di Fourier dell'inviluppo, traslate di 2π nella variabile ψ'. Questo per dire che il fattore di schiera "vero" sarebbe la somma di tante trasformate di Fourier:

Considerando un intervallo limitato nella variabile ψ, per esempio $\pm\pi$, il lobo principale è dovuto sostanzialmente a un solo termine: il primo. Nelle altre regioni, i contributi della somma totale derivanti dagli altri contributi sono abbastanza trascurabili. Si ha dunque un contributo principale, mentre tutti gli altri non sono interessanti, non sono importanti, e si possono trascurare, commettendo un errore che va solo a influenzare alcuni lobi secondari. Quando si ha un numero elevato di elementi, invece che fare i conti si può semplicemente fare la trasformata di Fourier dell'inviluppo e su questo fare conti di massima.

Tutto ciò vale se la spaziatura tra gli elementi è significativamente minore di λ: se per esempio $d \sim 0,6\lambda$ va ancora bene, altrimenti vi sono i grating lobes che non sono prevedibili con la trasformata. Questo perchè sostanzialmente quando si fa una schiera tra tanti elementi, essa è molto simile all'apertura ad essa equivalente: è come fare i conti sull'apertura equivalente alla schiera.

5.2.6 Alcuni esempi applicativi di antenne a schiera

Quali sono gli elementi che si utilizzano nelle schiere? Dipende sostanzialmente dalla frequenza che si deve utilizzare: una condizione di sicuro da rispettare è quella della distanza: gli elementi non devono essere lontani:

λ è già troppo. Gli elementi non possono dunque essere troppo grandi, altrimenti si toccano/compenetrano. Gli elementi saranno dunque piccoli, di conseguenza avranno diagrammi di irradiazione abbastanza larghi. Più raramente si fanno anche antenne più grandi, come il "VLA" (Very Large Array), usato come radiotelescopio.

Per frequenze bassi, i dipoli sono ottimi radiatori. Una situazione per esempio potrebbe essere questa:

questo è un esempio di un'antenna commerciale, costituita da una schiera di dipoli. I dipoli sono le "strisce". Anzichè cilindrico, il dipolo è a "striscia": il cilindro è come "sviluppato su un piano". Questo si fa dal momento che in certi casi è necessario sparare potenze molto elevate, come 10 kW; di questi, 100 W potrebbero essere dissipati: nonostante l'efficienza sia elevata, se non si è in grado di dissipare la potenza, l'antenna si distrugge; in questo modo si può dissipare in maniera migliore la temperatura.

Queste antenne sono tendenzialmente delicate; per questo motivo, vanno protette con un "radome" (Radar Dome), ossia con una copertura dielettrica progettata in modo da essere trasparente alla radiofrequenza.

I radome si possono realizzare in diversi modi:

- avere il minor spessore di dielettrico possibile:

  un generico sistema multistrato si può modellare mediante un sistema di linee di trasmissione con diverse impedenze caratteristiche. Sulla carta di Smith, il fatto di avere una discontinuità lunga h, implica il far fare un giro $2kh$; tanto più corto è h, tanto minore è lo sfasamento introdotto; se h è molto minore della lunghezza d'onda, tanto più insignificante sarà. Quando le frequenze sono molto basse, tipo 100 MHz, è sufficiente avere uno strato molto sottile;

- se la lunghezza d'onda è corta, è necessario fare lunghezze tipo $\lambda/2$ o suoi multipli, in maniera da fare "diversi giri della carta di Smith".

Un'altra tecnica è il "sandwich": si tratta di un sistema costituito da tre materiali, di cui due molto sottili, e la parte interna più spessa e costituita da qualcosa con costante dielettrica molto bassa (un "honeycomb", a nido d'ape, o "foam", tipo polistirolo espanso); i due strati separanti sono kevlar o nomex (gli strati vengono detti "pelli"), strati dielettrici con $\varepsilon_\mathrm{r} \sim 4$ o giù di lì.

In questi casi, si può considerare di avere una riflessione unica; un primo strato riflette, la maggior parte della potenza attraversa e viene riflessa al secondo strato; per minimizzare la riflessione, la distanza ottimale è $\lambda/4$: si ha che la differenza tra i due contributi di cammino è $\lambda/2$, dunque i due contributi di cammino si sottraggono: in questo modo si minimizza la riflessione.

Altre note applicative

Volendo realizzare una schiera lineare direttiva e di dipoli, si possono avere due possibilità: o dipoli allineati, o affiancati. Se i dipoli sono allineati, "collineari", il fattore di schiera viene moltiplicato per ciascun elemento; si ha una situazione del genere:

in questo caso la schiera è sicuramente non endfire, dal momento che la schiera endfire irradia sull'asse; se tutti i diagrammi di irradiazione sull'asse hanno degli zeri, di sicuro il campo sull'asse sarà nullo, dunque la schiera non potrà avere direttività assiale.

Si noti una cosa, che potrebbe essere già stata chiarita ma che si vuole chiarire: il massimo del fattore di schiera e del singolo elemento irradiante utilizzato nella schiera devono circa coincidere; "coincidere" è una parola grossa, per si richiede che il fattore di schiera sia nell'angolo a 3 dB dell'elemento (che, essendo di norma piccolo, avrà un lobo principale più largo rispetto a quello del fattore di schiera). I massimi di irradiazione di schiera ed elementi devono dunque essere compatibili.

Abbiamo capito che per realizzare una schiera endfire di dipoli non è possibile usare dipoli tra loro collineari; quello che si deve dunque fare è metterli paralleli tra loro:

Questa schiera di dipoli è di sicuro direttiva, ma solo su di un piano: si ha direttività esclusivamente sul piano che passa per l'asse: la schiera di dipoli collineari prima per esempio era direttiva sul piano del disegno, ma omnidirezionale sugli altri piani; ora, una schiera di questo genere darà comunque direttività in un solo piano, quello che passa per l'asse, ma sul piano ortogonale sarà sicuramente omnidirezionale. Per realizzare schiere direttive su entrambi i piani, una soluzione è quella di usare schiere planari, ma ci arriveremo dopo; è possibile realizzare la direzionalità su piani tra loro ortogonali anche con semplici dipoli.

Molto spesso, quando si ha a che fare con schiere di dipoli, i dipoli si utilizzano con piani di massa dietro: un dipolo con piano di massa è un elemento più direttivo di un semplice dipolo:

Si forma un'immagine sul piano di massa, dunque una riflessione, e ciò farà sì che non ci sia irradiazione nella direzione posteriore; se l'immagine ha segno opposto rispetto al contributo, al fine di avere contributi in fase, dunque massima direttività nella direzione assiale, serve che il piano di massa disti $\lambda/4$ rispetto all'altro, in modo che si abbia la mezza lunghezza d'onda di ritardo introdotta dall'inversione di segno, più i $\lambda/2$ introdotti dallo sfasamento della distanza.

Questa struttura si basa su una distanza $\lambda/4$, ma λ è un parametro legato direttamente alla frequenza del segnale che si intende irradiare; questo tipo di sistema sembrerebbe dunque selettivo in frequenza, ma in realtà non lo è particolarmente. Al fine di comprendere perchè, studiamo il diagramma di irradiazione di questo sistema al variare della frequenza. Come si studia questo problema? Si consideri un problema sostanzialmente uguale: un array di due elementi, intrinsicamente sfasati di 90°:

Utilizzando le nozioni note, si ha che:

$$|A(\psi)| = 1 - z = \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)$$

dove, al solito, $\psi = kd\cos\vartheta$. A questo punto, definiamo le caratteristiche del problema:

$$d = \frac{\lambda_0}{2}$$

dove λ_0 è la lunghezza d'onda associata alla frequenza di funzionamento ordinaria del sistema, f_0; avere il percorso lungo due volte $\lambda/4$ equivale ad averlo $\lambda/2$ (come già detto, essendo l'ipotetico dipolo-immagine in una posizione speculare rispetto al piano di massa). Si può allora svolgere:

$$kd\cos\vartheta = \frac{2\pi f}{\mathrm{c}}\frac{\mathrm{c}}{2f_0}\cos\vartheta$$

ciò si può sostituire e semplificare nell'espressione:

$$|A(\psi)| = \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\cos\vartheta\right)$$

Questa funzione presenta il seguente andamento:

Si noti che questa non è una banale funzione sinusoidale: l'andamento in effetti sembrerebbe ricordarlo, ma si può vedere per esempio che l'angolo a 3 dB sia diverso. L'angolo a 3 dB è quello per cui la potenza si dimezza, ossia quello per cui la grandezza lineare associata alla potenza (tensione, onda di potenza, corrente..) si sia ridotta al 70% del valore originale. In questo caso, bisogna cercare per quale valore il seno vale $0,7$; 0,7 coincide con il fatto che l'argomento del seno valga 45°; dunque:

$$\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\cos\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

questo si ha quando, per $f = f_0$:

$$\vartheta = 60°$$

In un normale seno, l'angolo a 3 dB è semplicemente 45°; in questo modo dunque il diagramma di irradiazione è intrinsicamente più largo, quindi l'antenna risultante meno direttiva.

Quello appena mostrato è, per l'antenna, il piano H: se i dipoli sono disposti perpendicolarmente al disegno, l'elemento è omnidirezionale.

Proviamo a questo punto a studiare a questo punto il comportamento del diagramma di irradiazione al variare della frequenza, ossia per $f \neq f_0$:

- se $f > f_0$, si ha che $\frac{f}{f_0} > 1$; questo significa che l'argomento del seno non varia più da 90° a 0°; bensì da più di 90° a 0°. Significa avere qualcosa di questo genere:

  Il fatto di far partire l'angolo del seno da un argomento maggiore di 90° significa sostanzialmente che il massimo della funzione sarà spostato più in avanti, ottenendo, al posto del massimo, un minimo locale (poco pronunciato). Ovviamente, questo comportamento non estremamente diverso si ha solo per $f \sim 1,2 f_0$ o comunque per discostamenti di questo genere, discostamenti non drastici.

- Se invece $f < f_0$, non si andrà più da 90° a 0°, ma si partirà da angoli un poco minori di 90°; questo significa avere sempre un massimo sull'asse, ma un poco più basso, dal momento che si incomincia a valutare la funzione "seno" per un valore inferiore a quello in cui si ha il suo massimo relativo.

Potrebbe a questo punto essere un'idea quella di avere una $f \ll f_0$; questo in realtà non è buono, dal momento che ridurre la frequenza significa ridurre molto la lunghezza elettrica, mettere un piano del dipolo molto vicino al piano di massa, in termini elettrici; questo introduce un'impedenza mutua molto forte. Se la lunghezza elettrica è troppo corta, il dipolo finisce per essere cortocircuitato dal piano di massa, ottenendo qualcosa di inutilizzabile di fatto. Un ±25% per la variazione di frequenza è accettabile.

Per il piano E, si ha qualcosa del genere: dato F_E il diagramma di irradiazione del singolo elemento sul piano E,

$$AF_E = \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_0}\cos\vartheta\right)\frac{\cos(kl\cos\vartheta) - \cos(kl)}{\sin\vartheta}$$

Questo, dato un dipolo di lunghezza arbitraria. Tra i due diagrammi di irradiazione, si ha che in un caso, il semiangolo a 3 dB è 60° (quello del fattore di schiera); mentre per il dipolo, il semiangolo di apertura è circa 38°.

Quello che andrà a prevalere è quello più stretto, dunque l'angolo totale (il doppio del semiangolo) di apertura sarà, per questo sistema:

$$\vartheta_{\mathrm{3dB,E}} \sim 70°$$

$$\vartheta_{\mathrm{3dB,H}} \sim 120°$$

Volendo, si può stimare il guadagno di questo radiatore, usando la solita formula:

$$G \sim \frac{31000}{\vartheta_E \vartheta_H} \sim 4$$

Qui, abbiamo usato dipoli; in realtà, specialmente proprio nell'ambito delle schiere, quelli che si usano sono i dipoli stampati, di cui si parlerà in seguito.

Esempio di realizzazione con guide troncate

Volendo andare su di frequenza, i dipoli non funzionano più come dovrebbero, come già detto svariate volte. Un'idea è quella di utilizzare trombini, i quali devono essere molto piccoli; più che trombini, dunque, si finisce per utilizzare guide troncate, magari un poco rastremate. Un'idea è la seguente:

Una tromba, come noto, viene progettata con un'apertura che permette, tra le altre cose, di ottenere un certo "adattamento con lo spazio libero", dal momento che l'impedenza dello spazio libero è ben nota e diversa da quella di una tradizionale linea di trasmissione. Ciò che si può fare è dunque "rastremare", realizzando delle sorte di "trombe a gradino". Nell'esempio presentato, ciascun elemento irradiante è circa 2λ.

Questo tipo di struttura è estremamente interessante da studiare per quanto riguarda l'alimentazione: essa si realizza mediante un sistema di divisori di potenza realizzati in microstriscia, invece che con singoli probe. Sulla parte posteriore dell'insieme di radiatori, vi sarà una ripartizione di potenza realizzata dunque interamente in microstriscia.

Come si può contare, vi sono 12 elementi per riga, dunque certe alimentazioni saranno asimmetriche (dal momento che comunque le alimentazioni simmetriche si riescono solo a realizzare se si ha un numero di radiatori per riga multiplo di 2). La microstriscia viene dunque utilizzata "da probe".

5.2.7 Antenne a fessura

Una tecnica molto interessante per la realizzazione di schiere di antenne è basata sulla realizzazione di fessure in guide d'onda. Data una guida d'onda rettangolare (si può fare anche sulle circolari, ma di solito non si fa), data una fessura rettilinea (per esempio longitudinale) in modo che non sia sulla mezzeria, si può fare ciò:

Si noti che la fessura deve essere tale da concatenare un certo numero di linee di corrente: una fessura di questo genere interrompe le linee di corrente presenti sulla guida d'onda, dunque farlo sulla mezzeria non ha senso fare la corrente, dal momento che non ci sono componenti di corrente trasversali (ma solo longitudinali). Se si interrompono linee di corrente, quello che capita è che le correnti "girano attorno" alla fessura, ottenendo più o meno la stessa forma delle correnti che girano attorno alla guida d'onda, e ciò permette di generare, sulla fessura, un andamento del campo simile a quella del classico TE_{10}, diretta perpendicolarmente alla fessura.

Il campo ai bordi della fessura sarà nulla, dal momento che per le condizioni al contorno sul metallo non si possono avere delle linee di campo tangenziali ai bordi di metallo.

Volendo calcolare l'irradiazione con il metodo esatto, si dovrebbe calcolare l'integrale delle correnti presenti sul piano metallico; il campo irradiato da questa apertura si può analizzare tuttavia applicando il teorema di equivalenza sul piano indicato: un piano che a destra ha il vuoto, a sinistra la guida d'onda e la fessura irradiante. Dal momento che inoltre abbiamo a che fare con un piano metallico, conviene utilizzare la forma del teorema di equivalenza con le correnti magnetiche:

$$\underline{M}_{\mathrm{S}} = 2\underline{E}_{\mathrm{S}} \times \hat{\mathrm{n}}$$

Questo, dal momento che $\underline{E}_{\mathrm{S}}$ e $\underline{H}_{\mathrm{S}}$ sono i campi elettrici e magnetici tangenziali; dal momento che si ha a che fare con una superficie metallica, noi in realtà non abbiamo campo magnetico tangenziale, dunque su tutta la parte metallica della guida d'onda non si hanno correnti magnetiche. Questo permette di calcolare le correnti magnetiche solamente per l'apertura, escludendo senza problemi tutta la parte metallica.

Possiamo dunque preoccuparci della sola fessura:

Con la regola della mano destra è possibile determinare le $\underline{M}$. Tutto ciò ci permette di dire che questa apertura così realizzata equivale sostanzialmente a un dipolo magnetico. Si tratta sostanzialmente di un'applicazione del principio di Babinet alla struttura, dove si sostituisce alla fessura un elemento di corrente magnetica.

Questa struttura si può vedere come una piccola tromba, molto sottile e molto stretta, che irradia un campo elettrico verticale; questo torna con il fatto che un dipolo magnetico con $\underline{M}$ disposto sul piano orizzontale irradia un campo con direzione verticale.

A questo punto, come si fa a fare una schiera? Beh, prima di tutto, dobbiamo capire: qual è la posizione trasversale della fessura? Una cosa è sicura: più ci si allontana dalla mezzeria, più sono le linee di corrente che si interrompono: in questo modo si hanno più linee di corrente trasversali. Questo tipo di struttura è una struttura risonante: si può modellare l'effetto di irradiazione mediante una certa conduttanza di irradiazione, G_{irr}. Il circuito equivalente della fessura, alla risonanza, è di questo tipo:

Quando la fessura è circa $\lambda/2$, si avrà una conduttanza di irradiazione $G = G_{\text{irr}}$; si può dunque dire che:

$$P_{\text{irr}} = GV^2$$

Sapendo che, per una struttura del genere,

$$P_{\text{irr}} \propto \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

si ha qualcosa del tipo:

$$G = G_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)$$

Questo vale solo alla frequenza centrale, ossia alla frequenza di risonanza; in questo caso infatti le parti reattive si compensano tra loro.

Come si possono disporre le fessure sulla guida d'onda? Una schiera, si ricorda, si caratterizza mediante un certo insieme di coefficienti di alimentazione; al fine di capire come disporre le fessure dunque fondamentale sarà la semplicità nell'alimentarle. L'idea più interessante è la seguente: la linea equivale a una linea di trasmissione. Se si mette un corto circuito in fondo alla linea di trasmissione equivalente, si mette, a $\lambda_{\text{g}}/4$ dal corto, la prima fessura, modellabile alla risonanza mediante una conduttanza G_1. a $\lambda_{\text{g}}/2$ da questa si introduce una G_2, un'altra fessura. A $\lambda_{\text{g}}/2$ una G_3, e così via. L'ammettenza di ingresso di questa struttura è:

$$Y_{C-} = \sum_i G_i$$

ossia, la somma delle varie conduttanze.

Con ciò, troviamo un criterio per realizzare l'adattamento: se si chiede che y_i (ammettenza normalizzata rispetto a una certa impedenza caratteristica) sia unitaria, allora abbiamo adattamento. Imponendo per esempio che le G_i sian tutte uguali, introducendo dunque un valore di normalizzazione idoneo, si riesce a ottenere l'adattamento.

Al fine di caratterizzare il sistema non sono però solo necessarie le conduttanze: è necessario conoscere le varie tensioni, al fine di sapere come si devono alimentare i vari punti in cui si introducono le suddette conduttanze. Per fare ciò, ciò che si potrebbe fare è disegnare il diagramma di onda stazionaria del sistema:

Si parte da un corto circuito, dunque ammettenza infinita: un minimo. Si arriva a un certo punto, dopo mezzo giro di carta di Smith, e si arriva al punto $A+$. Una volta che si mette in parallelo il G_1, si fa un "salto" in dentro, verso la carta di Smith (si aumenta l'adattamento). Si fa un giro intero, e si arriva da $A-$ a $B+$, e così via. Sappiamo che:

$$V(z) = V^+ \left[1 - \Gamma_I(z)\right]$$

$1 - \Gamma_I$ (si considera il Γ di corrente) è il vettore che si traccia a partire dalla parte sinistra della carta di Smith. Si può vedere che nei vari punti A, B, C, $1 + \Gamma$ è sempre reale e positivo. Volendo analizzare, quello che si ha in questo modo è: partendo da una tensione nulla sullo short ($-\infty$ dB), si arriva a un certo massimo. In questo massimo si ha una discontinuità di impedenza parallelo, discontinuità che, come noto dalla teoria delle linee di trasmissione, mantiene la tensione costante da entrambe le parti, ritrovando a "sinistra" la stessa tensione che si aveva a "destra". Dopo un giro della carta di Smith, si ritorna allo stesso livello in cui si era, e così via: la tensione sui punti in cui si introduce l'alimentazione ha modulo sempre uguale. Ciò che cambia è che, salto dopo salto, ci si avvicina sempre più a una condizione di adattamento, dunque il ROS sarà sempre minore, e di conseguenza le oscillazioni.

Questo cosa ci dice? Se le fessure e le tensioni sono tutte uguali, la schiera ottenuta in questa maniera è uniforme. Si parla di "schiera risonante", dal momento che su ogni tratto si ha $\lambda/2$.

Si noti che per ora si è parlato di ampiezze, ma non di fasi: si ha infatti che, se il coefficiente di riflessione varia di 180° ogni mezza lunghezza d'onda, d'altra parte si ha anche che:

$$V^+ = V_0^+ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}$$

A ogni giro di carta di Smith, dunque si "girano i segni" dell'alimentazione. Realizzare ciò in pratica però non è difficile:

basta "scambiare i morsetti di alimentazione" a ogni colpo, in modo da alimentare elementi adiacenti con polarità invertita.

Un'idea potrebbe essere quella di far distare gli elementi, dunque le fessure, λ_g invece che $\lambda_\mathrm{g}/2$; non si tratta in realtà di una grande idea, dal momento che in realtà la frequenza di funzionamento della schiera è λ_0, che è sicuramente minore di λ_g, quindi si finirebbe per avere senza ombra di dubbio dei grating lobes. Volendo usare questa soluzione, il trucco è "riempire la guida di dielettrico": in questo modo le fessure sono distanziate λ_g. Questa struttura presenta dei vantaggi rispetto a quella presentata: quello che si fa di solito è, al fine di avere $\lambda_g/2$, mettere un po' di fessure da una parte, un po' dall'altra (per la questione dell'inversione di segno, dunque del rifasamento); questo non è bello dal momento che il disallineamento provoca delle perturbazioni al diagramma di irradiazione. Se si mettesse λ_g come distanza, non vi sarebbe il problema del rifasamento, ma dunque neanche i problemi della perturbazione del diagramma di cui si sta parlando.

Una nota: la **dimensione** della fessura è circa $\lambda_0/2$: una fessura irradia nel vuoto, non nella guida, dunque si ha ciò (questo, per l'analogia col dipolo magnetico). La larghezza di queste fessure di solito non è estremamente sottile: di solito si ha

$$\frac{l}{w} \sim 10$$

La banda di queste strutture non è molto larga, dal momento che questa struttura è risonante. Se si ha un discostamento della frequenza, le distanze non sono più le stesse, dunque sulla carta di Smith non si "torna allo stesso punto".

Questo è un esempio di fessura, ma non è l'unico esempio possibile: l'irradiazione da questa schiera dà un fascio stretto in orizzontale (si hanno molti elementi), ma un fascio largo in verticale, con polarizzazione verticale. Volendo avere una schiera con polarizzazione orizzontale, si deve usare una fessura di un altro tipo:

Se si hanno delle fessure "oblique" sulla guida d'onda, sulla faccia stretta, cosa si ha? L'idea è quella di avere due fessure (fessure "a coppie"). Volendo interrompere le correnti, i tagli devono essere orizzontali o obliqui: si tende a farli obliqui, per non far tagliare troppa corrente (verticali non ne taglierebbero per niente, orizzontali ne taglierebbero troppa). Si hanno dei dipoli magnetici quasi verticali, che son equivalenti a dipoli elettrici quasi orizzontali, con però una nota: se si mettono due fessure, in modo tale da inclinarle di direzioni opposte, quello che si fa è avere due dipoli magnetici orientati in due direzioni diverse, con però uno sfasamento di 180°; ne consegue che il campo elettrico irradiato dai due dipoli è tale da cancellare le componenti verticali e sommare quelle orizzontali, di conseguenza il campo elettrico ha polarizzazione orizzontale.

Si ha un fascio stretto sul piano orizzontale e un fascio largo sul piano verticale; per ridurre un po' il fascio nel piano verticale si può fare qualcosa del genere:

Si possono mettere dei piani metallici: in questo modo si ottiene una "tromba a settore", che si comporta sul piano orizzontale come una schiera, su quello verticale come una tromba; in questo modo si riesce ad aumentare per il piano verticale la direttività del fascio.

5.3 Antenne stampate

Si è parlato di dipoli e di guide, come basi per la realizzazione di radiatori. Quando si è a frequenze "intermedie" (tra il GHz e le decine di GHz), quello che di solito si fa per realizzare schiere di radiatori è usare "antenne stampate".

Un esempio di antenne stampate sono i cosiddetti "dipoli stampati", già analizzati in precedenza nell'esempio di antenna in cui il dipolo aveva il cilindro sviluppato sul piano. I dipoli stampati sono dipoli in cui, invece di avere il cilindro, si stampa una striscia su un circuito stampato (si noti che è una striscia, non una microstriscia, almeno per ora), e questa sarà un radiatore.

Si vuole porre enfasi sulla differenza tra queste "strisce" e le "microstrisce": una microstriscia è una struttura di questo genere:

Si noti che un dipolo a striscia **non** ha il piano di massa:

Un dipolo di questo tipo si può dimensionare a partire dal dipolo tradizionale: si può infatti dimostrare che esso abbia un "diametro equivalente" del tipo:

$$d_{\mathrm{eq}} = \frac{W}{2}$$

Data poi l è possibile determinare la snellezza del dipolo e dunque i vari parametri. Ciò che non è ben noto è l'effetto del dielettrico: come nel caso della microstriscia, si ha una costante dielettrica efficace $\varepsilon_{\mathrm{eff}} \sim 1$, se $h \ll \lambda$; ciò tuttavia non è ben determinabile.

Il grosso vantaggio di questa struttura è che tecnologicamente è molto semplice da realizzare; è inoltre semplice anche progettare varianti di questa struttura, varianti per esempio derivanti dalla necessità di avere una maggiore banda, come il "dipolo a farfalla":

In queste strutture (a striscia) il problema è l'alimentazione: sullo stampato quello che si ha è una struttura di tipo sbilanciato, per portare l'alimentazione, ma per alimentare un dipolo, come visto, è necessario averla bilanciata.

Recuperiamo a questo punto la microstriscia, in modo da ottenere qualcosa di interessante. Un modo facile di realizzare un simmetrizzatore è il seguente:

Sotto la microstriscia c'è il piano di massa; si immagini di troncare il piano di massa, mantenendo il dielettrico, e quindi realizzare l'elemento irradiante, mediante una prosecuzione della linea; per questa non c'è il piano di massa, dunque essa irradia. Dall'altra parte, quello che si può fare è realizzare una struttura simmetrica, mediante una prosecuzione del conduttore a partire dal piano di massa, anch'essa lunga $\lambda/4$: si realizza in questo modo una linea bilanciata. Questa struttura è automaticamente simmetrizzata, dunque la corrente nell'elemento alimentato genera per accoppiamento elettromagnetico una corrente simmetrica sulla parte simmetrica, e in questo modo si ha il ritorno di corrente direttamente sulla massa, a partire dalla quale parte il conduttore simmetrizzante.

Quando si parla di antenne stampate, vi sono sostanzialmente tre categorie di antenne di cui si parla:

- supporto dielettrico: come quelle già analizzate: in cui il fatto di essere stampate come unico vantaggio ha quello di usare un supporto dielettrico, senza fare uso di particolari strutture;
- antenne a stripline, ossia basate sulle stripline;
- antenne a microstiscia, ossia basate sull'uso di microstrisce.

5.3.1 Antenne stripline

La stripline è una struttura molto simile alla microstriscia, con però due piani di massa invece che 1:

Questa struttura (la stripline) è dunque tendenzialmente omogenea: se la microstriscia ha aria sopra e dielettrico sotto, concettualmente la stripline è omogenea.

Come si fa a fare un radiatore in stripline? Sostanzialmente, si pratica una fessura in uno dei due piani di massa, fessura lunga circa $\lambda/2$; se si ricorda com'è la topografia di campo magnetico in una stripline (anelli chiusi attorno al conduttore), si vede che il campo magnetico è perpendicolare al conduttore; praticando una fessura, anch'essa perpendicolare al conduttore, il campo magnetico genera un dipolo magnetico, ottenendo dunque irradiazione. Questa struttura irradia un campo elettrico verticale, dunque perpendicolare alla struttura.

Essendo la fessura su un piano metallico, essa irradia da una parte e dall'altra: è dunque bidirezionale. Per alimentare una struttura di questo genere si può fare ciò:

Si salda la calza del coassiale con la parte inferiore della fessura, la calza con la parte superiore, ovviamente senza toccare il piano di massa. Ciò è come applicare un generatore sulla struttura.

Invece che eccitare in questo modo, quello che si può fare è eccitare tramite dei campi, come quello della microstriscia, solo che la fessura, essendo su un piano metallico, continua a irradiare da due parti. Ciò che si fa per evitare che si abbia irradiazione nella regione posteriore (riducendo la direttività e rischiando di inviare delle onde elettromagnetiche a circuiti nella parte posteriore) è mettere dei pin di corto-circuito:

Questi pin congiungono i due piani metallici in modo che l'energia elettromagnetica, se i pin sono sufficientemente vicini, viene cortocircuitata: una griglia infatti non permette al campo parallelo ai fili di passare, facendo solo passare quello perpendicolare. Questo permette in sostanza di realizzare una cavità risonante: si alimenta e isola una delle parti, rendendo il campo "monodirezionale".

Questa per esempio è una modalità per la realizzazione di un'antenna aerodinamica. Si parla di antenne "low profile", in maniera impropria tradotte "a basso profilo": queste sono antenne a bassa sezione aerodinamica.

Quali sono gli svantaggi di queste antenne? Beh, sono complicate da realizzare: è necessario fare le fessure, realizzare i pin di corto circuito, dunque sono di sicuro strutture elaborate e complicate da realizzare. Il problema non è solo la realizzazione dell'alimentazione isolando gli elementi irradianti, ma anche l'accoppiamento tra le linee di alimentazione. Gli strati di dielettrico da avere inoltre sono due: servono due strati di massa, associati a due circuiti.

5.3.2 Antenne in microstriscia

La microstriscia è una struttura che si può caratterizzare mediante due parametri: la costante di propagazione e la ε_{eff}. Si ha dunque un solo dielettrico (a meno che non si realizzino strutture con più strati. ε_{eff} è una costante dielettrica relativa equivalente che tiene conto del fatto che il campo elettrico si propaga sia nel dielettrico sia nell'aria, in modo dunque da "mediare" le due situazioni. La struttura ha alimentazione sbilanciata: il piano di massa è a 0 V, dunque di sicuro si ha una alimentazione non bilanciata.

Si parla di "antenne in microstriscia", ma la microstriscia è fondamentalmente nata come una linea di trasmissione: una linea di trasmissione è un supporto di propagazione guidata, dunque nasce come qualcosa che dovrebbe confinare il campo elettromagnetico: non dovrebbe irradiare.

In una microstriscia si ha un comportamento di questo genere:

Si immagini di avere una microstriscia che proviene, "da sinistra", da un certo tratto. Questa microstriscia viene improvvisamente troncata, dunque la distribuzione di campo è quella della figura: le varie linee di campo vanno tutte verso il conduttore. La microstriscia è abbastanza sottile: molto più della lunghezza d'onda.

Cosa si può fare per studiare l'irradiazione? Al solito, si può utilizzare il teorema di equivalenza, cercando correnti magnetiche (al solito il dominio è metallico): si hanno i contributi visti, e il campo di frangia. Ciò che si può fare è rimuovere tutto ciò che si ha al di sotto del piano tratteggiato, sostituendo con le correnti magnetiche. Dal momento che si hanno campi elettrici diretto verso l'alto e verso il basso, le correnti che si hanno saranno uguali e opposte, dunque sui bordi "orizzontali" le correnti magnetiche equivalenti saranno uguali e opposte, e non daranno contributi all'irradiazione. L'unico contributo effettivo che si avrà sarà quello sulla troncatura, dal momento che le correnti magnetiche su di essa non avranno altre correnti opposte in grado di cancellarne i contributi.

Se la striscia è stretta, vi sarà poca irradiazione, dal momento che si avrà poca corrente. Questo spiega perchè più si va su di frequenza, più il substrato deve essere sottile: se il substrato non fosse sottile, si avrebbero enormi perdite che finirebbero in irradiazione.

Se è fatta bene, una microstriscia non irradia: solo la troncatura, che però è un dipolo corto.

Antenne patch

Per realizzare un'antenna in microstriscia si fa ciò:

Si ha una microstriscia che si allarga, dunque passa da una $W = w$ a $W = a$, si allunga per $\lambda_g/2$, quindi dopo finisce. Qual è la topografia di tensione, dunque di campo, della struttura? Beh, si può pensare alla microstriscia come una linea di trasmissione con una impedenza caratteristica abbastanza alta, per esempio di 50Ω; allargando, l'impedenza caratteristica si riduce. Se trascuriamo le capacità di frangia, possiamo dire che la microstriscia è sostanzialmente chiusa (a destra) su di un aperto; per la tensione, un aperto significa un massimo; andando dunque indietro, dopo $\lambda_g/4$ si ha un'inversione del carico visto (l'open si vede come short), dunque si ha un minimo di tensione; si ha dunque un'inversione di segno, che andrà anche sulle linee di campo (essendo campo e tensione legati tra loro mediante un operatore lineare), quindi si tornerà fino a un massimo, però di segno opposto. Ai lati quello che si vede è dunque sostanzialmente il diagramma d'onda stazionaria.

Volendo a questo punto studiare questa struttura, applichiamo su di essa il teorema di equivalenza, cercando le correnti magnetiche; si può vedere che esse avranno questa forma:

Il contributo nella direzione "frontale" delle correnti orizzontali è nullo, dal momento che le quattro componenti si cancellano tra loro; i bordi laterali, per questo, vengono detti "non-radiating edges".

Al contrario dei non-radiating edges, sulle troncature le correnti sono parallele ed equiverse; questo dunque equivale ad avere due dipoli magnetici paralleli ed equiversi, ossia in fase tra loro: questa struttura, dunque, si comporta come una schiera di due dipoli magnetici. Questo tipo di struttura è detta "antenna patch", dal momento che "patch" in inglese significa "rettangolino". Il modello di analisi di questa struttura è molto semplice: il modello delle linee di trasmissione.

La polarizzazione è orizzontale: vale di solito la regola"la polarizzazione è nello stesso verso della linea di alimentazione" (in questo caso, nella stessa direzione della microstriscia, dunque); è una regola che non vale sempre, ma in questo caso per esempio sì.

Il modello che abbiamo presentato è molto semplificato; in realtà, il modello è più complicato: per esempio, si hanno le capacità di frangia. La struttura inoltre irradia, dunque avrà delle conduttanze di irradiazione, G_{irr}, modellanti le "perdite" del circuito in campo elettromagnetico da essa irradiato.

Questo infatti è un dipolo magnetico, dunque irradia. Dato questo modello, più completo, è ora necessario trovare i valori dei parametri: C e G. La lunghezza l, volendo avere una struttura risonante, non è proprio $\lambda/2$, ma poco meno: se si va a guardare cosa succede sulla carta di Smith, si vede che $C + G$ sarà un punto un po' più in alto di quello che ci si aspetta. Se l fosse esattamente $\lambda/2$, si farebbe un giro intero della carta, e si tornerebbe in un punto che è Y_{A-}, ma non ha senso: già in B avrò un ulteriore contributo di capacità. Il trucco è fermarsi al complesso coniugato di Y_{A-}: in questo modo, quando si va ad aggiungere la capacità in C, le parti immaginarie si sommano (sottraggono in modulo), le conduttanze si sommano, si finisce per avere qualcosa di puramente reale e dunque alla fine si ottiene una condizione di risonanza come desiderato.

La capacità C è considerabile equivalente a un tratto di linea di lunghezza Δl:

$$C = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{eff}}}\Delta l}{\mathrm{c}Z_{\infty}}$$

questa è una formula empirica che dà l'allungamento virtuale dovuto alla capacità di fringe, per cui la linea è lunga $l + \Delta l + \Delta l$ (le capacità di frangia sono infatti 2). Esiste una formula che permette di determinare, noto lo spessore h, il Δl che si ha a causa delle capacità di fringe. Si può vedere che, in pratica, $\Delta l \sim 0,412h$ (gli altri contributi sono piuttosto trascurabili).

Grossolanamente, $2\Delta l \sim h$. Questo permette di dire che la lunghezza del patch, più l'altezza del substrato, devono essere pari a $\lambda/2$.

Per quanto riguarda la conduttanza di irradiazione, si può dimostrare che la conduttanza di irradiazione di uno slot (abbastanza corto) è:

$$G_{\text{slot}} \sim \frac{1}{90}\left(\frac{W}{\lambda}\right)^2, \quad W \ll \lambda$$

questo si può dimostrare usando la stessa tecnica di dimostrazione per il dipolo elementare: si vede che $P_{\text{irr}} = GV^2$; P_{irr} si calcola con l'integrale, e boh.

L'andamento è qualcosa di questo genere dunque:

Questa è la conduttanza di irradiazione di un singolo slot, al variare di a/λ (a larghezza della pista): inizia quadratico, poi diventa quasi lineare. Se $w/\lambda \sim 1/3$, G viene abbastanza piccolo: $G \sim 1/900$, dunque la resistenza associata alla conduttanza è circa 900 Ω: molto elevata. L'impedenza di ingresso dunque, se la conduttanza di irradiazione è circa 900 Ω, sarà circa 400 Ω (dal momento che in ingresso vediamo il parallelo di due impedenze di irradiazione, almeno alla risonanza).

Il fatto che il comportamento circuitale sia quello di un risonatore con impedenza di ingresso molto alta, dal momento che la linea di alimentazione è piuttosto alta, bisogna in qualche maniera adattare. Fare una microstriscia a 400 Ω è impossibile (verrebbe troppo stretta), dunque bisogna fare in modo da adattare in qualche maniera. Per adattare questa configurazione vi sono diverse tecniche.

Ricapitoliamo: il problema che ora ci vogliamo porre è capire come adattare questa struttura:

Dobbiamo trovare una maniera per adattarlo senza usare linee molto strette. La prima idea per effettuare l'adattamento è questa: si immagini di avere a che fare con una struttura, con il modello a linee di trasmissione, di questo tipo:

Si ha una linea lunga circa $\lambda/2$, con queste due conduttanze da 900 Ω (ignoriamo le capacità di frangia per comodità). Se il punto di alimentazione, invece di mettere l'alimentazione nella sezione di ingresso, è in un punto intermedio, per esempio se è in mezzo alla linea di trasmissione, com'è? Beh, se si mette esattamente in mezzo:

$$R_{\text{sx}} = R_{\text{dx}} = \frac{(10\Omega)^2}{900\Omega} = 0,1\Omega$$

è come avere un $\lambda/4$: considerando che l'impedenza caratteristica della linea sia $Z_\infty = 10\Omega$, si ha ciò.

A seconda di dove si mette il punto di alimentazione, cambiano tensioni e correnti, dunque cambia l'impedenza di ingresso; essa però rimane sempre reale, qualsiasi sia il punto x rispetto all'inizio della linea in cui si metta (si può dimostrare usando un po' di teoria delle linee di trasmissione). Infatti:

Da una parte si gira di x, dall'altra di $\lambda/2 - x$, quindi le due ammettenze sono complesse coniugate, e sommandosi si eliminano le parti reattive. Si può dimostrare che mettendo il generatore più o meno a 1/4 della lunghezza del patch, l'impedenza è circa pari a 50Ω, impedenza alla quale di solito sono i generatori.

Questa è la teoria; come si fa ad alimentare introducendo il generatore a un quarto della lunghezza del patch? Esistono almeno due soluzioni:

- tecnica monolitica: se la linea di alimentazione e la patch sono sullo stesso piano, sullo stesso strato, cosa comoda sotto il punto di vista realizzativo, allora la tecnica idonea è quella "recessed feed", o "tecnica dell'alimentazione rientrata": si porta l'alimentazione all'interno del patch tramite dei tagli nella microstriscia. Ciò coincide con l'alimentare la microstriscia non all'estremo ma qui:

- un'idea alternativa è basata sul ricavare il punto di alimentazione, alimentando con il coassiale direttamente a un quarto della patch.

  si alimenta il patch con il coassiale, facendolo passare attraverso il piano di massa, andando dunque a collegarsi attraverso il substrato. Questa cosa presenta molte più complicazioni: bisogna mettere un connettore, fare un foro, saldare. Se si han pochi elementi si può fare, con cento elementi assolutamente no.

Configurazione con accoppiamento elettromagnetico

Questi sono due sistemi di alimentazione per le antenne patch. Ci sono dei problemi: quello in coassiale è sicuramente complicato, dunque non va bene se si han molti elementi; in quello monolitico, si han altri problemi, dal momento che si hanno esigenze contrastanti, quando si vogliono realizzare delle antenne in microstriscia: la linea di alimentazione deve infatti essere la più stretta possibile, di conseguenza il substrato dovrà essere il più basso possibile, ma si può vedere che la larghezza di banda del radiatore è tanto maggiore quanto più alto il substrato (maggiore è il volume di un'antenna, maggiore la larghezza di banda). Cosa si può fare dunque? La risposta è: "accoppiamento elettromagnetico": invece che collegare il patch all'alimentazione, che rimane sul substrato basso, si eccita il patch mediante accoppiamento elettromagnetico, troncando la linea di alimentazione.

La linea troncata genera un campo di frangia, che a sua volta genera l'eccitazione per il patch, senza che ci siano contatti. In questo caso il modello più idoneo da utilizzare è la cavità risonante: in pratica il patch, oltre a essere considerabile come una linea di trasmissione, è considerabile come una cavità risonante.

Due parole sulle cavità risonanti: sostanzialmente i patch sono delle scatole, di questo tipo:

Le pareti sopra e sotto sono perfettamente conduttrici elettriche, PEC, mentre le altre sono degli aperti; gli aperti sono un po' il duale dei PEC, dunque sono dei PMC: è come avere delle guide d'onda PMC con due PEC davanti e dietro a cortocircuitarle. La cavità risonante si eccita mettendo un dipolino dentro essa: il dipolo ottenuto dalla troncatura delle linee di trasmissione. Se l'altezza è opportuna, e se la penetrazione della linea di trasmissione nella cavità è quella giusta, si ha un perfetto adattamento del patch alla linea di trasmissione. Volendo riportare R_{irr} rispetto a x/λ, si ha una cosa di questo tipo:

scegliendo la posizione della terminazione, vi sarà un certo livello di penetrazione per cui l'impedenza sarà 50Ω.

Accoppiamento con fessura

Se il patch fosse molto alto, il precedente tipo di accoppiamento di sicuro non funzionerebbe: il campo di frangia infatti non riuscirebbe mai ad eccitare un punto troppo lontano. Un'altra configurazione è l'accoppiamento con fessura (slot): nel caso delle precedenti configurazione, si aveva la linea dalla stessa parte dei patch; dal momento che anche la linea un poco irradia, c'è il rischio di avere una perturbazione del diagramma di irradiazione dovuta alle correnti sulla linea. Una tecnica introdotta successivamente è quella di mettere la linea di alimentazione dalla parte opposta del piano di massa rispetto al patch, per fare in modo che non si accoppino; praticando dunque una fessura nel piano di massa in modo che, tramite la fessura, si possa fare accoppiamento elettromagnetico con il patch, effettuando la fessura in modo appropriato si riesce a ottenere il risultato desiderato. La fessura si deve sempre fare a monte della troncatura, mai alla fine della linea, altrimenti si avrebbe un elemento poco eccitato (si andrebbe a concatenare poca corrente).

Altre forme di patch

Non è detto che tutte le patch siano rettangolari: vi sono anche circolari o anulari. Per questi casi di solito non si utilizzano i modelli a linee di trasmissione, piuttosto si usano quelli a cavità: il patch circolare si vede come una cavità circolare, quello anulare come una cavità coassiale.

Tutti i patch finora visti realizzano polarizzazioni circolari. Come si potrebbe fare, per realizzare una polarizzazione circolare? Ci sono due modi:

- un primo modo potrebbe essere quello di perturbare le correnti sul patch, generando delle correnti in quadratura tra loro; questo si può fare smussando a 45° il patch, in questo modo:

  ciò permette di realizzare polarizzazioni circolari;

- l'altra configurazione, più interessante e a banda più larga, è quella di alimentare il patch con le due componenti, verticale e orizzontale: tra le caratteristiche del patch rettangolare prima visto infatti c'è la possibilità di poter usare il suddetto in doppia polarizzazione, dal momento che il diagramma di onda stazionario ha uno zero in mezzo.

  se si mette un'altra porta, 2, $S_{12} = 0$, dal momento che, essendovi lo zero nel diagramma di onda stazionario dovuto a uno solo dei contributi, le due porte "non si parlano", ossia sono disaccoppiate. Si può dunque alimentare in questo modo, avendo sia una polarizzazione orizzontale sia una polarizzazione verticale; questo si può usare per i SAR (radar ad apertura sintetica). Studiando quale delle polarizzazioni viene riflessa all'antenna si può per esempio capire che tipo di materiale si ha: l'erba per esempio torna indietro solo verticale.

Alimentando dunque il patch in orizzontale con una fase, in verticale con la fase sfasata di 90°, si hanno due campi ortogonali tra loro e in quadratura: polarizzazione circolare.

Per allargare la banda, al di sopra del patch si può mettere un secondo patch, parassita, con dimensioni leggermente diverse: un elemento risuona a una frequenza, l'altro a una frequenza leggermente diversa, ottenendo un'impedenza più costante.

5.4 Schiere a scansione elettronica

Si consideri, per comprendere meglio la teoria che si sta per affrontare, una schiera composta da quattro elementi, con fase relativa $\Phi = 0$; in questo caso, si ha qualcosa del genere:

Quello che si può fare, al fine di ottenere schiere a scansione elettronica, è ottenere elementi in grado di introdurre uno sfasamento, per esempio tale per cui:

$$\varphi = (n-1)\Phi$$

In questo modo, introducendo Φ, si può vedere, rivedendo le formule di prima, che i lobi principali si modificano passando dalla direzione broadside alle altre (si parte dalla broadside, supponendo che i coefficienti di alimentazioni siano reali). Quando si varia Φ, infatti:

$$\vartheta_{\mathrm{S}} = \arcsin\left(-\frac{\Phi}{kd}\right)$$

5.4.1 Sfasatori digitali

Lo sfasamento si può realizzare sostanzialmente in due modi: in modo analogico, o in modo digitale. Il caso più comune, nonostante il prezzo, è uno sfasamento di tipo digitale, ossia a scatti; questo permette di realizzare una funzione Φ del tipo:

$$\Phi = m\Phi'$$

dove Φ' è un certo sfasamento, m un intero. Al variare di m, il dispositivo introdurrà diversi valori di sfasamento; si avrà, dunque, uno sfasamento a scatti.

Il caso più comune di sfasatore è quello per cui si hanno intervallo equispaziati nel range $[0, 2\pi]$:

$$\Phi' = \frac{2\pi}{2^B}$$

ossia, dove N (numero di intervalli) è una potenza di 2; B è un intero ed è il numero di bit dello sfasatore (con 3 bit per esempio si han 8 stati possibili, e così via).

Sfasatore a diodi

Una prima soluzione per la realizzazione di sfasatori digitali è basata sull'utilizzo di microstriscia e di diodi:

In questo specifico caso si ha uno sfasatore a 3 diodi, dunque a 3 bit; il senso della cosa è: si introducono 3 diodi e 3 diramazioni, realizzate mediante linee di trasmissione (microstrisce) di lunghezze L_1, L_2, L_3, in questo caso pari a:

$$L_1 = \lambda/8 \quad L_2 = \lambda/4 \quad L_3 = \lambda/2$$

Si hanno due stati possibili per i diodi: stato “1”, ossia diodo “chiuso”, conduttivo; stato “0”, ossia diodo “aperto”. Quando il diodo è aperto, il segnale è forzato a passare nella microstriscia, subendo dunque uno sfasamento. A seconda di quanti diodi sono aperti e quanti chiusi, si han diversi possibili valori di sfasamento.

Questo tipo di architettura funziona sicuramente, però a certe condizioni ben definite: questo tipo di struttura non è molto adatto per potenze e frequenze elevate, dal momento che sia il diodo sia la microstriscia presentano comportamenti non ideali e tendenzialmente errati per queste condizioni.

Determinazione del numero di bit

Nel caso appena presentato, si sono usati 3 bit; questo era un esempio per mostrare l’applicazione, ma non è assolutamente detto che 3 bit sia un numero buono. La domanda alla quale si vuole rispondere in questa sottosezione, è: qual è un numero ragionevole di bit?

Ragioniamo: si consideri per esempio di avere a che fare con una schiera lineare; dato il diagramma di irradiazione di una schiera, per esempio broadside, si potrebbe chiedere ciò:

- di avere pochi scatti: in questo modo si avrebbero pochi fasci, ma anche pochi bit, dunque sfasatori poco costosi;
- di avere molti scatti, in modo da avere molti fasci, dunque coprire praticamente qualsiasi angolo possibile, al costo di avere sfasatori più costosi.

La soluzione “pochi fasci” di sicuro non va bene: nel caso fosse necessario coprire gli angoli intermedi tra quelli a disposizione, non si potrebbe fare. Il parametro che permette di quantificare il numero di fasci necessari è la cosiddetta “intersezione tra i fasci”: ciascun fascio rappresenta sostanzialmente un lobo principale di un diagramma di irradiazione, ruotato di un un certo angolo; ovviamente non è necessario che, ogni qual volta un fascio si abbassi per esempio di 0,1 dB, ve ne sia già un altro pronto: è un’esagerazione! Una buona soluzione potrebbe essere quella di avere, come livello di intersezione tra i vari fasci, -3 dB: ogni qual volta un fascio scende di circa 3 dB, si ha un altro fascio, facendo scattare lo sfasatore.

Si supponga a questo punto che $d = \lambda/2$; la larghezza del fascio, come noto da formule precedenti, sarà circa:

$$\vartheta_{3\mathrm{dB}} \sim 0,88 \frac{\lambda}{L}$$

essendovi tapering, di solito si approssima a 1 il 0,88:

$$\vartheta_{\mathrm{3dB}} \sim \frac{\lambda}{L}$$

Consideriamo ora l'angolo di scansione; si sa che $\Delta\vartheta_{\mathrm{S}}$ è l'angolo tale per cui:

$$\sin\vartheta_{\mathrm{S}} = -\frac{\Phi}{kd}$$

quello che si può dire è che, differenziando, si può applicare la formula con un $\Delta\vartheta_{\mathrm{S}}$ e con un $\Delta\Phi$, che saranno angoli piccoli; il fatto che gli angoli sono piccoli permette di approssimare il seno appena scritto con il suo argomento, ottenendo:

$$|\Delta\vartheta_{\mathrm{S}}| = \frac{|\Delta\Phi|}{kd}$$

si sa che:

$$kd = \frac{2\pi d}{\lambda}$$

Invece,

$$|\Delta\Phi| = \frac{2\pi}{2^B}$$

dunque, si può scrivere che:

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta\vartheta_{\mathrm{S}}}\right| = \frac{2\pi}{2^B}\frac{\lambda}{2\pi d}$$

questo, per quanto riguarda un termine; per quanto riguarda l'altro termine, dato N il numero di elementi, si ha che:

$$\vartheta_{\mathrm{3dB}} = \frac{\lambda}{L}$$

dove L è la lunghezza dell'array, ed è dato da N volte d; si ha dunue:

$$\frac{\lambda}{2^B d} = \frac{\lambda}{Nd}$$

ciò permette di capire immediatamente che:

$$N = 2^B$$

è il valore che stiamo cercando.

Si consideri un esempio: per $G = 40$ dB, cosa si ha? Beh, supponendo di avere un'apertura circolare:

$$\vartheta_{\text{3dB}}^2 = \frac{30000}{G} \Longrightarrow \vartheta_{\text{3dB}} \sim 1,7^\circ$$

Quanti elementi avrà questo radiatore? Beh, volendo fare $1,7^\circ$ con un'apertura circolare per esempio, si ha che:

$$\vartheta_{\text{3dB,circolare}} \sim 60\frac{\lambda}{D}$$

dunque, si può vedere che:

$$\frac{D}{\lambda} \sim \frac{60}{\vartheta_{\text{3dB}}} \sim 35$$

Questa è la dimensione dell'apertura: approssimativamente 35 lunghezze d'onda di diametro. Volendo andare avanti col progetto, quanti elementi si devono mettere, se vogliamo fare in modo da non avere dei grating lobes?

Se si avesse una schiera broadside, basterebbe qualcosa più di un elemento ogni lunghezza d'onda: una quarantina di elementi potrebbe andare bene, per ogni dimensione; si farebbero delle celle un poco più piccole di una lunghezza d'onda. Volendo tuttavia coprire angoli fino a 45°, la situazione cambia: non siamo più solo in una situazione broadside.

Dovremo trovare la distanza massima per cui non si hanno grating lobes, utilizzando la formula:

$$\frac{d}{\lambda} < \frac{N-1}{N}\frac{1}{1+|\sin\vartheta_{\text{S}}|} \sim 0,6$$

Se si utilizzasse per esempio $d/\lambda = 0,55$, facendo un grigliato rettangolare con questo passo, si può evitare di avere dei grating lobes.

A questo punto, la domanda finale: quanti elementi servono? beh, prima di tutto, possiamo dire che, essendo l'area della circonferenza πR^2, dove R è il raggio, essendo qua il diametro 35 volte la circonferenza:

$$\left(\frac{35}{2}\lambda\right)^2 \pi = 962\lambda^2$$

dal momento che si han elementi ogni $0,55^2\lambda^2$:

$$\frac{962\lambda^2}{0,55^2\lambda^2 z} \sim 3180$$

ossia, si hanno 3180 elementi nell'array. In pratica, non è veramente detto che sia necessario metterne così tanti: esistono tecniche di array thinning che permettono di ridurne il numero. Si presti attenzione che N, quello per cui $N = 2^B$, è N in una sola direzione. Si può vedere che in una direzione N sarà (per esempio N_x):

$$N_x = \frac{35}{0,55} \sim 70$$

quello che conviene fare è scegliere potenze di 2, per avere facilitazioni nei conti; $N_x = 64$ è dunque una scelta intelligente (la potenza di due più vicina). Volendo calcolare il vero valore:

$$\frac{35}{64} = 0,546$$

questo permette di avere un'altra spaziatura, più giusta e che comunque rispetta anche il vincolo del grating lobe. Il numero di bit per fare la cosa è 6: $2^6 = 64$.

5.4.2 Sfasatori a circolatori (sfasatori in guida)

Quando si ha a che fare con potenze elevate o con frequenze elevate, è necessario ricorrere a un altro tipo di sfasatori, sicuramente più svantaggiosi rispetto ai precedenti per varie ragioni, ma necessari quando si ha a che fare per esempio con impulsi.

Gli sfasatori per le elevate potenze e frequenze sono quelli in guida d'onda, utilizzando i circolatori (guide d'onda con della ferrite dentro): a seconda di come la ferrite è polarizzata, il segnale circola in verso orario o antiorario.

A seconda di che verso ha nel circolatore, esso può o collegare alla linea principale o a un corto circuito collegato mediante un'altra linea, con una certa lunghezza $L_1 = \lambda/16$, $L_2 = \lambda/8$, $L_3 = \lambda/4$. Il concetto è simile a quello di prima: nel caso si abbia la circolazione oraria, il segnale entra, va alla linea dove c'è il corto, raggiunge il corto e torna indietro, quindi va al secondo circolatore e così via: a seconda di come è polarizzata la ferrite, si può o meno far fare il giro nella linea, come detto prima. La fisica è diversa, il concetto è esattamente lo stesso di prima.

Questo sistema sicuramente funziona, ma il suo enorme svantaggio è il consumo: al fine di polarizzare in modo idoneo la ferrite si deve consumare un'enormità di potenza, rendendo il sistema dunque funzionale ma solo ove strettamente necessario.

5.5 Schiere bidimensionali

Si vuole a questo punto affrontare l'ultimo argomento riguardante le schiere di antenne: le schiere di schiere, o schiere bidimensionali. Come mai si parla di schiere di schiere? Semplice: una schiera come questa:

Si può pensare sostanzialmente come una schiera composta da dei sub-arrays: ciascun elemento della schiera sull'asse x è una schiera. Dal momento che le tre schiere sono uguali tra loro, si può dire che si ha una schiera di "radiatori equivalenti" a loro volta dati da un'altra schiera.

Questo tipo di schiere si può anche trattare in un'altra maniera: data una schiera di $M \times N$ elementi, uniforme, si ha:

$$A = \sum a_{mn} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\underline{r}'_{mn}\cdot\hat{R}}$$

questa è, al solito, la forma discretizzata dell'integrale di irradiazione. $\underline{r}'_{mn}$ è il vettore che descrive ciascun elemento radiativo della schiera:

$$\underline{r}'_{mn} = (m-1)d_x\hat{\mathrm{x}} + (n-1)d_y\hat{\mathrm{y}}$$

sapendo che, dalla trasformazione in coordinate sferiche, si ha:

$$\hat{R} = \sin\vartheta\cos\varphi\hat{\mathrm{x}} + \sin\vartheta\sin\varphi\hat{\mathrm{y}} + \cos\vartheta\hat{\mathrm{z}}$$

si ha:

$$\underline{r}'_{mn}\cdot\hat{R} = \sin\vartheta\cos\varphi d_x(m-1) + \sin\vartheta\sin\varphi d_y(n-1)$$

dunque:

$$A = \sum_{n,m=1}^{N,M} a_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k(\sin\vartheta\cos\varphi d_x(m-1)+\sin\vartheta\sin\varphi d_y(n-1))}$$

si noti che, come si era visto nelle aperture:

$$\sin\vartheta\cos\varphi = u$$

$$\sin\vartheta\sin\varphi = v$$

si definisce dunque:

$$\psi_1 \triangleq kd_xu$$

$$\psi_2 \triangleq kd_yv$$

di fatto, dunque, si ottiene una doppia sommatoria:

$$A = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} a_{mn} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(m-1)\psi_1} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-1)\psi_2} =$$

normalizzando $a_{mn} = 1$ (schiera uniforme planare)

$$= \sum_{m=1}^{M} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(m-1)\psi_1} \sum_{n=1}^{N} a_{mn} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-1)\psi_2}$$

ossia,

$$= A_m A_n$$

si ha il prodotto di due fattori di schiera. Se la schiera è uniforme come visto, dunque, si avrà qualcosa del tipo:

$$A = \frac{\sin\left(M\frac{\psi_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_1}{2}\right)} \frac{\sin\left(N\frac{\psi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_2}{2}\right)} \frac{1}{MN}$$

Volendo disegnare le curve di livello, dunque, si ottiene sostanzialmente qualcosa di analogo all'apertura rettangolare.

Questo è sicuramente uno degli utilizzi più interessanti delle schiere di schiere: la realizzazioni di schiere planari. Si noti tuttavia che si continua a parlare di "schiere di schiere" come di una cosa concettualmente diversa dalla "schiera planare", e questo perchè di fatto non è detto che le schiere di schiere siano un modello esclusivamente utilizzato in quella direzione. Un'altra situazione in cui conviene fare uso delle schiere di schiere è il seguente:

Può capitare che gli elementi della schiera non siano equispaziati, ma mantengano una certa periodicità tra loro: potrebbero per esempio essere a due a due spaziati in modo diverso. Quello che si può fare è considerare una schiera di raggruppamenti a due di elementi. Questa è una situazione molto interessante, dal momento che per esempio potrebbe modellare una schiera di antenne patch, come una di queste:

Questo tipo di schiera è molto utilizzato, dal momento che, tra i vari vantaggi, ha anche quello di abbassare l'impedenza mostrata all'ingresso. Date distanze tra i vari elementi pari a $\lambda_\mathrm{g}/2$, l'impedenza di ingresso è sostanzialmente equivalente a quella degli slot nelle guide d'onda: si hanno varie impedenze in parallelo, dunque si fa la somma delle ammettenze; sommare ammettenze significa sostanzialmente dunque ridurre l'impedenza. La schiera in questo caso non è equispaziata dal momento che, in microstriscia, la velocità di propagazione è quella del patch, dunque la ε_eff subisce delle variazioni.

Quadrihelix reprise

Ora che abbiamo studiato le schiere planari, possiamo provare a rivisitare l'argomento "quadrihelix", provando a comprenderne meglio alcuni aspetti. Dati ψ_1 e ψ_2 come già definiti, la più facile delle schiere planari è la 2×2. I fattori di schiera, dunque, saranno i seguenti:

$$A_{\text{assiale}} = \cos\left(\frac{\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2}{2}\right)$$

Nel caso del modo ΔE_l, cosa si avrà? Qualcosa di questo genere:

In questo caso, è come avere quattro antenne orientate in questo modo: quelle superiori "+", quelle inferiori "-". Ciò permette di avere:

$$A_{\Delta E_l} = \cos\left(\frac{\psi_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\psi_2}{2}\right)$$

Infatti, dal momento che i coefficienti di alimentazione sono invertiti rispetto all'asse v, si ha che si devono sottrarre i coefficienti, ottenendo ciò al posto del coseno.

$$A_{\Delta A_z} = \sin\left(\frac{\psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2}{2}\right)$$

5.5.1 Antenne adattative

Un altro interessante aspetto delle schiere è quello delle "schiere adattative": **smart antennas**, ossia "antenne furbe", "antenne intelligenti". Queste antenne sono particolarmente interessanti dal momento che riescono ad autofocalizzare il fascio: puntare il fascio nella direzione da cui arriva il segnale.

Una schiera a scansione elettronica riesce, tramite un programma, a modificare automaticamente il fascio, ma seguendo un certo programma prefissato: a seconda dell'istante di tempo, si sa già in quale posizione l'antenna dovrà traslare il fascio. In questo caso, si ha qualcosa di molto più sagace: a seconda di da dove arriva il fascio, si effettua una autoscansione in quella direzione, senza avere programmi o altro.

Come si può realizzare una cosa di questo genere? Si consideri un sistema di questo tipo:

Questo è lo schema più semplice delle schiere autofocalizzanti: si ha il segnale che arriva da una certa direzione, con un certo ϑ'; arriverà un segnale V_1 su un'antenna V_2 sull'altra; la cosa interessante sta nel fatto che i due segnali non sono diversi in modulo, ma solo in fase, dal momento che arrivano da due percorsi diversi. Si può dire che:

$$V_2 = V_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$$

I due segnali alle due antenne arrivano dunque sfasati; quello che si deve fare, per massimizzare il segnale, è dunque rifasare il segnale, e questo si può fare mediante il sistema presentato: si può fare un confronto di fase tra le due antenne mediante un phase detector, e controllare lo sfasatore a monte dell'antenna in modo tale da massimizzare il segnale e "puntare le antenne verso il segnale".

Questo è fattibile dal punto di vista teorico, un po' meno dal punto di vista pratico: il segnale che arriva infatti è a radiofrequenza ed è molto basso, dunque questo schema patisce molto il rumore. Quello che si fa dunque è una conversione a frequenza intermedia: si prende la radiofrequenza, e su ciascuno degli elementi si effettua la conversione tramite un mixer, dunque si ha un oscillatore locale controllato in tensione che viene controllato in base alla fase del circuito; in questo modo si riesce a sincronizzare la fase di ogni segnale arrivato da ogni radiatore, e si riesce a fare in modo che tutte le uscite dai vari dispositivi siano in fase, dunque si sommino e abbiano il massimo di irradiazione.

Capitolo 6

Propagazione

6.1 Il problema della propagazione

Il problema che si intende studiare in questo capitolo è quello del collegamento punto-punto o punto-multipunto: quando si ha a che fare con una sorgente e con un punto di ricezione, cosa succede? Beh, in mezzo tra i due vi possono essere varie situazioni e vari elementi che possono portare a vari problemi: nello spazio libero, per esempio tra due satelliti nello spazio, basterebbe usare la formula di Friis, e avere così l'attenuazione totale; purtroppo non ci si trova quasi mai nello spazio libero, per varie ragioni: oltre al segnale diretto, si avrà l'atmosfera, la quale non è omogenea; non essendo essa omogenea, n sarà sicuramente diverso nei vari punti, dunque il "raggio", invece di essere rettilineo, è inclinato (generalmente verso il basso).

Si ha una situazione di questo genere, e vari tipi di contributi:

Vi sono vari contributi:

- un segnale diretto, ossia la cosiddetta "onda primaria", P;
- un contributo R, ossia la riflessione che si sul terreno;
- un contributo D, dovuto alla diffrazione: questa non è una riflessione, dal momento che deriva dalla diffrazione da un ostacolo a forma di spigolo, spigolo piuttosto vivo; in questa situazione, l'onda incidente viene diffratta in tutte le direzioni, e di tutti i raggi derivanti dallo scattering uno di questi andrà verso l'antenna;
- per frequenze più basse, il gas ionizzato ha un comportamento di tipo riflettente (all'incirca: se ne discuterà più in dettaglio); questo porta ad avere un'altra onda di tipo riflesso, ma molto più particolare: questo

contributo è detto S, ossia "skywave": onda di cielo; la riflessione, in questo caso, si ha fino a qualche decina di MHz.

- contributo di onda di terra, G (ground wave): questa è un'onda superficiale che si propaga nell'interfaccia tra terra e aria; essendo tuttavia un'onda superficiale, essa tende ad attenuarsi; questa sussiste solo a frequenze molto basse.

Esistono dunque cinque tipi di contributi costituenti il segnale in ricezione; analizziamoli uno a uno.

6.1.1 Onda Primaria

Quello dell'onda primaria è senza dubbio il contributo più semplice da calcolare: è infatti semplicemente necessario utilizzare la ben nota formula di Friis:

$$\frac{P_{\mathrm{R}}}{P_{\mathrm{T}}} = \frac{G_{\mathrm{T}} G_{\mathrm{R}} \lambda^2}{(4\pi R)^2}$$

Questa formula presenta alcune varianti: spesso viene rappresentata in decibel (dB), dal momento che le attenuazioni/potenze in gioco sono di solito molto elevate; ciò permette di ottenere valori più ragionevoli. Un inconveniente della formula scritta in questa forma è il già discusso fatto che sembra indicare il fatto che, aumentando la frequenza, aumenta anche l'attenuazione; per questo motivo spesso si trova scritta in termini di area: in questo modo si evidenzia il fatto che, a parità di area (parametro assolutamente costante) e all'aumentare della frequenza, si ha una riduzione dell'attenuazione.

6.1.2 Riflessione da terra piana

Studiamo a questo punto un secondo tipo di contributo, meno noto del precedente: un contributo di riflessione. Ciò si può schematizzare nel seguente modo:

Supponiamo di avere a che fare con una superficie piana e quasi perfettamente conduttrice, in modo da avere $\Gamma \sim 1$; in realtà il fatto che sia conduttrice non è fondamentale: il coefficiente di riflessione infatti tende a 1 quando l'angolo di incidenza tende a 90°, ossia per incidenza radente (si ricordi che l'angolo di incidenza viene preso a partire dalla normale al terreno, di conseguenza 90° significa sostanzialmente avere il raggio quasi parallelo al terreno). Questo, per i coefficienti di Fresnel:

Si hanno due casi: terreno umido (sopra), e secco (sotto): nel terreno umido la ε_{r} è maggiore, dunque si ha qualcosa di più umido (come una risaia) invece che più secco (come del cemento). Dal momento che le antenne saranno alte qualche decina di metri, e le distanze sono dell'ordine dei chilometri, l'incidenza è approssimativamente radente. Nel punto di ricezione si riceve dunque il campo diretto, ma anche questo contributo di riflessione; i due contributi tuttavia non sono in fase, dunque non si sa come i due contributi finiranno per combinarsi. La fase è proporzionale a $R_1 - R_2$, dove R_1 è il cammino diretto, e R_2 è il percorso dal trasmettitore, al punto di riflessione, all'antenna. Ciò che si può fare è considerare R_2 come il punto che collega l'immagine dell'antenna con il punto di ricezione. Usando il teorema di Pitagora con certe approssimazioni, si può vedere che:

$$R_1 = R_2 = \frac{2h_1h_2}{D}$$

Un altro modo per dimostrare ciò è quello di supporre che, grazie al fatto che le distanze sono molto maggiori delle altezze, R_1 e R_2 siano quasi paralleli. La differenza di cammino è sostanzialmente:

si ha:

$$R_2 - R_1 = 2h \sin \alpha$$

Alternativa è notare che:

$$R_1 = \sqrt{D^2 + (h_2 - h_1)^2} = D\sqrt{1 + \frac{(h_2 - h_1)^2}{D^2}}$$

$$R_2 = \sqrt{D^2 + (h_2 - h_1)^2} = D\sqrt{1 + \frac{(h_2 + h_1)^2}{D^2}}$$

Ossia, per quanto riguarda R_1 si ha come distanza da una parte D, distanza sul piano orizzontale, dall'altra la differenza delle due altezze da terra; dal momento che R_2 invece è l'immagine, si deve fare la somma; si trova, approssimando le due al termine di primo ordine:

$$R_1 - R_2 \sim D\left[\left(1 + \frac{(h_2 - h_1)^2}{D^2}\right) - \left(1 + \frac{(h_2 + h_1)^2}{D^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{2h_1h_2}{D}$$

Si può a questo punto studiare il campo totale come:

$$E_{\text{totale}} = E_{\text{primario}} + E_{\text{riflesso}} = E_{\text{primario}}\left(1 + \frac{E_{\text{riflesso}}}{E_{\text{primario}}}\right)$$

Si supponga a questo punto che $R_1 \sim R_2$; si ha che:

$$E_{\text{riflesso}} \sim E_{\text{primario}} \Gamma \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Delta}$$

dove $\Delta \triangleq R_1 - R_2$. Quanto vale il coefficiente di riflessione, Γ ? Beh, andando a vedere i grafici, $\Gamma = -1$: ampiezza 1, fase 180°. Possiamo dunque dire che:

$$\frac{E_{\text{riflesso}}}{E_{\text{primario}}} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Delta}$$

tornando all'espressione del campo totale:

$$T_{\text{totale}} = E_{\text{primario}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\Delta}{2}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\frac{\Delta}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\Delta}{2}} \right] =$$

$$= 2E_{\text{primario}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\frac{\Delta}{2}} \sin\left(k\frac{\Delta}{2}\right)$$

dove E_{primario} è quello che sostanzialmente si calcola mediante la formula di Friis. Questo è dunque il modulo del campo totale, date le ipotesi.

Se si ha a che fare con una sola antenna, e si vuole analizzare il campo in un generico punto dello spazio (senza avere una seconda antenna in funzione di ricevitore), si può usare la formula precedentemente dimostrata:

$$|\underline{E}| = 5,5\frac{\sqrt{P_{\mathrm{T}}G_{\mathrm{T}}}}{R}$$

questo $|\underline{E}|$ è semplicemente il campo primario di cui si parlava; dunque:

$$E_{\text{totale}} = 5,5\frac{\sqrt{P_{\mathrm{T}}G_{\mathrm{T}}}}{R} 2\sin\left(\frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda D}\right)$$

Si noti che a questo punto si ha una funzione seno; se le antenne sono abbastanza basse sul terreno e la distanza è grande, questo argomento è abbastanza piccolo; se l'argomento è piccolo, **cosa che richiede una verifica** (basta che sia 0,5), approssimiamo il seno con l'argomento, ottenendo:

$$2 \times 5,5\frac{\sqrt{P_{\mathrm{T}}G_{\mathrm{T}}}}{R}\frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda R}$$

Cosa ci dice ciò? Il campo decresce come la seconda potenza della distanza. Ciò sembrerebbe di fatto contro la conservazione dell'energia: come si era detto precedentemente, se il campo decresce con la prima potenza della distanza allora il teorema di Poynting garantisce la conservazione della potenza; in questo caso non si hanno 20 dB/dec, ma 40. L'attenuazione dovuta al terreno dunque è molto più significativa. Come mai? Ciò dipende sostanzialmente dal seno: il campo è sempre inversamente proporzionale alla distanza, ma l'interferenza tra campo primario e campo riflesso fa sì che al variare dell'elevazione il campo vari di intensità.

Scegliendo un valore idoneo di altezza si può però persino sfruttare la cosa, facendo in modo da avere interferenza costruttiva, facendo dunque sommare in fase i contributi di campo diretto e riflesso. Se c'è interferenza costruttiva, però, si può persino fare in modo da raddoppiare il campo, ottenendone un aumento di 6 dB. Si può vedere che:

- si ha un'interferenza costruttiva se si ha un massimo del seno:

$$\frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda R} = \frac{\pi}{2}$$

$$h_2 = \frac{\lambda R}{2h_1}$$

- si ha un'interferenza distruttiva se si ha uno zero del seno: argomento uguale a π.

$$h_2 = \frac{\lambda R}{h_1}$$

L'andamento del campo va sostanzialmente come il modulo del seno. Questo è un andamento teorico, ma abbastanza realistico, del campo al variare dell'altezza, a causa dell'effetto della riflessione da terra piana.

ILS

Il ILS, Instrumental Landing System, è lo strumento che si utilizza per far atterrare gli aerei a terra. Il concetto base è: si ha a che fare con un'antenna alta sul terreno, tipicamente un dipolo, sui 130 MHz, lunghezze d'onda intorno ai 2-3 metri. Quando si è vicini alla pista, si mette un dipolo orizzontale a una certa altezza, circa 6 metri (si consideri 6 metri per esempio); si avrà un'immagine rispetto al terreno bassa 6 metri, ottenendo dunque due antenne lontane 12 metri tra loro: una schiera. Il fattore di schiera di questa cosa va come il seno, dal momento che si hanno due elementi in opposizione di fase (due antenne in controfase, essendo esse una l'immagine dell'altra) dunque:

$$A = \sin\frac{\psi}{2}$$

dove

$$\psi = kd \sin \vartheta$$

$$d = 12\text{m}$$

$$\lambda = 2\text{m}$$

dunque:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ma io ho 6 λ di distanza, dunque questa struttura presenterà un mucchio di grating lobes. In questo caso però questo è voluto: non si vuole tanto avere un'antenna dove si ha informazione nei lobi, quanto un certo numero di zeri, dunque il diagramma a margherita è in effetti proprio quello che vogliamo:

$$\sin \vartheta_0 \sim \frac{\lambda}{d}$$

dunque

$$\vartheta_0 \sim 10^\circ$$

questo è il primo zero (a parte il primissimo). Quando il ricevitore a bordo dell'aereo vede che si ha uno zero in trasmissione, allora significa che l'aereo sta seguendo la giusta pendenza per atterrare. Il percorso in realtà non sarà rettilineo, bensì un poco ondulato, dal momento che si hanno effetti di diffrazione su questo diagramma di irradiazione, che "sporcano" un poco il diagramma di irradiazione.

A partire dalla formula di prima:

$$\frac{P_{\text{R}}}{P_{\text{T}}} = \frac{G_{\text{T}} G_{\text{R}} \lambda^2}{(4\pi R)^2}$$

cosa succede se c'è il terreno? Beh, si è detto che, approssimando seno e argomento:

$$\frac{E_{\text{totale}}}{E_{\text{primario}}} \sim 4\pi \frac{h_1 h_2}{\lambda R}$$

se nello spazio libero si ha ciò, come va $P_{\text{R}}/P_{\text{T}}$ sul terreno?

$$\frac{P_{\text{R}}}{P_{\text{T}}} \sim G_{\text{R}} G_{\text{T}} \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2 R^2} \left(\frac{4\pi h_1 h_2}{\lambda R} \right)^2 =$$

$$= G_{\mathrm{R}} G_{\mathrm{T}} \left(\frac{h_1 h_2}{R^2} \right)^2$$

ossia, si fa sì che la potenza decresca come R^4, con la quarta potenza della distanza. Questo è un modello approssimato, ma nella realtà va abbastanza bene: in modelli più sofisticati, tenendo conto della diffrazione, delle riflessioni non ideali e simili, si hanno attenuazioni come la terza / $3,5^{\circ}$ invece che quarta potenza (casi meno pessimistici).

A questo punto ci si potrebbe fare una domanda: sembrerebbe che, con antenna molto vicina al terreno, essa non possa funzionare; questo non è vero, ma il fatto non è prevedibile con questo modello: se l'antenna è molto vicina al terreno su esso si generano delle densità di corrente indotte che comunque permettono l'irradiazione. Questo fatto si può studiare introducendo l'altezza **effettiva** dell'antenna:

$$h_{\text{effettiva}} = \sqrt{h^2 + h_0^2}$$

dove h_0 è un termine ricavabile o mediante un grafico, o mediante una formula.

6.1.3 Attenuazione atmosferica - Troposcatter

Come noto, l'atmosfera è divisa in vari strati: lo strato più vicino alla terra è la troposfera, zona dove si ha molto più gas, dunque in cui l'interazione con le onde elettromagnetiche è maggiore. La troposfera tuttavia è sostanzialmente un mezzo non omogeneo, dal momento che a seconda dell'altezza che si considera si ha un diverso indice di rifrazione. Si hanno inoltre differenze rispetto alla frequenza:

l'attenuazione è abbastanza bassa, a meno che non si finisca in una finestra di assorbimento, dovuta al vapore d'acqua, e poi all'ossigeno.

Il troposcatter è un fenomeno per cui esistono zone di troposfera non omogenee, quali nuvole di gas più dense o di diverse caratteristiche elettriche, ottenendo da esse un effetto di diffrazione del segnale. Questa diffrazione permette di far ricevere il segnale, con fortissime attenuazioni, a grande distanza. La tipica applicazioni per questo genere di fenomeno sono i ponti radio in zone molto desertiche: non si mettono ripetitori ogni tot chilometri, ma troposcatter. Servono antenne con guadagno elevatissimo, dunque molto grandi.

Un altro fenomeno è il fatto che l'indice di rifrazione non è, come già detto, costante in altezza. Un modello semplificato per la cosa è per esempio basabile su un esempio di terra piana: se si va a riportare l'indice di rifrazione modificato in funzione della quota, si ha:

l'andamento è iperbolico. Cosa succede quando si ha il terreno, e si invia un certo numero di raggi leggermente inclinati verso l'alto? Beh, come già detto in precedenza, qualcosa del genere:

Si può "quantizzare" a diverse altezze l'indice di rifrazione; dal momento che si passa da mezzi più densi a mezzi meno densi, i raggi tendono a deviarsi verso il basso, e ciò ci piace: se si sfrutta la cosa, si può utilizzare l'effetto dell'abbassamento dell'indice di rifrazione per far "saltare gli ostacoli": si può sfruttare il fatto che i raggi si incurvano per lanciare raggi con una opportuna pendenza, quindi farli incurvare verso gli obiettivi, facendo saltare gli ostacoli: si può andare oltre l'orizzonte ottico, l'orizzonte visivo. Si può, in definitiva, scavalcare la curvatura terrestre.

I calcoli di solito, addirittura, si fanno considerando (quando si ha un'atmosfera di questo genere) considerando il raggio terrestre maggiore rispetto a quello che effettivamente si ha: se il raggio aumenta, la sfera diventa "più piana", dunque quello che si fa è considerare la terra "meno incurvata di quello che è", ottenendo dunque un orizzonte maggiore. Si ricordi che l'orizzonte si può determinare come:

$$\varrho = \sqrt{2h}R$$

dove R è il raggio terrestre, 6380 km, e h l'altezza dell'antenna. La vista elettromagnetica, invece di usare R, usa KR, dove $K = 4/3$ di solito: tiene conto che si può arrivare più distanti. In questo modo si può tenere conto del fatto che la Terra si vede come "un po' più piatta", e ciò potrebbe anche variare l'altezza degli ostacoli, a nostro favore:

se si avesse un ostacolo di questo tipo, con il fattore correttivo probabilmente si può fare in modo da considerare "più basso" l'ostacolo di quello che sembrerebbe, dalla vista ottica.

6.1.4 Propagazione in un gas ionizzato

Si è detto precedentemente che la ionosfera ha un comportamento di tipo riflettente, rispetto alle onde che arrivano dal trasmettitore. Per capire ciò, bisogna sostanzialmente porsi un'altra domanda: cosa capita, quando si illumina un gas ionizzato?

Cerchiamo di capire cosa sia un gas ionizzato: in un gas, quando si hanno delle molecole eccitate, per esempio da fotoni altamente energetici provenienti per esempio dal Sole, esse possono separarsi in elettroni e ioni. Uno ione ha sostanzialmente la carica dell'elettrone, di segno opposto, ma con una massa molto più grande. Volendo utilizzare un'interpretazione classica dell'elettrostatica, il campo elettrico, per la forza di Newton, dovrebbe attribuire la stessa forza $\underline{F}$ sia alla carica positiva, sia alla carica negativa, ma la carica positiva ha una massa molto maggiore: la forza è uguale, ma la massa dello ione ha un'inerzia molto maggiore.

Consideriamo, nella nostra analisi, esclusivamente gli elettroni; possiamo fare il bilanciamento delle forze:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -e\underline{\mathcal{E}} - \overline{v}m\nu$$

dove ν è la frequenza di collisione della particella: non è che si abbia un solo urto ma, a causa del moto di agitazione termica, si hanno moltissimi urti. La frequenza degli urti è un parametro molto importante e che verrà analizzato in seguito.

Per risolvere l'equazione differenziale, effettuiamo una conversione nel regime armonico, ottenendo:

$$(\mathrm{j}\omega + \nu)\, mV(\omega) = -e\underline{E}$$

l'elettrone che si muove però dà origine a una corrente; questa corrente non è sicuramente una corrente di conduzione o di perdita, dal momento che non si è in un mezzo materiale vero e proprio, ma nello spazio; questa corrente è detta "corrente di convezione". Essa è:

$$\underline{J} = e\overline{v}$$

ossia, generata da una certa carica che si muove con velocità $\overline{v}$. Se si hanno N elettroni:

$$\underline{J} = Ne\overline{v}$$

volendo effettuare un'analisi dimensionale della formula, si ha:

$$[N] = \mathrm{elettroni/m^2}$$

$$[e] = \mathrm{C}$$

$$[\overline{v}] = \mathrm{m/s}$$

dunque:

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = \mathrm{A}$$

e quindi

$$[\underline{J}] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

Una volta studiata questa espressione, andiamo a sostituirla nella seconda equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \underline{H} = \mathrm{j}\omega\varepsilon + \underline{J}$$

si ha:

$$\underline{J} = Ne\overline{v}$$

$$\overline{v} \propto \underline{E}$$

si finisce per ottenere:

$$\nabla \times \underline{H} = \left[\mathrm{j}\omega\varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\mathrm{j}\omega + \nu)}\right]\underline{E}$$

a questo punto, si vuole ottenere un'espressione di $\tilde{\varepsilon}$, in modo da avere una equazione nella forma:

$$\nabla \times \underline{H} = \mathrm{j}\omega\tilde{\varepsilon}\underline{E}$$

in questo caso:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \mathrm{j}\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega(\omega - \mathrm{j}\nu)}$$

dove

$$\omega_\mathrm{p}^2 \triangleq \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$$

dunque

$$\varepsilon_\mathrm{r} = 1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega(\omega - \mathrm{j}\nu)}$$

ω_p è detta "frequenza del plasma". Come si comporta questa espressione? Beh, essa è piuttosto complicata, dal momento che vi sono due parametri variabili: ω e ν. Si ipotizzi, per incominciare, che $\nu \ll \omega$: in questo modo, se ν è piccolo, si ha a che fare con un **plasma freddo**. In questo caso.

$$\varepsilon_{\mathrm{r}} \sim 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}$$

sapendo l'espressione di ω_{p}, sostituendola e sostituendo i valori delle varie constanti, si trova che:

$$f_{\mathrm{p}} = \frac{\omega_{\mathrm{p}}}{2\pi} = 9\sqrt{N}$$

N normalmente non si sa, se non per stima: N è infatti il numero di cariche, e dipende dal Sole, dunque per esempio dall'ora del giorno, dalle stagioni. Un numero medio potrebbe essere $N \sim 10^{10}$, ma non è assolutamente sensato fare questa supposizione, se non per avere una stima dell'ordine di grandezza:

$$f_{\mathrm{p}} \sim 9\sqrt{10^{10}} = 900\mathrm{MHz}$$

in realtà, questa frequenza è dell'ordine di pochi MHz.

Cosa capita, alla frequenza del plasma?

- per ω molto grandi, il plasma sostanzialmente si comporta come lo spazio libero;
- per ω basse, la frazione decresce, ε_{r} diminuisce fino a diventare negativa, e quindi si trova una k che:

  $$k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = k_0\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$$

  ossia, che diventa puramente immaginaria.

Questo dà vita a un'onda evanescente. Al di sotto della frequenza critica nel gas ionizzato non c'è propagazione, ma solo quest'onda. Quanto sarà il coefficiente di riflessione? Beh, è noto che l'impedenza caratteristica, in un mezzo, dipende da k. Dunque:

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

dove le Z_i son le impedenze dei mezzi, ma, se uno dei due è immaginario, vengono fuori due numeri complessi coniugati a numeratore e a denominatore e il modulo viene unitario: si ha una riflessione totale: la ionosfera funzione come uno specchio riflettente.

La ionosfera in realtà però è anche influenzata dalla presenza del campo magnetico terrestre, dunque presenta anisotropia: la ε in realtà sarà non scalare, ma diadica: $\underline{\underline{\varepsilon}}$, dunque le onde nella ionosfera che si avranno in pratica saranno 2: un'onda detta "ordinaria", e una detta "straordinaria". Ciò genera interferenze, tipo fading.

Siccome la ionosfera non è un passaggio "brusco", non è corretto dire che c'è una riflessione totale di tipo brusco: si ha una crescita della ionizzazione, al variare dell'altezza, dal momento che cresce N, dunque cresce ω_{p} al variare dell'altitudine, il raggio quindi entra ed esce dalla ionosfera. Esistono vari strati di ionosfera, che dipendono dunque dall'altitudine:

La radiazione solare arriva dall'alto, e in alto trova poche molecole; il fatto che vi siano poche molecole implica che esse possono essere tutte divise, generando ioni, senza però che vi sia una probabilità elevata di ricombinazione, dal momento che, essendovi poche molecole, esse tendono a "non ritrovarsi facilmente tra loro". Andando in giù la radiazione solare interagisce con le molecole, venendo assorbita; la percentuale di molecole ionizzate si riduce, dal momento che si ha sempre più assorbimento della radiazione.

Si arriva ad introdurre tre tipi di strati: D, E, F. Lo strato D è quello più in basso, ed è quello più complicato da studiare, dal momento che in esso le collisioni sono molto frequenti: $\nu \sim \omega$. Questa è la situazione di "plasma caldo", mentre E e F sono abbastanza freddi. Questo strato D sostanzialmente c'è solo di giorno: di notte si hanno meno particelle ionizzate, dal momento che non c'è il Sole, quindi non si ha più questo strato.

Precedentemente si è scritto che:

$$\varepsilon_{\mathrm{r,freddo}} = 1 - \left(\frac{\omega_{\mathrm{p}}}{\omega}\right)^2$$

$$\varepsilon_{\mathrm{r,caldo}} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}}{\omega(\omega - \mathrm{j}\nu)}$$

nel caso $\omega < \nu$, si ha:

$$\varepsilon_{\mathrm{r,caldo}} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{-\mathrm{j}\omega\nu}$$

facendo la radice di ciò, si vede che si ha una situazione ben diversa dal plasma freddo: nel plasma freddo infatti si avevano o attenuazione o propagazione, qua invece si ha sia attenuazione sia propagazione, dal momento che k è un numero complesso, non puramente reale o puramente immaginario: questo è quello che capita nello strato D. Esso dunque, più che riflettere l'onda, la attenua.

Al variare della ionosfera, l'andamento è questo:

Schema di propagazione della ionosfera

L'incidenza sulla ionosfera di sicuro non sarà ad angolo retto: non è detto che l'incidenza sia normale. Si analizzi uno schema di questo tipo:

Ciascuna costante di propagazione $\underline{k}$ ha due componenti: tangenziale e normale; per quanto riguarda il vuoto, il mezzo 0:

$$k_{\mathrm{t},0} = k_0 \sin \vartheta_{\mathrm{i}}$$

$$k_{z,0} = k_0 \cos \vartheta_{\mathrm{i}}$$

Cosa succede alla superficie di discontinuità? Devono valere le condizioni al contorno che garantiscono la continuità delle soluzioni delle equazioni di Maxwell, ed esse richiedono che:

$$k_{\mathrm{t},0} = k_{\mathrm{t},1}$$

A questo punto, andiamo a ricercare la condizione critica, ossia quella per cui non si ha propagazione:

$$k_{z,1} = 0$$

Ciò dice che:

$$k_{\mathrm{t},0} = k_{\mathrm{t},1} = k_1$$

infatti, se $k_{z,1} = 0$, si ha che la costante totale della ionosfera coincide con quella trasversa del vuoto:

$$k_0 \sin \vartheta_{\mathrm{i}} = k_0 \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}}$$

elevo al quadrato:

$$\sin^2 \vartheta_{\mathrm{i}} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}$$

dunque:

$$\left(\frac{\omega_{\mathrm{p}}}{\omega}\right)^2 = 1 - \sin^2 \vartheta_{\mathrm{i}} = \cos^2 \vartheta_{\mathrm{i}}$$

quindi:

$$\omega = \omega_{\mathrm{p}}\, sec\, \vartheta_{\mathrm{i}}$$

questa è la frequenza critica che si ha nel caso di incidenza obliqua sulla ionosfera; come si può vedere, essa è sicuramente maggiore di quella normale;

per questo motivo i radioamatori tendono a usare frequenze di 10, 20, 30 MHz per comunicare: la frequenza è maggiore.

Si noti che non tutti i punti sono raggiungibili mediante ionosfera o altri metodi: se infatti si intende raggiungere un punto a media distanza (più vicino dell'uso normale della ionosfera, più lontano di quello che possano raggiungere le onde di terra), si dovrebbe incidere con un angolo tale per cui la frequenza utilizzabile massima sarebbe troppo bassa, troppo poco corretta dal fattore "secante", ottenendo di fatto un raggio che penetra la ionosfera. Se invece le distanze sono molto brevi, si può arrivare con l'onda di terra, quindi con un'onda superficiale.

Si parla di MUF, di Maximum Usable Frequency, ossia "massima frequenza utilizzabile": se si ha una frequenza troppo alta, il segnale "fora" la ionosfera. Spesso i sistemi basati sulla propagazione su ionosfera, cambiano frequenza a seconda del giorno, in modo da poter usare la riflessione da ionosfera con qualsiasi strato, qualsiasi situazione.

6.1.5 Onda di terra

Si devono utilizzare, per studiare queste strutture, dei grafici di progetto: per esempio ne sono stati forniti per acqua di mare e terreno normale, moderatamente conduttore. Al crescere della distanza si ha una fortissima attenuazione dell'onda di terra, che continua ad aumentare.

Questi grafici rappresentano il valore del campo elettrico con 1 kW di potenza fornita a un monopolo messo a terra (non si può che avere monopoli, dal momento che le frequenze in gioco sono molto basse e dunque le antenne risulterebbero essere esageratamente lunghe).

Se il monopolo è in alto, si ha un guadagno rispetto all'altezza; i due grafici sono nelle stesse situazioni di prima.

6.1.6 Collegamento su terra sferica

Se si ha una sfera, da qualche metro di diametro, e si hanno due antenne non in vista ottica, di sicuro non vi saranno nè l'onda diretta nè l'onda riflessa, nè contributi di diffrazione (se non quelli della superficie sferica). Se la sfera non è metallica, il problema è complicato, dal momento che kR (il k moltiplicato per il raggio terrestre) è molto grande, dunque si hanno molti modi sferici da utilizzare per fare lo sviluppo della diffrazione.

Ciò che si può fare nella pratica è tenere conto dell'effetto di diffrazione della sfera, introducendo un innalzamento del punto di riflessione; per altezze basse dell'antenna sul terreno, dunque, si può usare il seguente grafico di progetto:

questo grafico fornisce il valore di attenuazione aggiuntiva rispetto alla terra piana, da terra sferica. Prima di tutto si sceglie la frequenza, la polarizzazione, e il tipo di terreno (scala A); si può poi tenere alla fine conto del fattore correttivo $K = 4/3$.

Per altezze basse questo grafico va bene; se le altezze sono elevate, è necessario dividere in tre parti la tratta, tenendo conto del fatto che, se siamo oltre l'orizzonte, si avranno tre tratte: dalla prima antenna al suo orizzonte, dalla seconda antenna al suo orizzonte, e quindi la tratta intermedia. Si deve determinare la lunghezza delle tre tratte, e si sommano.

6.2 Ellissoidi di Fresnel

Cosa succede quando siamo in vista ottica? Beh, supponendo di essere in uno spazio non libero, per esempio in una città, e di voler collegare due edifici in vista ottica: ciò non è sufficiente, dal momento che ci possono essere delle perdite, delle attenuazioni aggiuntive, che si possono quantificare e osservare mediante gli ellissoidi di Fresnel.

Gli ellissoidi di Fresnel sono i luoghi dei punti per cui le somme delle distanze dai fuochi è uguale alla distanza tra i fuochi, più multipli di $\lambda/2$: luoghi dei punti che differiscono da quelli diretto per multipli di $\lambda/2$:

$$R_1 + R - 2 - D = m\lambda/2$$

A cosa servono? essi servono per determinare l'importanza di un oggetto diffrangente rispetto al collegamento radio: se l'oggetto diffrangente si trova all'interno del primo ellissoide di Fresnel, quello per $m = 1$, allora vi sono dei problemi, dal momento che la diffrazione dà un certo contributo.

Determiniamo il raggio degli ellissoidi di Fresnel:

I raggi massimi, b, sono, supponendo di essere nel punto di simmetria, ciò: b è il cateto di un triangolo rettangolo, $D/2$ l'altro cateto; dunque, l'ipotenusa, che sarà metà del cammino ottico con $\lambda/2$ di sfasamento, sarà:

$$\left(\frac{D}{2} + \frac{\lambda}{4}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + b^2$$

sviluppando e risolvendo rispetto a b, dal momento che $\lambda^2 \sim 0$, si ha:

$$b^2 = \frac{\lambda D}{4} \Longrightarrow b = \frac{\sqrt{\lambda D}}{4}$$

Il primo ellissoide di Fresnel serve a capire se l'ostacolo perturba o meno la comunicazione. Come mai?

Data un'antenna trasmittente, una ricevente e in mezzo una lastra metallica, cosa capita? Se fossimo in termini ottici, questa lastra metallica, se si ha vista ottica, non dà fastidio; in pratica, se la lastra metallica va a finire nel primo ellissoide di Fresnel, in termini elettromagnetici dà una certa attenuazione; quando l'ostacolo è esattamente sulla congiungente tra le due antenne, si ha un'attenuazione del segnale di 6 dB rispetto alla situazione nominale. Ovviamente non si ha un gradino: si ha un'attenuazione graduale, e questo è il livello.

Volendo disegnare con x_0 la posizione sull'asse x dell'ostacolo, si ha il seguente andamento:

Il campo totale al variare di x_0, ha un comportamento particolare: per x_0 negativo c'è vista ottica, per x_0 positivo c'è vista ottica, ma ciò è interessante fino a un certo punto: in termini ottici sembrerebbe di avere uno step, un gradino, ma elettromagneticamente parlando non si ha ciò: si ha, per $x_0 = 0$, un campo ridotto di 6 dB; quando poi $x_0 > 0$ si ha una certa attenuazione, e quando $x_0 < 0$ il campo tende a 1, ma con delle oscillazioni. La pendenza dipende dalla frequenza: se fossimo nell'ottica vedremmo uno step, ma nei campi elettromagnetici delle frequenze che utilizziamo si ha un andamento più graduale rispetto a quello ottico; tanto maggiore sarà la frequenza, tanto più ripida sarà la zona di transizione.

Come mai si hanno solo 6 dB in meno, se lo schermo è sulla congiungente?

Date due sorgenti, nello spazio libero, una trasmettente e una ricevente, per calcolare il campo data la potenza trasmessa nel punto di ricezione basta usare la formula di Friis; in realtà, si può fare anche con il teorema di equivalenza: si consideri una superficie sulla quale applicare il teorema di equivalenza, chiudendola all'infinito e così via. Per il teorema di equivalenza, si ha (considerando un problema unidimensionale) che:

$$E(P) \propto \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\text{apertura}} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\varrho}}{R} \mathrm{d}A$$

Si immagini ora di mettere, su questa superficie, uno schermo, esattamente a metà del piano; il fatto di avere questo schermo introduce un annullamento del campo per esattamente metà della superficie, rendendo gli estremi di integrazione per cui effettivamente si ha un contributo solo da $[0, +\infty)$, essendo per ipotesi l'illuminazione sul piano al quale si è applicato il teorema di equivalenza simmetrica. Avendo dimezzato gli estremi di integrazione e avendo le simmetrie, si ha esattamente la metà: perdiamo 6 dB.

Come mai ci sono le oscillazioni? Come mai ci si ferma alla prima zona di Fresnel? Si può dimostrare a partire dal metodo a fase stazionaria: i maggiori contributi dell'integrale sono quelli per cui la fase è stazionaria.

L'intervallo per cui la fase è stazionaria è proprio la prima zona di Fresnel: se si ha un ostacolo lì, si introduce una modifica nella zona in cui si ha la fase stazionaria, dunque la zona che dà un maggiore contributo all'integrale per il calcolo del campo irradiato. Le oscillazioni sono dovute all'integrazione dei punti a fase stazionaria del secondo ordine, che possono essere interpretati come la diffrazione ai bordi.

6.2.1 Diffrazione da spigolo vivo

Esistono dei nomogrammi per valutare l'entità dell'errore da diffrazione da spigolo vivo:

Come si può vedere, le perdite tendono asintoticamente a 6 dB. d_1 è la grandezza più importante: la distanza minore tra l'ostacolo e una delle due antenne. Si ha poi la distanza rispetto alla congiungente dell'ostacolo, si uniscono le righe e così si trova il valore di attenuazione che dipende dal fatto che H (il nostro x_0) sia positivo o negativo.

Esistono grafici in grado di tenere conto sia della diffrazione da spigolo vivo, sia della diffrazione da terra sferica:

In questo grafico si può vedere che il parametro fondamentale è il rapporto tra la clearance (lo spazio libero) e la prima zona di Fresnel. H in questo caso è la clearance, dunque maggiore esso è, minori saranno gli effetti. La curva poco oscillante è quella della diffrazione, quella molto oscillante è quella della terra piana: se la differenza di cammino diventa significativa tra i contributi, si ha una forte interferenza.

Nella pratica, cosa si fa? Data una configurazione altimetrica, quello che si fa è, a partire da essa, calcolare la diffrazione per i vari contributi; bisogna tenere conto di eventuali diffrazioni multiple. Tutti questi grafici derivano dallo studio della GTD: Teoria Geometrica della Diffrazione.

6.2.2 Calcolo della copertura

Come si fa, nella pratica, per pianificare un sistema di radiodiffusione su un terreno reale? Esistono degli standard della ITU (International Telecommunication Union), che han prodotto normative e grafici che permettono di determinare il valore del campo in determinate configurazioni altimetriche di terreno.

Questi indicano, in banda VHF, il campo (con 1 kW di potenza irradiata) al variare dell'altezza dell'antenna trasmittente e con diversi profili altimetrici. Fondamentale è determinare il Δh, ossia il "ripple" del profilo altimetrico (che in realtà è il "ripple" escludendo il 10% dei valori più bassi e il 10 % dei valori più alti, dei punti che si hanno a disposizione per la descrizione del profilo). Ovviamente, maggiore è il Δh, peggio è per noi, dal momento che si avranno più ostacoli, più alti. Il valore medio del campo è ricavabile per un valore standard di Δh; in ascisse si han le distanze, in ordinate l'altezza dell'antenna trasmittente. L'antenna ricevente di solito è a un'altezza fissa, 10 metri.

Si noti che questi grafici non danno il valore esatto, ma il valore probabile: dovendo calcolare il campo elettrico in un certo punto, dipende dove ci si trova, nel profilo: il grafico dà il campo per il 50 % del tempo e il 50 % delle posizioni. 50 % del tempo dal momento che i collegamenti radio dipendono anche dal tempo (clima, terreno umido/asciutto, ora del giorno).

Se variano le caratteristiche, per esempio il Δh, ci sono dei fattori correttivi: volendo invece che il 50 % il 70 %, si possono usare dei grafici dei fattori correttivi:

Volendo il 90 % dei punti, si avrà un livello minore rispetto ad altro: l'andamento del campo nei vari punti ha un andamento gaussiano, dunque al fine di avere una garanzia del campo sul 90 % siamo sulla coda della gaussiana, nonchè sulla coda del suo integrale, della sua cumulativa: per avere il 70 % dei punti in ricezione si avrà sicuramente a che fare con un livello di campo garantito molto inferiore. Il livello di campo, aumentando i punti, sarà inferiore.

Capitolo 7

Misure su antenne

Verranno realizzati diversi tipi di misure sulle antenne: al fine di caratterizzare un'antenna, infatti, è necessario conoscere quantomeno cinque grandezze fondamentali:

- adattamento (impedenza);
- guadagno massimo;
- direttività al variare dell'angolo;
- polarizzazione;
- fase.

Ovviamente, un'antenna è quasi sempre realizzata per l'irradiazione nello spazio libero, dunque per l'irradiazione a distanze grandi (quantomeno rispetto alla lunghezza d'onda); i test per un'antenna dunque di solito andranno fatti in maniera da simulare questo tipo di comportamento: se qualcosa reagisce all'antenna allora non si ha l'ipotesi di campo lontano, e saltano le condizioni idealmente "nominali" per i test, in modo da ottenere dunque un test non realistico rispetto all'uso "sul campo" del radiatore.

Le varie misure, dunque, andranno effettuate in modo da rispettare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} R > \frac{2D^2}{\lambda} \\ R \gg \lambda \end{cases}$$

Questo, quantomeno, dovrà essere simulato.

Altra condizione che spesso si richiede, è quella secondo cui non si devono avere distorsioni del campo: l'antenna deve essere in un ambiente dunque libero da riflessioni, illuminato da un'onda piana uniforme.

7.1 Misura di impedenza/adattamento

Per effettuare una misura di impedenza ad alte frequenze, il metodo più semplice potrebbe essere quello di utilizzare un analizzatore di reti, o una linea a fessure; se le frequenze fossero molto basse, invece, si potrebbe ricorrere a ponti.

Quando si parla di misure di impedenza bisogna tuttavia tenere conto degli effetti del campo di misura: il fatto di avere un campo di misura finito e piccolo comporta avere delle riflessioni che tornano all'antenna stessa, facendo dunque tornare alla guida della potenza: questo coincide con l'avere del disadattamento.

Per minimizzare gli effetti del campo di misura, cosa si deve fare? Cerchiamo di modellizzare il problema:

se si ha una parete, l'antenna irradia verso la parete con una funzione di direttività $g(\vartheta)$; se la parete è metallica, quello che si può fare è sostituirla con l'immagine. Questo permette di determinare la reazione della parete sull'antenna considerandola pari all'irradiazione dell'antenna immagine sull'antenna in prova; si trova:

$$|\Gamma_{\mathrm{S}}|^2 = \frac{P_{\mathrm{R}}}{P_{\mathrm{T}}} = \frac{G^2(\vartheta)\lambda^2}{(4\pi(2h))^2}$$

Questo è il modulo quadro del coefficiente di riflessione; si ottiene:

$$|\Gamma_{\mathrm{S}}| = \frac{G(\vartheta)\lambda}{8\pi h}$$

Questo significa che, oltre al Γ_0 "proprio" dell'antenna, ossia il disadattamento con il circuito di motivazione puramente "circuitale", si ha il Γ_{S}, ossia il disadattamento "da riflessione con la parete". Si ha dunque:

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_{\mathrm{S}}$$

questo si comporta in questa maniera:

Problema: noi, di fatto, non conosciamo la fase di Γ_{S}, dal momento che dipende dalla parete, dall'angolo, e ogni volta che si sposta l'antenna dalla posizione originale anche di poco, la fase subisce delle variazioni importanti. Come si può dunque fare per realizzare la misura, eliminando l'importanza di Γ_{S} ? Presentiamo alcune soluzioni.

- usando un h molto grande; non è detto che se ne abbia la possibilità, dal momento che spesso le misure si fanno su di uno spazio limitato;

- usando una $g(\vartheta)$ molto piccola; questo non significa avere poco guadagno, ma usare una porzione bassa del diagramma di irradiazione, ossia puntare un punto poco irradiante dell'antenna, vicino allo zero;

- variando la posizione dell'antenna di proposito, facendo tre misure, in modo da avere tre variazioni di Γ_S: tre misure permettono di identificare il cerchio, dunque si può identificare il contributo di Γ_S: il centro del cerchio sarà infatti Γ_0, e questo sarà il coefficiente di disadattamento "circuitale";

- effettuando un filtraggio nel dominio del tempo.

L'ultimo punto richiede una spiegazione dettagliata. Le misure che noi facciamo sono di fasori, dunque nel dominio della frequenza; a partire dunque da una misura su una ampia banda di frequenza di Γ. Se si prende questo $\Gamma(\omega)$, rapporto tra onda incidente e riflessa in ω, se si fa l'antitrasformata di Fourier si trova la risposta del sistema nel dominio del tempo: la risposta all'impulso del sistema. Si avrà qualcosa di questo tipo:

Questa è la risposta in riflessione all'impulso. Se si ha una situazione come quella illustrata, si avran due tipi di contributi: alcuni echi derivano dalle risposte "interne" all'antenna, i punti di discontinuità interni, le riflessioni interne; altri punti, evidentemente separati temporalmente dagli altri, saranno quelli legati agli echi che arrivano dal muro:

se infatti le dimensioni dell'antenna sono di qualche centimetro, rispetto al metro saranno nell'ordine dei metri, dunque sensibilmente diversi, e con tempistiche diverse; quello che si può dunque fare è finestrare il comportamento del segnale associato alle sole riflessioni interne, trasformarlo secondo Fourier, e trovare qualcosa del tipo

Questo è il solo Γ_0.

Si può vedere se le pareti hanno effetto in un modo piuttosto semplice: se, misurando Γ; si vede che ruotando o muovendo l'antenna esso non cambia, allora vuol dire che siamo in condizione di far-field.

7.2 Misura del diagramma di irradiazione

Come al solito, abbiamo bisogno di misurare sotto alcune condizioni ben precise:

- condizione di campo lontano;

- evitare di avere riflessioni;

- ipotesi di campo uniforme: il campo deve essere uniforme poichè ci serve conoscere il rapporto tra campo incidente e potenza ricevuta, dunque non sapendo quant'è il campo incidente è impossibile determinare i vari parametri d'antenna, come altezza efficace e area equivalente

Le riflessioni sono un problema: se si hanno infatti campi riflessi, si hanno forti oscillazioni del campo, che provocano effetti di uniformità. La situazione di misura è la seguente:

Si ha a che fare con una generica antenna (disegnata come paraboloide ma non è detto che lo sia: potrebbe essere anche un dipolo o altro), e con un'antenna di prova, che deve ricevere quello che la "parabola" invia: questo non è un feed, ma un ricevitore. Risulta essere importante la definizione dell'errore di fase: se si è a una distanza sufficiente dall'apertura i contributi sono in fase, altrimenti hanno un errore che va da 0 fino a $k\delta$; δ è l'errore di fase rispetto al centro, e serve che, per avere una buona misura, $\delta \sim \lambda/16$, il che è circa pari a 22°. Si ottiene, per avere ciò, la solita condizione di campo lontano, $2D^2/\lambda$. Di solito tuttavia come già detto si fa in modo da avere $R \gg \lambda$.

Come si fanno di solito le misure? Dato il disegno prima visto, quello che di solito si fa è tenere fissa l'antenna-sonda, facendo girare l'altra attorno all'asse verticale; in questo modo si effettua la misura.

Le antenne vanno posizionate a una certa altezza; qual è l'altezza h rispetto al suolo alla quale bisogna mettere l'antenna? Si immagini di conoscere, per una qualche stima teorica, le caratteristiche approssimate di irradiazione dell'AUT (Antenna Under Test); noto ciò, l'idea è quella di fare in modo da posizionare l'antenna ad un'altezza tale per cui il campo riflesso dal terreno sia dei lobi secondari o, ancora meglio, degli zeri; si chiede dunque che l'angolo sia maggiore dell'angolo dello zero, ϑ_0:

$$\vartheta > \vartheta_0, \quad \vartheta_0 \sim \frac{\lambda}{D}$$

dove λ/D è la posizione del primo zero, almeno in teoria (in prima approssimazione); dunque:

$$\vartheta = arctan\left(\frac{h}{\frac{R}{2}}\right) = arctan\left(\frac{2h}{R}\right)$$

approssimando le funzioni con gli argomenti:

$$\frac{2h}{R} \gg \frac{\lambda}{D} \Longrightarrow h > \frac{\lambda R}{2D}$$

questo è un procedimento approssimato ma comunque funzionante.

Torniamo ancora un momento sull'uniformità del campo: la disuniformità del campo può nascere o dall'onda riflessa o dal fatto che l'antenna è cosí direttiva che il diagramma di irradiazione non è uniforme. Se la condizione di campo lontano è soddisfatta, il problema non sussiste, e di sicuro non si avrà interferenza nata dalla riflessione del terreno, ma questo solo se l'antenna è direttiva. Non è tuttavia detto che l'antenna sia direttiva: se l'antenna in prova invece che essere una parabola è un dipolo, il campo sul piano E orizzontale è omnidirezionale: irradia verso la sonda e verso il terreno con la stessa intensità, dunque il campo al variare di z è fortemente variabile. Esistono dunque due scuole di pensiero, al fine di risolvere il problema:

- mettere l'antenna "probe", ossia quella che misura la AUT, sul massimo dell'interferenza: in questo modo si sfrutta l'interferenza per aumentare il segnale dal momento che, se l'interferenza è di tipo costruttivo (e ci si posiziona in modo da essere "certi" di essere in questa condizione), si può aumentare il segnale proprio grazie all'interferenza stessa;

- cercare di minimizzare la riflessione dal terreno, cercando di avere una distribuzione di campo uniforme; questo si può fare utilizzando degli assorbitori di campo sul terreno, eliminando il campo riflesso; alternativa, è quella di usare degli elementi diffrangenti, per esempio degli spigoli: gli spigoli diffrangenti possono scatterare il campo in modo incoerente, facendo in modo che dunque solo del campo diffratto possa girare per l'ambiente, e il campo diffratto dai vari spigoli finisce per interferire e dunque per cancellarsi.

Come si effettua dunque alla fine la misura del diagramma di irradiazione? L'idea è: si ha, come già detto la A_{T}, antenna in prova, ossia quella che intendiamo misurare (la AUT), e una seconda antenna, A_{S}, quella "sonda", della quale non abbiamo bisogno di conoscere molte cose; per esempio non abbiamo la necessità di conoscere neanche il guadagno, basta giusto sapere in quale direzione si trovi il massimo. Essendo chiamata "sonda", l'antenna in prova trasmette, quella "sonda" per l'appunto sonda il campo, dunque riceve. Poi ruotiamo l'antenna attorno al proprio asse, e in questo modo cambia il guadagno, dunque la potenza ricevuta: il guadagno è funzione di ϑ, e, dal momento che il test coincide nel ruotare rispetto a ϑ l'antenna, dunque nel puntare altre parti del diagramma di irradizione. Si ricava un segnale proporzionale alla funzione di direttività, dalla misura della potenza di ricezione.

Questo sarà un taglio della funzione guadagno: G è infatti funzione di ϑ e di φ. Quello che si fa per misurare diversi tagli dell'antenna è fare tutte le misure (da 0 a π) per ϑ, ruotare di un certo angolo φ, dunque rifare le misure per tutti i ϑ e così via per ogni taglio che si intende considerare. Si noti che ogni volta che si effettua la rotazione rispetto all'asse orizzontale di un certo φ, bisogna farlo sia per l'antenna in test sia per l'antenna sonda: quando si considera la formula di Friis, infatti, se non si hanno specifiche sui versori, si considera di avere adattamento di polarizzazione, ossia versori di polarizzazione delle due antenne paralleli; bisogna fare in modo, durante le misure, di mantenere intatta questa condizione. Di solito, gli unici tagli che si considerano sono per $\varphi = 0$ e per $\varphi = \pi/2$, ossia i due piani principali dell'antenna; volendo fare una caratterizzazione più dettagliata, si possono anche considerare dei tagli intermedi.

Un'antenna può essere utilizzata sia come ricevitore, sia come trasmettitore; dal momento che, a meno che non si abbia a che fare con un'antenna attiva (con un amplificatore, come quelle televisive), si possono scambiare i ruoli, quindi utilizzare A_{S} come antenna trasmittente invece che ricevente, in modo da studiare il comportamento di A_{T} come ricevitore.

Si noti che la rotazione (rispetto a ϑ) si deve sempre fare sull'antenna in prova, non su quella di test: noi vogliamo caratterizzare l'antenna sotto test, dunque la potenza irradiata da essa al variare del suo angolo di puntamento, non il contrario.

Approfondiamo un momento il discorso della polarizzazione: con misure di questo tipo (ruotando le antenne), si può caratterizzare il radiatore sotto test anche la sua polarizzazione (ovviamente a patto di conoscere quella del radiatore sonda). Si possono fare i seguenti test:

Ogni antenna ha come già detto molte volte due piani: un piano E e un piano H. Quello che si può fare è misurare, con questa tecnica, la co-polarizzazione e la cross-polarizzazione: per co-polarizzazione si intende la polarizzazione che si ha, quando i due piani sono orientati alla stessa maniera; questo perchè, se l'antenna trasmette "con polarizzazione verticale/orizzontale", la ricevente andrà a prelevare il segnale "con polarizzazione verticale/orizzontale", dunque dello stesso verso; discorso duale quello della cross-polarizzazione: se si orientano in modo opposto le antenne (sfasate di 90°), si fa per esempio la scansione del piano verticale V con quello orizzontale H.

Configurazione V e V significa che si considerano le due antenne misurate con polarizzazione diretta, sul piani H: se le antenne sono orientate verticalmente, allora variando ϑ si fa la misura sul piano orizzontale, quello su cui giace il campo magnetico (nel caso della tromba, a polarizzazione verticale). Se poi ruoto solo l'antenna sonda e non quella in prova, continuerò a fare la scansione sul piano H (H nel senso di "piano orizzontale" nonchè, nel caso della tromba, "piano del campo magnetico"), ma avendo ruotato l'antenna sonda, essa è orientata per ricevere polarizzazione orizzontale, dunque farà misurare la polarizzazione incrociata. Si possono poi ruotare le antenne di φ, variare la polarizzazione, e rifare le misure. Per far la scansione della polarizzazione diretta nel piano E del campo elettrico, dunque, bisogna orientare le antenne orizzontalmente, e fare la scansione.

In passato si era detto che:

$$F(\vartheta, \varphi) = F_H(\vartheta) \cos \varphi \hat{\varphi} + F_E(\vartheta) \sin \varphi \hat{\vartheta}$$

7.2.1 Range di misura

Tutto ciò che è stato finora analizzato e descritto, in termini di metodi di misura, è il cosiddetto "elevated range": campo di misura elevato. In realtà, questa non è l'unica situazione possibile, dal momento che esistono altri tipi di campi di misura, come lo "slant range":

questo sarebbe un "campo obliquo", dove si ha qualcosa del genere.

Il grande vantaggio di una cosa di questo genere è il fatto che la riflessione è trascurabile: la riflessione infatti si trova a terra, dunque, essendo il sistema antenna + immagine molto vicino al terreno, è come avere un'unica antenna.

Questo tipo di campo di misura dipende soprattutto dall'economia/edilizia: se si deve realizzare un campo di misura di antenne in una regione dove non è possibile fare altrimenti, si usa ciò; un'altra motivazione è come accennato di natura economica: costruire due torri è più costoso che costruirne una sola.

7.3 Misure di guadagno

L'equazione di Friis ha una forma del tipo:

$$P_{\mathrm{R}} = P_{\mathrm{T}} + G_{\mathrm{T}}(\vartheta) + G_{\mathrm{S}} - \alpha_{\mathrm{S}}$$

Se ci basta avere la funzione del guadagno, normalizzata a un qualche valore, le misure possono terminare qui; nel caso invece si volesse avere anche una misura del guadagno, dal momento che:

$$G_{\mathrm{T}} = g_{\mathrm{T}}(\vartheta) - G_0$$

non abbiamo determinato ancora un modo per misurare G_0. Anche il guadagno massimo dell'antenna va dunque determinato, misurandolo mediante un paio di metodi.

7.3.1 Metodo di sostituzione

Il primo metodo è il cosiddetto "metodo di sostituzione": invece di far ruotare l'antenna come fatto per il calcolo del diagramma di irradiazione, la si posizioni sul massimo, in modo da avere:

$$P_{\mathrm{r1}} = P_{\mathrm{T}} + G_{\max} + G_{\mathrm{S}} - \alpha_{\mathrm{S}}$$

fatto ciò, si sostituisce la AUT con un'antenna nota, "antenna campione"; questa, per frequenze maggiori del GHz, potrebbe essere una tromba rettangolare, il cui comportamento teorico è molto "affidabile". Effettuata la sostituzione, si ha

$$P_{\mathrm{r2}} = P_{\mathrm{T}} + G_{\mathrm{S}} + G_{\mathrm{R}} - \alpha_{\mathrm{S}}$$

dunque, ho che:

$$G_{\mathrm{T}} = G_{\mathrm{R}} + (P_{\mathrm{r1}} - P_{\mathrm{r2}})$$

dove tutto è noto. Si presti attenzione sul fatto che la potenza trasmessa deve essere la stessa; per questo motivo, normalmente si usa una terza antenna, "antenna monitor", che controlla per l'appunto il fatto che la potenza trasmessa all'antenna sonda sia sempre la medesima.

7.3.2 Metodo delle due antenne (di reciprocità)

Il precedente metodo è basato sul disporre di un'antenna di riferimento. Nel caso non si abbia a disposizione, si consideri il seguente metodo:

Date due antenne uguali, poste a distanza R, si ha:

$$P_{\mathrm{r1}} = P_{\mathrm{T}} + 2G - \alpha_{\mathrm{S}} - \alpha_{\mathrm{c}}$$

dove α_{c} sono le attenuazioni dei cavi. Si misura P_{r}, dunque si staccano i cavi, e si collegano tra loro; si ri-misura la potenza ricevuta da una parte all'altra, e si avrà:

$$P_{\mathrm{r2}} = P_{\mathrm{T}} - \alpha_{\mathrm{c}}$$

ora non si sta più passando per le antenne, ma solo per i cavi: il sistema non è più irradiante ma guidato. Dunque:

$$P_{\mathrm{r1}} - P_{\mathrm{r2}} = 2G_{\mathrm{S}} - \alpha_{\mathrm{S}}$$

dunque, invertendo (tutto in decibel):

$$G = \frac{1}{2}(P_{\mathrm{r1}} - P_{\mathrm{r2}}) + \alpha_{\mathrm{S}}$$

tipicamente, il guadagno dovrà essere positivo.

Questo metodo richiede due antenne uguali; ciò da realizzare non è assolutamente semplice, dunque si può usare il seguente trucco:

invece che usare due antenne, si può usare una singola antenna e la sua immagine; questo porterebbe a problemi di riflessione, che però possono essere ovviamente risolti con il metodo di finestra nel tempo:

$$\Delta\Gamma = \frac{G\lambda}{8\pi h}$$

dove tutto è noto tranne G.

7.4 Misure di fase

Molti ricevitori (nel senso di ricevitori della misura) sono di tipo vettoriale, ossia sono in grado di presentare modulo e fase di una certa misura. Questo porta ad avere la necessità di disporre di un canale di fase per il riferimento: un trasmettitore mediante un coupler manda il segnale di riferimento, dunque si collega l'antenna al trasmettitore, si misura il segnale e si fa ruotare l'antenna; si misura quindi anche la fase, rispetto al riferimento: si trova sia il diagramma di irradiazione sia il diagramma di fase. Il diagramma di fase è utile, dal momento che permette di determinare il centro di fase.

Esiste un altro metodo, più vecchio, quando non si disponeva di ricevitori vettoriali: si fa sostanzialmente ancora il confronto con un segnale di riferimento, e si usa un rivelatore; il lavoro è però molto più lungo. Sul canale di riferimento si introducono un attenuatore variabile e uno sfasatore variabile, e si misura a frequenza fissa; il divisore di potenza manda una parte della potenza sulla AUT, una parte al riferimento; si inviano i segnali a un dispositivo che fornisce la differenza tra i due segnali, quindi il rivelatore misura l'ampiezza, e si cerca di "minimizzare il segnale ricevuto": in questo modo si riesce a determinare lo zero del rivelatore, e dunque a capire quali sono modulo e fase che permettono di "compensare" quelli diversi.

7.5 Misure di polarizzazione

Se si dispone di un voltmetro vettoriale a due canali, il problema non sussiste: si ha un canale di riferimento e due ricevitori, uno con polarizzazione orizzontale e uno con la verticale; misurando in ampiezza e fase le due, si ha immediatamente l'ellisse di polarizzazione. La fase serve: è fondamentale, dal momento che a seconda di come i due vettori sono diretti uno rispetto all'altro, la polarizzazione può essere ellittica, circolare o lineare.

Si possono fare considerazioni, a partire da tre misure del solo modulo:

- se, facendo tre misure di tre componenti, esse rimangono sempre uguali, allora la polarizzazione sarà circolare;
- se la polarizzazione fosse lineare, misurando le due in quadratura, le due andrebbero a sommarsi circa.

Un'altra tecnica, che richiede strumentazione meno pesante, è basata sull'uso di uno "spinning dipole", ossia di un dipolo rotante. Cos'è? Beh, data l'antenna in prova e l'antenna sonda, se mentre l'antenna in prova ruota (rispetto a ϑ) si fa ruotare la sonda attorno a φ, in modo tale che Ω (velocità di rotazione della probe) abbia per esempio 1 giro al minuto, ω (velocità attorno ϑ) un giro al secondo (dunque velocità di rotazione della probe molto inferiore rispetto a quella della AUT), si misurano tutte le possibili polarizzazioni. Il dipolo infatti è un'antenna a polarizzazione lineare, dunque esso può essere usato come "sonda di polarizzazione". Si possono distinguere tre situazioni:

- presenza di oscillazioni estremamente evidenti, che partono da 0 e arrivano a un certo massimo: quando si vede qualcosa di simile a una sinusoide, la polarizzazione è lineare;
- quando si vede una "linea", la polarizzazione è circolare: si hanno sempre componenti uguali;
- una "via di mezzo", ossia una sinusoide con inviluppo a "corona circolare" è una polarizzazione ellittica (si han un minimo e un massimo).

questa tecnica è particolarmente indicata per misurare la qualità di polarizzazioni circolari, dal momento che sono ovviamente le più semplici da identificare.

7.6 Misure al chiuso

Effettuare misure all'aperto non è sempre possibile, e non è sempre intelligente: all'aperto si hanno infatti molti problemi, quali il clima (che fa variare le condizioni di propagazione del campo elettromagnetico), o le interferenze (che possono venire da altri dispositivi irradianti); al chiuso, d'altra parte, senza prendere accorgimenti, vi sono molti più problemi: la riflessione delle pareti, e soprattutto il fatto che il far field non è una condizione applicabile.

L'idea è quella di realizzare camere anecoiche, mediante "materiali anecoici":

Quello che si può fare è costruire strati di questo tipo, con dei coni in ogni punto dell'ambiente; i coni vengono realizzati con materiali assorbenti, come poliuretano espanso unito a grafite: il poliuretano è un materiale per la maggior parte composto da aria, dunque la punta del cono e l'aria saranno ben adattati; man mano che si scende, la forma conica è tale da far "adattare l'aria con la grafite", la quale sarà un materiale co perdite; in questo modo la stanza così riempita assorbe l'onda, e quindi non permette di rifletterla. L'altezza di ciascun cono deve essere circa pari a λ, o maggiore. Si ha:

$$\sqrt{\varepsilon_{\mathrm{r}}} \sim 1 - 0,2$$

calcolando $|\Gamma|$ in queste condizioni, si ottiene circa -0,1 , ossia - 20 dB. In queste condizioni, $|T|$ (coefficiente di trasmissione) è prossimo all'unità; vi saranno onde riflesse, dal momento che le onde arrivano obliquamente, ma queste andranno verso un altro cono, e se ogni riflessione ha 20 dB di attenuazione, si fa presto ad arrivare a 40 dB. Si ha:

$$\alpha \sim 11 \mathrm{dB}/\lambda$$

Sotto i coni infine si mette della metallizzazione, in modo da ottenere uno schermo dagli interferenti esterni.

Questa è la soluzione del problema "misura in campo lontano".

7.6.1 Misure a breve distanza

Ovviamente non è detto che una camera anecoica sia grande: essa può essere di dimensioni anche piuttosto ridotte. Come si può risolvere il problema del campo lontano? Per ora abbiamo risolto il problema delle riflessioni, ma non quello del campo lontano; servono metodi di misura che "rendano inutile" l'esigenza di avere la condizione di campo lontano.

- metodo del compact range;
- metodo NF-FF (Near Field - Far Field).

Compact range

Il compact range si può realizzare in linea di principio senza un computer, senza fare calcoli (a differenza dell'altro metodo). Il metodo "compact range" è basato sull'idea di “imbrogliare” l'antenna in prova, ossia farle sembrare che essa si trovi in campo lontano; la cosa, si può fare quando si ha, come antenna irradiante, una in grado di simulare un'onda piana, come una parabola (meglio se offset, in modo da evitare il bloccaggio).

L'antenna offset riflette un'onda, che sarà piana: a breve distanza da un riflettore parabolico l'onda entra piana, dopo diventa sferica (dopo la zona di Rayleigh). Trascurando gli effetti di diffrazione dai bordi, la fase è quasi costante sui piani, e la regione è una regione in cui si ha un'onda piana: “zona tranquilla”. Si ha un leggero tapering ma, se limito la zona che considero del paraboloide, la fase è quasi costante sui piani. Se metto un'antenna ricevente in prossimità della “zona tranquilla”, l'antenna è convinta di essere in regione di far field. Bisogna dunque fare attenzione ai bordi, fare attenzione che l'antenna sia piccola rispetto all'antenna che produce l'onda piana.

Bisogna fare attenzione che i bordi non diffrangano: essendo i bordi circolari, si avranno zone di interferenza. Per eliminare gli effetti di interferenza, vi sono due soluzioni:

1. la prima soluzione è la “zigzagatura”, ossia le “serrations”: si usa un bordo non più circolare, ma a “zig-zag”. Succede che, siccome la diffrazione (per il principio di Fermat) viene mandata in un cono che ha lo stesso angolo di apertura di quello di incidenza, i raggi diffratti vanno lateralmente e non nella zona tranquilla;

2. verso metà degli anni '80, si è passati ai “rolled edges”, bordi arrotolati: invece che avere un bordo troncato, si passa da un profilo parabolico ad uno ellittico, che non dà più rifrazione ma solo riflessione, dunque i raggi sono inviati alla “parte alta”. Per fare questi rolled edges, però, si dovevano avere antenne molto grandi.

La soluzione utilizzata ora è di nuovo quella delle serrations, però più fitte: gli spigoli delle serrations formano circa 90° con il bordo circolare, prima molto di meno essendovi meno punte.

NF-FF: Trasformazione campo vicino-campo lontano

Questo è un metodo più matematico, basato sul teorema di equivalenza: ogni volta che abbiamo avuto bisogno di calcolare il campo irradiato da un'antenna, abbiamo usato il teorema di equivalenza su un piano; il problema era dunque ricondotto all'applicazione del campo su questo piano.

Ora, invece di fare ipotesi, si può misurare il campo su tutto il piano, e applicare sul campo misurato il teorema di equivalenza. I valori saranno misurati in ampiezza.

Quello che si fa dunque è prendere il piano davanti al paraboloide e, con una sonda, misurare il campo su di una griglia; si fa un "raster", una scansione della griglia, dunque si determinano i valori del campo su tutto il piano, con una sonda mobile su x e su y. Il piano dovrebbe essere infinito ma, in pratica, il campo è diverso da zero poco oltre il cono di flusso: $\pm 30°$ oltre il cono dell'apertura. La scansione si può fare ogni $\lambda/4$.

Questo metodo, così per come è stato presentato, funziona ma non permette di effettuare la misura dell'irradiazione posteriore all'antenna. Quello che si può dunque fare è estendere questa funzione, effettuando una scansione sferica: invece che con le coordinate x e y, si usa un sistema polare di riferimento, e si fa ruotare l'antenna su di una sfera, in modo da determinare il diagramma di irradiazione in tutte le direzioni (sonda fissa, antenna in prova mobile su ϑ e φ, dunque il contrario della misura precedente appena presentata).

La sonda ha una polarizzazione lineare: prima si fa una passata degli angoli solidi con polarizzazione verticale, poi con polarizzazione orizzontale, si trovano le componenti, e la misura è finita.

Quello che conta è sempre il raggio della sfera che contiene le sorgenti, dunque l'antenna: bisogna far sì che il centro di rotazione dell'antenna coincida con il centro dell'antenna stessa, dal momento che, se l'antenna fosse spostata in avanti o in indietro rispetto al centro, l'antenna si sposta durante la rotazione, e così il raggio della sfera che contiene le sorgenti aumenta. Il sistema, e dunque il passo, quindi il numero di campioni, dipende dalla frequenza e da questo raggio.